СОПРОТИВЛЕНІЕ МАТЕРІАЛОВЪ

П. ХУДЯКОВЪ.

П. К. Худяковъ,
профессоръ ИМПЕРАТОРСКАГО Техническаго Училища.

СОПРОТИВЛЕНІЕ МАТЕРІАЛОВЪ.

Курсъ, читанный въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ, съ атласомъ, разсчетными таблицами и задачами.

ВЪ ПРИЛОЖЕНІИ КЪ КУРСУ ПОМѢЩЕНЪ

СБОРНИКЪ ЗАДАЧЪ НА ТЕОРІЮ РАСТЯЖЕНІЯ И СЖАТІЯ,

СОСТАВЛЕННЫХЪ ИНЖЕНЕРЪ-МЕХАНИКАМИ

В. Г. Шуховымъ и П. К. Худяковымъ.

МОСКВА.
Типо-литогр. Высочайше утвержден. „Русскаго Т-ва печатн. и издательск. дѣла".
Чистые пруды, собственный домъ.
1898.

ОТЪ АВТОРА.

Законы теоретической механики, или механики абстрактныхъ силъ, находятъ для себя обширныя примѣненія въ дѣйствительной природѣ вещей, при обращеніи съ той или другой матеріальной средой, воспринимающей на себя дѣйствіе силъ. Отсюда сама собою является необходимость знанія соотношеній, которыя существуютъ между дѣйствіемъ силъ на твердое тѣло и способностью его сопротивляться ихъ дѣйствію, не разрушаясь. Изысканіемъ и всестороннимъ изученіемъ этихъ соотношеній занимается спеціальный отдѣлъ механики, за которымъ установилось названіе *теоріи сопротивленія матеріаловъ*. Статика разсматриваетъ условія равновѣсія внѣшнихъ силъ между собою, динамика даетъ намъ условія равновѣсія внѣшнихъ силъ и силъ инерціи; а въ теоріи сопротивленія матеріаловъ разсматриваются условія равновѣсія между внѣшними силами и силами упругости матеріала, т. е. силами сопротивленія матеріала, возникающими между всѣми его частицами при дѣйствіи на тѣло внѣшнихъ силъ.

Такимъ образомъ теоретическая часть курса сопротивленія матеріаловъ имѣетъ своимъ основаніемъ *теорію упругости тѣлъ*, которая разсматриваетъ измѣненія формы тѣлъ и вызываемыя въ ихъ частицахъ силы упругости подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ.

Теорія упругости тѣлъ является самостоятельнымъ и весьма обширнымъ отдѣломъ физики, охватывающимъ явленія звука дрожащихъ пластинъ, свѣта, тепла и т. п. Ея абстрактные выводы, касающіеся *однородной* матеріи, незыблемы и постоянны. Область же примѣненія этихъ выводовъ, разсматриваемая въ теоріи сопротивленія матеріаловъ и распространяемая на различные строительные матеріалы, сравнительно весьма ограничена, такъ какъ эти матеріалы все время измѣняются и въ своемъ составѣ, и въ свойствахъ крѣпости, при-

мѣненія ихъ все время совершенствуются по мѣрѣ изученія свойствъ матеріаловъ, по мѣрѣ улучшенія ихъ выработки, по мѣрѣ развитія соотвѣтственныхъ отраслей промышленности. Теорія сопротивленія матеріаловъ черпаетъ по этому свои главнѣйшія положенія изъ опытовъ, производимыхъ въ такой обстановкѣ, при которой форма и размѣры тѣла, а также и условія воздѣйствія на него внѣшнихъ силъ, по возможности, мало разнятся отъ встрѣчающихся въ дѣйствительности, въ различнаго рода практическихъ приложеніяхъ. Такого рода опыты, съ цѣлію разъясненія свойствъ упругаго сопротивленія тѣлъ и опредѣленія различныхъ коэффиціентовъ, непрерывно продолжаются еще и въ наше время. Въ этомъ отношеніи ученіе о сопротивленіи матеріаловъ существенно разнится отъ остальныхъ опытныхъ отдѣловъ физики и механики, такъ какъ и самые матеріалы, и формы изготовляемыхъ изъ нихъ тѣлъ постоянно измѣняются, въ зависимости отъ поступательнаго движенія человѣческихъ знаній и большей или меньшей успѣшности практическаго приложенія ихъ.

Важность и значеніе выводовъ теоріи сопротивленія матеріаловъ объясняются въ достаточной мѣрѣ обширностью примѣненій ихъ въ дѣятельности инженера, какой бы путь онъ не избралъ при вступленіи на практическое поприще.

Теоретическая часть основного курса сопротивленія матеріаловъ отличается ясностью, простотой и безъ большихъ затрудненій поддается усвоенію. Самое же усвоеніе этого предмета должно быть полное и твердое, дополненное и провѣренное на возможно большемъ числѣ упражненій и задачъ. Ознакомиться съ примѣненіями усвоенной теоріи къ рѣшенію задачъ и съ упражненіями въ разсчетахъ слѣдуетъ еще на школьной скамьѣ, все время имѣя въ виду, какъ постоянную необходимость примѣнять эти знанія въ практической дѣятельности, такъ и нравственную, а равно и экономическую отвѣтственность, которую несетъ на себѣ инженеръ передъ обществомъ, если онъ не умѣетъ разумно и экономично строить предметы отечественнаго производства.

Безсознательное подраженіе существующимъ образцамъ не должно быть удѣломъ серьезнаго, образованнаго инженера; такое подражаніе, если и приводитъ иногда къ осуществленію надежной постройки, всегда бываетъ сопряжено съ непроизводительной затратой матеріала, ничѣмъ не вызываемой и нерѣдко даже вредною для дѣла.

Воздвигались сооруженія, строились двигатели и станки и до появленія теоріи сопротивленія матеріаловъ, продолжается та же созидательная дѣятельность и послѣ появленія этой теоріи. Но какая поразительно громадная разница въ

произведеніяхъ этой дѣятельности двухъ упомянутыхъ періодовъ!...

Всѣ произведенія 1-го періода носятъ на себѣ печать безсознательнаго творчества и подражанія, даютъ картину жизни безъ проявленій ума. За исключеніемъ развѣ только каменныхъ монументальныхъ сооруженій, явившихся результатомъ поэтическаго воображенія, роскошью культуры, всѣ остальныя произведенія этого періода не носятъ на себѣ даже и слѣдовъ красоты.

Первые шаги теоріи упругости далеко не всѣ были вѣрны, а главное имѣли исключительно теоретическій характеръ; результаты этой теоріи долго не примѣнялись къ сооруженіямъ, и многія примѣненія были сдѣланы не умѣло. Появились упреки въ несоотвѣтствіи теоріи и практики, и въ нѣкоторыхъ случаяхъ не безъ основаній. Разрабатывались теоріи, весьма изящно и остроумно обставленныя съ аналитической стороны, но построенныя на такихъ предположеніяхъ, которыя или вовсе не согласуются съ дѣйствительными свойствами матеріи, или игнорируютъ нѣкоторыя изъ весьма существенныхъ условій ея сопротивляемости. Подобнымъ образомъ поставленныя теоретическія изслѣдованія являются иллюстраціей другой картины — ума безъ всякаго отношенія къ жизни.

Современная намъ теорія сопротивленія матеріаловъ вступила уже въ свой зрѣлый періодъ, разумное и умѣлое примѣненіе положеній ея въ практикѣ составляетъ одну изъ постоянныхъ, наиболѣе интересныхъ и благодарныхъ задачъ въ дѣятельности инженера, должно дать и дѣйствительно даетъ продукты жизни разумной.

Но чтобы не повторять ошибокъ прошлаго, не остановиться на безотчетномъ подражаніи существующему, въ иныхъ случаяхъ неизвѣстно при какихъ требованіяхъ и условіяхъ построенному, и чтобы не ограничиться творчествомъ абстрактнаго ума безъ примѣненій къ жизни, еще на школьной скамьѣ необходимо упражняться разсчетами наивыгоднѣйшаго употребленія матеріала и продѣлать возможно большее число примѣровъ на опредѣленіе размѣровъ частей машинъ и сооруженій по даннымъ внѣшнимъ силамъ и условіямъ ихъ воздѣйствій.

Вотъ почему красною нитью проходятъ чрезъ весь курсъ сопротивленія матеріаловъ изысканія о наивыгоднѣйшемъ способѣ дѣйствія силъ на тѣло, о наивыгоднѣйшей формѣ и размѣрахъ его, о наименьшихъ измѣненіяхъ формы и размѣровъ подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ, о наименьшемъ вѣсѣ и т. д.; вотъ почему съ другой стороны всѣ наиболѣе существенные результаты теоретическихъ изысканій тутъ же не-

посредственно еще полнѣе и всестороннѣе разъясняются въ курсѣ на приложеніяхъ въ видѣ задачъ, причемъ попутно раскрываются тѣ или другія особенности въ свойствахъ матеріаловъ, тѣ или другія условія работы ихъ въ разнообразныхъ случаяхъ практики.

Особенно важное значеніе въ практической дѣятельности инженера имѣютъ приложенія теоріи растяженія и сжатія тѣлъ, болѣе другихъ согласованной съ результатами опыта и дающей возможность получить наивыгоднѣйшее примѣненіе матеріала въ постройкахъ. Какъ это ни странно, идейная часть этихъ двухъ главъ въ существующихъ курсахъ излагается до изумительности кратко, и въ особенности глава о сжатіи тѣлъ. Вопросы о неравномѣрномъ распредѣленіи сжимающей нагрузки или вовсе не разсматриваются, или удѣляется имъ весьма небольшое вниманіе; а капитальной важности *вопросы объ изнашиваніи тѣлъ*, т. е. о сдавливаніи двухъ нагруженныхъ тѣлъ, перемѣщающихся одно относительно другого, даже и не намѣчаются обыкновенно. Отвѣчая современнымъ требованіямъ, предъявляемымъ къ инженеру въ его практической дѣятельности, пришлось развить названные отдѣлы съ большей полнотою, пришлось ввести и разработать нѣсколько новыхъ главъ.

Для наилучшаго усвоенія изложеннаго, въ концѣ каждаго отдѣла введены *вопросы для повторенія прочитаннаго*, нерѣдко наводящія на новый рядъ мыслей и слѣдствій, которыя вовсе не приходятъ въ голову ни во время плавнаго чтенія курса, ни во время самостоятельнаго продѣлыванія выводовъ, когда главное вниманіе невольно бываетъ обращено на подражаніе оригиналу.

Для возможно болѣе полнаго закрѣпленія въ памяти всего усвоеннаго, вслѣдъ за вопросами для повторенія помѣщенъ въ курсѣ каждый разъ *сводъ главнѣйшихъ данныхъ и формулъ* изъ того или другого отдѣла. Составъ такихъ формулъ и единицы мѣры въ нихъ должны быть изучены въ совершенствѣ. Нужно помнить, что ошибки, являющіяся слѣдствіемъ небрежнаго отношенія къ этимъ формуламъ и неправильнаго ихъ пониманія и примѣненія, дѣлаютъ инженера виновнымъ въ нанесеніи своимъ довѣрителямъ нерѣдко весьма большого и непоправимаго матеріальнаго ущерба и налагаютъ на него весьма тяжелую нравственную и матеріальную отвѣтственность.

Съ этою же цѣлію во многихъ главахъ курса обращено особенное вниманіе и на тѣ постоянныя ошибки и неправильности, которыя изъ года въ годъ повторяются въ отвѣтахъ слабыхъ студентовъ, когда изложенная теорія бываетъ ими недостаточно усвоена, или невѣрно понята.

Для болѣе быстрыхъ подсчетовъ и различныхъ соображеній помѣщены въ нашемъ курсѣ въ большомъ изобиліи различныя вспомогательныя таблицы, значительно облегчающія многія вычисленія въ одномъ случаѣ, служащія для контроля и провѣрки въ другомъ и разъясняющія своеобразныя свойства сопротивляемости въ третьемъ.

Въ составъ самаго курса умышленно введены только элементарные случаи сопротивленія тѣлъ (теорія растяженія, сжатія, сдвига, крученія и сгибанія) съ тѣмъ, чтобы при краткости учебнаго времени можно было достигнуть полнаго и всесторонняго изученія основъ теоріи; твердое знаніе ихъ даетъ инженеру незыблемый фундаментъ въ его практической дѣятельности, позволяетъ ему тогда сравнительно легко разобраться въ какой угодно болѣе сложной теоріи и критически отнестись къ ней.

Чтобы имѣть возможность быстрѣе оріентироваться среди матеріала, который даютъ таблицы атласа, сопровождающаго курсъ, сдѣлано слѣдующее: въ текстѣ указаны всѣ сноски на таблицы, размѣщеніе фигуръ на таблицахъ сдѣлано въ послѣдовательномъ порядкѣ, нумерація таблицъ помѣщена всюду въ правомъ верхнемъ углѣ каждой таблицы; подъ указаніемъ №-а таблицы отмѣченъ начальный и конечный № фигуръ, помѣщенныхъ на данной таблицѣ; при каждой фигурѣ таблицы сдѣлано указаніе на тотъ § текста, или тотъ № задачи, гдѣ говорится объ этой фигурѣ.

Въ концѣ курса, въ видѣ добавленія къ нему, помѣщенъ *сборникъ задачъ* на практическія приложенія теоріи растяженія и сжатія. Въ постановкѣ идейной стороны этихъ задачъ и въ раскрытіи общихъ законовъ, касающихся наивыгоднѣйшаго устройства фермъ съ растянутыми и сжатыми частями, по моей просьбѣ принялъ весьма дѣятельное и дружеское участіе *Владиміръ Григорьевичъ Шуховъ*, инженеръ-механикъ выпуска 1876 г., одинъ изъ наиболѣе выдающихся русскихъ инженеровъ нашего времени, извѣстный изобрѣтатель и практическій дѣятель въ области инженернаго дѣла и машиностроенія, авторъ многихъ теоретическихъ изслѣдованій, замѣчательныхъ своей оригинальностью, остроуміемъ и практичностью. Съ благодарностію отмѣчая его активное участіе въ этомъ дѣлѣ, не могу умолчать о томъ, что, благодаря этому, удалось представить отдѣлъ дополнительныхъ задачъ съ надлежащей полнотою и раскрыть при этомъ такія идеально простыя соотношенія и комбинаціи при наивыгоднѣйшемъ устройствѣ фермъ, на которыя до сихъ поръ совершенно несправедливо обращено было весьма малое вниманіе.

Начало составленія этихъ дополнительныхъ къ курсу задачъ было положено осенью 1897 г. Предполагалось въ

самомъ началѣ ограничиться только весьма небольшимъ числомъ простыхъ примѣровъ для иллюстраціи идейной стороны вопроса. Но затѣмъ на первыхъ же задачахъ весьма быстро обнаружилось, что наивыгоднѣйшія комбинаціи фермъ, обладающія *min* своего вѣса и поставленныя въ совершенно различныя условія нагруженія, имѣютъ много общихъ свойствъ и совершенно одинаково относятся къ нѣкоторымъ геометрическимъ представленіямъ, весьма простымъ и вмѣстѣ съ тѣмъ изящнымъ, наводящимъ на мысль, что тутъ дѣйствуютъ какіе-то общіе законы. Догадки эти впослѣдствіи съ совершенной очевидностью и подтвердились. Разсматривая различнымъ образомъ нагруженныя треугольныя фермы, состоящія изъ растянутыхъ и сжатыхъ частей, и нѣкоторыя комбинаціи ихъ, были обнаружены слѣдующія общія теоремы:

1. Минимальный возможный вѣсъ треугольной фермы и ея комбинацій приводится или къ вѣсу одного призматическаго стержня съ высотою, равною наивыгоднѣйшей высотѣ фермы, разсчитаннаго по заданной нагрузкѣ на растяженіе, или къ вѣсу нѣсколькихъ такихъ стержней, причемъ коэффиціентомъ пропорціональности являются часто такія простыя числа, какъ 2, 4, 6.

2. Вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей въ фермѣ, обладающей *min* вѣса, или одинаковъ, или находится въ постоянномъ отношеніи, и это свойство совершенно не зависитъ ни отъ рода матеріала фермъ, ни отъ внѣшняго вида ихъ, ни отъ степени надежности постройки.

3. Въ треугольныхъ фермахъ съ двумя подкосами (или двумя тягами), *min* вѣса получается часто въ томъ случаѣ, когда между длиною обоихъ подкосовъ (или тягъ) установлено нѣкоторое постоянное соотношеніе (иногда равенство ихъ длины); и это свойство не зависитъ тогда ни отъ положенія фермы въ пространствѣ, ни отъ направленія дѣйствія на нее нагрузки, ни отъ степени надежности постройки.

4. Если какимъ-либо образомъ комбинируются двѣ треугольныя фермы для образованія одной, свободно подвѣшенной за 2 узла, то наиболѣе невыгодное расположеніе нагрузки будетъ всегда такое, когда оба плеча ея относительно опоръ *одинаковы*; и это свойство не зависитъ ни отъ выбора размѣровъ частныхъ треугольныхъ фермъ, ни отъ взаимнаго расположенія ихъ опоръ по высотѣ.

5. Если опоры одной треугольной фермы или комбинаціи изъ двухъ такихъ фермъ находятся на одной высотѣ, выраженіе вѣса фермы зависитъ отъ *произведенія плечъ* нагрузки относительно опоръ; если же опоры будутъ поставлены на разной высотѣ, роль этихъ плечъ въ выраженіи

вѣса и во всѣхъ другихъ формулахъ замѣнять тѣ отрѣзки, на которые направленіе дѣйствія нагрузки разбиваетъ линію, соединяющую опорныя точки.

6. Если на комбинацію изъ двухъ треугольныхъ фермъ нагрузка передается чрезъ такой узелъ, гдѣ сходятся 3 элемента фермы, и направленіе дѣйствія нагрузки совпадаетъ съ направленіемъ средняго изъ этихъ трехъ элементовъ, тогда разложеніе нагрузки въ этомъ узлѣ между среднимъ и двумя крайними сходящимися здѣсь элементами происходитъ всегда по одному и тому же закону, а именно: силы, передающіяся на средній элементъ съ одной стороны и на оба крайнихъ съ другой, прямо пропорціональны длинѣ отрѣзковъ, которые на рабочей діагонали фермы засѣкаетъ другая, нерабочая (воображаемая), діагональ фермы.

Существованіе этихъ общихъ теоремъ, подтверждающихся на цѣломъ рядѣ примѣровъ, въ которыхъ измѣнялись и внѣшній видъ фермы, и ея положеніе въ пространствѣ, и способъ нагруженія, дѣлаетъ ихъ весьма цѣнными для инженера и позволяетъ думать, что въ близкомъ будущемъ этотъ геометрическій отдѣлъ строительной механики, отвѣчающій на вопросы о выборѣ наивыгоднѣйшихъ размѣровъ фермъ, долженъ получить большое значеніе и сдѣлается достояніемъ каждаго образованнаго инженера. Изложенный здѣсь общій методъ изслѣдованія о наивыгоднѣйшихъ размѣрахъ фермъ даетъ результаты, идеальная стройность и непреложность которыхъ совсѣмъ не зависятъ ни отъ рода употребляемыхъ въ дѣло матеріаловъ, ни отъ дальнѣйшаго развитія теоріи сопротивленія матеріаловъ и совершенствованія человѣческихъ знаній вообще. Къ числу достоинствъ этого метода нужно отнести также его сравнительную простоту, наглядность и доступность пониманія даже и для лицъ, не владѣющихъ обширными познаніями по математикѣ.

Во всѣхъ геометрическихъ представленіяхъ, касающихся фермъ, которыя обладаютъ *min* вѣса, видную роль играютъ двѣ кривыя — окружность и парабола.

Разсматривая вѣсъ различныхъ комбинацій треугольныхъ фермъ, оказывается возможнымъ получить реальное представленіе о такой ихъ комбинаціи, *min* вѣса которой зависитъ отъ выбора *трехъ* независимыхъ перемѣнныхъ.

Продѣлывая задачи, касающіяся вопроса объ опредѣленіи *min* вѣса фермъ, при первыхъ же шагахъ не трудно было обнаружить, что рѣшеніе выходитъ изящнымъ, простымъ и краткимъ, если дѣлать его исключительно одними алгебраическими пріемами, и что оно же пріобрѣтаетъ крайне слож-

ную, расплывчатую, совершенно неприступную форму, если въ него будутъ введены тригонометрическія функціи.

То же самое замѣчаніе относится и ко многимъ другимъ выводамъ въ курсѣ, для которыхъ почти вездѣ приведены кратчайшія рѣшенія вопроса; измѣняя же независимыя перемѣнныя, не дѣлая во время нужныхъ преобразованій и упрощеній, измѣняя положеніе осей координатъ и т. п., можно въ тѣхъ же самыхъ вопросахъ притти къ весьма сложнымъ и запутаннымъ рѣшеніямъ, которыя, если и приводятъ въ концѣ концовъ къ требуемому результату, то во всякомъ случаѣ не по кратчайшему пути, не съ минимальной затратой потребной на это работы, однимъ словомъ, съ такими пріемами, которые изобличаютъ работу не инженера, а ремесленника.

Профессоръ **П. Худяковъ.**

Москва, 25 января 1898 г.

ВВЕДЕНІЕ.

1. **Нагрузка и деформація.** Отъ каждой проектируемой части машины или сооруженія требуется прежде всего, чтобы она удовлетворяла своему прямому *назначенію*, которое выясняется при всесторонней разработкѣ проекта, принимая во вниманіе, какъ всѣ условія заданія, такъ и всѣ послѣдующія условія работы разсматриваемой части. Назначеніемъ ея опредѣляются или нѣкоторые изъ *главныхъ* размѣровъ части (разстояніе между *характерными* точками ея, наибольшее или наименьшее измѣреніе и т. п.), или иногда ея вѣсъ, та или другая форма поперечнаго сѣченія, тотъ или другой внѣшній видъ, выборъ матеріала и проч.

Всякая, уже удовлетворяющая своему назначенію, часть машины или сооруженія, при современныхъ требованіяхъ практики, должна быть:

а) прочна,

б) долговѣчна и

в) дешева.

Внѣшнія силы, воздѣйствующія на тѣло, могутъ быть двоякаго рода — *химическія* и *механическія*. Вредныя проявленія химическихъ воздѣйствій устраняются или надлежащимъ выборомъ матеріала для выполненія всей разсчитываемой части, или окраской ея поверхности, оксидированіемъ, никелированіемъ, обшивкой различными стойкими матеріалами и т. д.

Механическое воздѣйствіе внѣшнихъ силъ на тѣло наз. его *нагруженіемъ*, а самыя силы — *нагрузкою*.

Всякая нагрузка, какъ-бы мала она ни была, стремится какъ-либо *измѣнить форму*, приданную тѣлу, напр., вытягивая тѣло по одному или нѣсколькимъ направленіямъ, сжимая его, сгибая и т. д.

Форму тѣла до дѣйствія на него внѣшней нагрузки, будемъ наз. *формой покоя*

При нагруженіи тѣла его форма покоя измѣняется. Эти измѣненія формы наз. *деформаціями*.

При всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, чѣмъ меньше *величина нагрузки* на тѣло, тѣмъ меньше и *величина деформацій*, получаемыхъ тѣломъ.

По удаленіи нагрузки тѣло стремится воспринять форму покоя, т. е. всѣ полученныя имъ ранѣе деформаціи при этомъ исчезаютъ.

Это свойство тѣлъ—измѣнять свою форму при нагруженіи и опять воспринимать форму покоя по удаленіи нагрузки — наз. *упругостью* (*élasticité* — франц., *Elastizität* — нѣм., *elasticity* — анг.). Различные матеріалы обладаютъ этимъ свойствомъ въ разной степени. Въ природѣ нѣтъ ни совершенно упругихъ, ни совершенно неупругихъ матеріаловъ. Въ бо́льшей мѣрѣ это свойство присуще металламъ, въ меньшей — тканямъ растительнаго и животнаго происхожденія и еще въ значительно меньшей степени — матеріаламъ изъ минеральнаго царства.

Практическое употребленіе матеріала предполагаетъ, что въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ *нагрузка будетъ сообразована съ природою матеріала и условіями ея воздѣйствія на него.* Во всякомъ случаѣ нагрузка должна быть сравнительно не велика, чтобы по удаленіи ея тѣло могло воспринять форму покоя. Это первое и необходимое условіе при выборѣ нагрузки. Если по удаленіи нагрузки тѣло оказалось бы уже отчасти деформированнымъ навсегда, т. е. не возвратилось бы къ его формѣ покоя, это повело бы тотчасъ же къ измѣненію главныхъ размѣровъ тѣла, къ нарушенію въ окружающей его средѣ геометрическихъ и кинематическихъ свойствъ, къ новому распредѣленію нагрузки между окружающими данное тѣло частями и т. п. Такимъ образомъ вносилась бы недопустимая здѣсь неопредѣленность и въ условія разсчета тѣла, и въ условія существованія его. Поэтому, когда говорятъ, что тѣло достаточно *прочно*, это происходитъ отъ существованія у него въ поперечныхъ сѣченіяхъ такихъ размѣровъ, при которыхъ нагрузка деформируетъ его весьма слабо, часто совершенно незамѣтно для невооруженнаго глаза, и при томъ непремѣнно такъ, что по удаленіи нагрузки тѣло всегда снова воспринимаетъ форму покоя, сколько-бы разъ ни повторялось воздѣйствіе нагрузки на тѣло.

Отъ многихъ частей машинъ и сооруженій, кромѣ достаточной прочности, требуется еще и *долговѣчность.* Это требованіе предъявляется особенно тогда, когда соотвѣтственная часть или сильно *снашивается* во время работы, или *нагрѣвается* отъ неумѣреннаго превращенія работы тренія въ теплоту и отъ недостаточно быстраго отведенія ея, или находится *подъ дѣйствіемъ живыхъ силъ* перемѣнной величины, сопровождающимся часто ударами, толчками, сотрясеніями и т. п.

Величина нагрузки, вполнѣ отвѣчающая условіямъ крѣпости тѣла и въ достаточной мѣрѣ обезпечивающая также и долговѣчность существованія его, наз. *безопасной нагрузкой* для тѣла при данныхъ условіяхъ его работы. Въ различныхъ случаяхъ практики, даже и безъ перемѣны величины нагрузки на тѣло, условія его работы могутъ быть такъ разнообразны (отъ измѣненія, напр., рабочей скорости. состоянія окружающихъ данное тѣло поверхностей, большей или меньшей тщательности ухода и сборки, измѣненія температуры и т. п.), что между размѣрами поперечнаго сѣченія тѣла и его безопасною нагрузкою въ большинствѣ случаевъ не можетъ быть установлено постояннаго соотношенія одинъ разъ на всегда. Это соотношеніе приходится мѣнять въ зависимости не только отъ всѣхъ условій работы тѣла, но также и

отъ рода матеріала, который надо употреблять въ дѣло, отъ его спеціальныхъ свойствъ, чаще же всего — въ зависимости отъ большаго или меньшаго умѣнья обращаться съ машиною въ работѣ, при пусканіи ея въ ходъ, при остановкѣ и т. д.

Вопросы *объ опредѣленіи безопасной нагрузки* для даннаго тѣла при заданныхъ условіяхъ его работы и *о нахожденіи деформаціи*, которую получитъ тѣло послѣ его нагруженія, рѣшаются въ особомъ отдѣлѣ прикладной механики, который носитъ названіе *теоріи сопротивленія матеріаловъ*. Результаты этой теоріи могутъ имѣть практическую цѣну въ такой лишь мѣрѣ, въ какой они согласуются съ данными непосредственнаго опыта.

Поэтому въ основу всѣхъ теоретическихъ изслѣдованій по сопротивленію матеріаловъ кладутся всегда опытныя данныя, выясняющія зависимость, которая существуетъ въ дѣйствительности между нагрузкой на тѣло и получаемой имъ деформаціей.

Во всѣхъ такого рода теоретическихъ изслѣдованіяхъ разсматриваютъ твердое тѣло, какъ *однородную* систему, состоящую изъ собранія весьма малыхъ частицъ, взаимно связанныхъ между собою въ одно цѣлое при помощи такъ называемыхъ *частичныхъ* (*молекулярныхъ*) *силъ*, или иначе, *силъ упругости*, которыя препятствуютъ нагрузкѣ деформировать тѣло.

Въ существованіи силъ упругости каждому нетрудно самому убѣдиться непосредственнымъ опытомъ, взявши кусокъ резины, длинный карандашъ и т. п. и деформируя ихъ нажимомъ пальцевъ обѣихъ рукъ, чтобы вызвать сгибаніе. По прекращеніи нагрузки, если деформація зашла не слишкомъ далеко, тѣло воспринимаетъ форму покоя.

Болѣе точнымъ образомъ обставляется подобный опытъ съ металлическими (чугунными или желѣзными) пластинами, которымъ придается форма призмъ; на поверхности ихъ, аккуратно обработанной, расчерчиваются правильныя геометрическія фигуры и точно промѣряются ихъ размѣры; затѣмъ тѣло нагружается, начерченныя фигуры измѣняютъ свой видъ и размѣры, которые также вымѣряются; далѣе нагрузка снимается, и тогда измѣненный передъ этимъ контуръ снова возвращается къ первоначальному своему виду. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что деформація тѣла—*упругая*. Такъ будетъ происходить опытъ, если нагрузка сравнительно невелика. Иначе, измѣненный дѣйствіемъ нагрузки контуръ, стремясь по удаленіи нагрузки притти къ первоначальному своему виду, перестаетъ достигать этого и остается *отчасти* деформированнымъ уже навсегда. Съ помощію опыта убѣждаются так. обр., что нагрузки, болѣе или менѣе значительныя по величинѣ, вызываютъ въ тѣлѣ деформаціи двоякаго рода — *упругія* (или *исчезающія*) и *постоянныя* (или *остающіяся*); и при болѣе тщательномъ производствѣ опыта, принимая во вниманіе также и продолжительность воздѣйствія нагрузки на тѣло, обнаруживается, что постоянная деформація получается не вся сразу, а постепенно; точно также и ея исчезновеніе по удаленіи нагрузки требуетъ извѣстнаго времени, тогда какъ упругая

деформація всегда сразу получается и сразу исчезаетъ при наложеніи и снятіи нагрузки.

Сближая во время опыта нѣкоторыя точки контура, по снятіи нагрузки видятъ эти точки взаимно удаляющимися, стремящимися къ своему первоначальному положенію.

Наоборотъ, удаляя во время опыта нѣкоторыя точки контура, по снятіи нагрузки видятъ эти точки сближающимися.

Для разъясненія этого явленія допускается существованіе слѣдующей гипотезы:

1) частицы тѣла воздѣйствуютъ одна на другую съ силами взаимнаго притяженія и отталкиванія, величина которыхъ зависитъ отъ величины разстоянія между частицами;

2) когда частицы занимаютъ положеніе, соотвѣтствующее формѣ покоя, величины силъ притяженія и отталкиванія одинаковы;

3) при удаленіи частицъ одна отъ другой величины силъ притяженія увеличиваются, а величины силъ отталкиванія уменьшаются; при сближеніи частицъ тѣла происходитъ обратное явленіе.

Пока на тѣло не дѣйствуетъ внѣшняя нагрузка, внутреннія (молекулярныя) силы каждой частицы тѣла взаимно уравновѣшиваются, — многоугольникъ силъ замкнутъ. Какъ только будетъ приложена къ тѣлу нагрузка, равновѣсіе внутреннихъ силъ нарушится, — силовой многоугольникъ будетъ разомкнутъ, до тѣхъ поръ, пока частицы тѣла, перемѣщаясь одна относительно другой, не найдутъ такого положенія, при которомъ внутреннія силы будутъ въ состояніи уравновѣсить собою внѣшнюю нагрузку; тогда получимъ новый замкнутый многоугольникъ силъ. Если послѣ этого мы отнимемъ внѣшнюю нагрузку, мы тѣмъ самымъ разомкнемъ этотъ новый многоугольникъ силъ, и равновѣсія между внутренними силами при новомъ положеніи частицъ быть не можетъ; онѣ начнутъ снова перемѣщаться, но уже подъ дѣйствіемъ внутреннихъ силъ, и будутъ перемѣщаться до тѣхъ поръ, пока онѣ не возвратятся къ формѣ покоя, когда онѣ взаимно уравновѣшивались, и многоугольникъ силъ былъ замкнутъ въ первоначальной его формѣ.

Частичныя силы наиболѣе замѣтно проявляютъ свое дѣйствіе, когда измѣненіе разстояній между смежными частицами происходитъ въ небольшихъ сравнительно предѣлахъ. При дѣйствіи же весьма большихъ нагрузокъ частицы тѣла могутъ оказаться настолько удаленными одна отъ другой, что по снятіи нагрузки частицы, повинуясь дѣйствію внутреннихъ силъ, уже не будутъ въ состояніи вернуться въ первоначальное свое положеніе; форма тѣла по удаленіи такой нагрузки хотя и стремится къ первоначальной, но вполнѣ ея не достигаетъ и остается уже отчасти измѣненной навсегда. При дальнѣйшемъ увеличеніи нагрузки связь между частицами и вовсе можетъ уничтожиться; тогда тѣло разрушается.

2. **Напряженіе матеріала.** Какой бы способъ воздѣйствія нагрузки на тѣло ни былъ, необходимо знать, какія перемѣщенія подъ дѣйствіемъ

этой нагрузки будетъ испытывать каждая точка тѣла, и какъ распредѣлится между ними самая нагрузка.

Передача нагрузки на тѣло вызываетъ между его частицами дѣйствіе внутреннихъ силъ и проявленіе деформацій.

Если мы представимъ себѣ частицу тѣла лежащею на нѣкоторой поверхности, то перемѣщенія частицы подъ дѣйствіемъ внутреннихъ силъ могутъ быть только двухъ родовъ — *вдоль* самой поверхности и *нормально* къ ней. Всякое другое перемѣщеніе частицы, очевидно, можетъ быть сведено опять къ этимъ двумъ путемъ разложенія его по правилу параллелограмма.

Когда перемѣщеніе частицы происходитъ *нормально* къ поверхности, на которой лежитъ частица, матеріальная линія, совпадающая съ радіусомъ кривизны поверхности въ данной точкѣ, очевидно, или *удлинняется*, или *укорачивается*, не мѣняя своего относительнаго расположенія къ данной поверхности.

Если же перемѣщеніе частицы происходитъ *вдоль* поверхности, то явленіе сопровождается сдвиганіемъ, или короче — *сдвигомъ* точки въ сторону.

Чтобы составить себѣ представленіе о внутреннихъ силахъ, которыя вызываются при перемѣщеніи частицъ, необходимо знать *величину* этихъ силъ, *направленіе дѣйствія* и *точки приложенія* ихъ.

Величину *элементарной внутренней силы*, или силы упругости, передающейся на весьма малую площадь элемента поверхности, представляютъ себѣ состоящею изъ пучка параллельныхъ частичныхъ силъ, не отличающихся между собою по величинѣ. Тогда слагающая всего этого пучка силъ при составленіи условій равновѣсія можетъ быть принимаема приложенною въ центрѣ тяжести элемента поверхности. Направленіе же дѣйствія слагающей, естественно, должно быть изображено въ сторону, противоположную съ направленіемъ перемѣщенія элемента поверхности

Величина элементарной внутренней силы, приходящейся на единицу площади элемента, называется *напряженіемъ матеріала*.

Вышеизложенное разсмотрѣніе характера возможныхъ перемѣщеній частицъ внутри тѣла позволяетъ заключить, что и напряженія матеріала могутъ быть только двухъ родовъ, т. е. дѣйствующія *нормально* къ поверхности элемента, или *нормальныя напряженія*, и дѣйствующія *вдоль* самой поверхности, или *тангенціальныя напряженія*.

Когда нагрузка на тѣло произвела присущую ей деформацію, тогда наступаетъ равновѣсіе нагрузки и внутреннихъ силъ. Это равновѣсіе существуетъ не только во всемъ тѣлѣ, во всей совокупности его частицъ, но оно существуетъ также и между отдѣльными частями деформированнаго тѣла.

Поэтому, когда дѣйствіе нагрузки на тѣло установилось, мысленно можно представлять себѣ тѣло какъ бы разсѣченнымъ на двѣ части произвольной плоскостью и независимо разсматривать равновѣсіе обѣихъ частей тѣла, расположенныхъ по обѣ стороны отъ разсматриваемаго сѣченія. Ко всѣмъ точкамъ этого сѣченія должны быть приложены

тогда по величинѣ и по направленію *всѣ* силы упругости, дѣйствующія на каждый элементъ площади, т. е. и тангенціальныя силы, и нормальныя. Прикладывая къ любой изъ выдѣленныхъ так. обр. частей тѣла всѣ 6 условій равновѣсія между нагрузкою и внутренними силами, получаютъ между ними опредѣленную зависимость; съ помощію ея и рѣшается вопросъ о крѣпости тѣла.

Но чтобы имѣть возможность получить такую зависимость, нужно предварительно изучить опытнымъ путемъ законъ распредѣленія напряженій между отдѣльными точками тѣла при всякомъ способѣ приложенія нагрузки; а для этого необходимо самымъ тщательнымъ образомъ изучить всѣ проявленія деформацій въ тѣлѣ отъ каждой данной нагрузки.

Эта работа должна предшествовать теоретическому изученію того или другого вопроса о сопротивляемости матеріаловъ.

3. **Общій ходъ работы** по каждому подобному вопросу представляется так. обр. въ слѣдующемъ видѣ:

1) опытнымъ путемъ надо изучить зависимость между величиною и способомъ приложенія нагрузки на тѣло и величинами получаемыхъ отъ этого каждою точкою тѣла перемѣщеній;

2) на основаніи предыдущихъ данныхъ надо составить гипотезу наиболѣе вѣроятнаго распредѣленія напряженій между отдѣльными частицами тѣла;

3) составивши гипотезу распредѣленія напряженій въ тѣлѣ, надо аналитически установить: *а*) зависимость между напряженіемъ въ произвольной точкѣ тѣла и нагрузкою на него, пользуясь ур-іями равновѣсія твердаго тѣла и *б*) зависимость между нагрузкой на тѣло и деформаціею его.

Эта послѣдняя зависимость д. б. совершенно тождественна съ тою, о которой говорится въ пунктѣ 1. Если это будетъ имѣть мѣсто, у насъ будетъ подтвержденіе того, что принятая гипотеза о распредѣленіи напряженій не содержитъ въ себѣ ничего невѣроятнаго.

Послѣ этого и аналитическая зависимость между напряженіемъ матеріала въ произвольной точкѣ тѣла и нагрузкою на него пріобрѣтаетъ уже практическую цѣнность. Будемъ называть эту зависимость *уравненіемъ напряженій*.

Изслѣдуя ур-іе напряженій, находятъ въ тѣлѣ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, гдѣ напряженіе будетъ достигать своего *max*. Поверхность, на которой лежатъ точки съ наибольшимъ напряженіемъ матеріала, наз. *опаснымъ сѣченіемъ* тѣла. Очевидно, что бо́льшая или меньшая *способность тѣла сопротивляться дѣйствію силъ зависитъ отъ крѣпости его опаснаго сѣченія*. Если оно будетъ крѣпко, то и все тѣло будетъ достаточно крѣпко, а если опасное сѣченіе тѣла будетъ слабо, то никакія усиленія размѣровъ въ другихъ частяхъ тѣла не поведутъ къ усиленію крѣпости тѣла.

4. **Разсчетное уравненіе**. Примѣняя ур-іе напряженій къ опасному сѣченію тѣла, мы найдемъ изъ этого ур-ія зависимость между

нагрузкою и вызываемымъ ею наивысшимъ напряженіемъ матеріала. Та величина напряженія въ опасномъ сѣченіи тѣла, допуская существованіе которой при данной нагрузкѣ, мы можемъ считать тѣло достаточно крѣпкимъ и долговѣчнымъ, наз. *допускаемымъ напряженіемъ матеріала*, *возможнымъ*, или *прочнымъ*, *безопаснымъ*.

Выясненіе величины допускаемаго напряженія матеріала можетъ быть сдѣлано, только пользуясь указаніями опыта.

Замѣняя вычисленную по ур-ію напряженій величину наивысшаго въ тѣлѣ напряженія допускаемою для него величиною, мы тѣмъ самымъ выразимъ, что опасное сѣченіе тѣла достаточно крѣпко, и получимъ ур-іе, которое называютъ *разсчетнымъ ур-іемъ*, или *ур-іемъ крѣпости*. Опредѣляемые изъ этого ур-ія размѣры опаснаго сѣченія тѣла будутъ таковы, что при существованіи ихъ во всѣхъ точкахъ опаснаго сѣченія будетъ вызвана величина напряженія матеріала, равная допускаемой, безопасной величинѣ, или меньшая ея, чѣмъ и выражается вполнѣ та мысль, что тѣло будетъ при этомъ достаточно крѣпко.

Размѣры опаснаго сѣченія тѣла, удовлетворяющіе разсчетное ур-іе его при требуемой нагрузкѣ, наз. *прочными размѣрами* тѣла, *допускаемыми*, *безопасными*.

Если тѣло уже существуетъ, то величина нагрузки, удовлетворяющей разсчетное ур-іе, т. е. вызывающей въ опасномъ сѣченіи тѣла величину напряженія, не бо́льшую допускаемой, наз. *допускаемой нагрузкой*, *безопасной*, *возможной*.

5. **Степень надежности постройки**. Напряженіе матеріала въ опасномъ сѣченіи тѣла въ моментъ разрушенія его называютъ *разрушающимъ напряженіемъ* или *коэф. крѣпости*.

Отношеніе разрушающаго тѣло напряженія къ безопасному наз. *степенью надежности постройки*.

Величина разрушающаго напряженія опредѣляется путемъ непосредственнаго опыта надъ матеріалами.

Величина допустимой степени надежности была выяснена также помощію долговременнаго опыта и наблюденій надъ частями машинъ и сооруженій, выносившихъ на себѣ нагрузку при различныхъ условіяхъ.

Различаютъ въ практикѣ 3 разныхъ способа дѣйствія нагрузки:

1. Величина нагрузки постоянна. Это — довольно рѣдко встрѣчающійся случай нагруженія.

2. Нагрузка мѣняетъ свою величину въ предѣлахъ отъ O до нѣкоторой величины Q. Этотъ способъ воздѣйствія уже значительно менѣе выгоденъ для матеріала, чѣмъ предыдущій. При измѣненіяхъ нагрузки для сохраненія крѣпости тѣла необходимо, чтобы даже и наивысшая величина нагрузки не способна была вызвать остающихся деформацій. При такихъ условіяхъ, по опытамъ *Bauschinger*, нагрузка можетъ измѣнять свою величину отъ 5 до 16 милліоновъ разъ и все еще не вызвать разрушенія тѣла. Принимаютъ, по опытамъ *Woehler*, что для

желѣза разрушающее напряженіе во 2-мъ случаѣ составляетъ *двѣ трети* отъ разрушающаго напряженія въ 1-мъ случаѣ.

3. Нагрузка мѣняетъ и свою величину, и свой знакъ, т. е. измѣненіе нагрузки можетъ происходить отъ $(+Q)$ до $(-Q)$, переходя чрезъ O. Въ видѣ примѣра подобнаго нагруженія можно указать шатунъ насоса, паровой машины и пр., который растягивается при движеніи поршня въ одномъ направленіи и сжимается при обратномъ движеніи.

Этотъ способъ нагруженія считается наиболѣе опаснымъ изъ всѣхъ, особенно если нагрузка передается каждый разъ съ ударами.

По опытамъ *Woehler* оказывается, что въ опасномъ сѣченіи тѣла достаточно вызвать напряженіе въ *одну треть* отъ того, при которомъ тѣло разрушалось въ 1-мъ случаѣ, и эта треть въ состояніи будетъ уже разрушить тѣло, дѣйствуя третьимъ способомъ; а при существованіи ударовъ достаточно даже и *одной пятой* отъ напряженія, разрушающаго тѣло въ 1-мъ случаѣ.

Для выясненія способа продолжительнаго воздѣйствія перемѣнныхъ нагрузокъ на тѣло опыты были сдѣланы экспериментаторами *Woehler*, *Spangenberg*, а въ послѣднее время *Bauschinger*, *Tetmajer*, *Martens*.

Составляя сужденіе о пригодности даннаго матеріала для практическихъ цѣлей, опредѣляютъ для него всегда разрушающее напряженіе при постоянной величинѣ нагрузки.

Употребляя же этотъ матеріалъ въ дѣло, величину допускаемаго при тѣхъ или другихъ условіяхъ напряженія ставятъ въ зависимость отъ выбора степени надежности постройки; а эту послѣднюю величину берутъ равною тому или другому числу въ зависимости отъ способа дѣйствія силъ.

Пусть N_0 — разрушающее напряженіе,
N — допускаемое напряженіе и
Φ — степень надежности постройки.

Тогда

$$N = N_0 : \Phi \qquad \qquad 1.$$

Принимая во вниманіе опыты съ дѣйствіемъ перемѣнныхъ нагрузокъ, допускаютъ въ практикѣ для металлическихъ частей при выборѣ степени надежности слѣдующія цифры:

Нагрузка постоянна	Нагрузка мѣняетъ величину	Нагрузка мѣняетъ величину и знакъ
$\Phi = 3 - 4.$	$\Phi = 5 - 6.$	$\Phi = 10 - 15.$

При разсчетѣ частей машинъ и сооруженій допускается увеличеніе Φ противъ данныхъ этой таблицы.

Подобное увеличеніе *Φ* особенно умѣстно дѣлать въ тѣхъ случаяхъ, когда величина разсчетной нагрузки можетъ быть выяснена только приближенно, когда поломка разсчитываемой части можетъ повлечь за собою несчастія съ людьми, когда разсчитываемая часть подвержена изнашиванію, когда отъ нея требуется особенно малая деформація въ работѣ и т. д.

Удовлетворяя условію дешевизны той или другой разсчитываемой части, стремятся одновременно и къ уменьшенію ея вѣса, и къ уменьшенію стоимости ея обработки, сборки, установки, перевозки и т. п.

Уменьшеніе вѣса разсчитываемой части можетъ послѣдовать только путемъ употребленія въ дѣло матеріала наилучшихъ качествъ и путемъ возможно болѣе точнаго выясненія величины напряженія, появляющагося въ опасномъ сѣченіи отъ данной нагрузки, а также и путемъ выясненія величины деформаціи, сопровождающей проявленіе допущеннаго при разсчетѣ напряженія.

Сопротивленіе тѣлъ растяженію.

А. Растяженіе тѣла съ горизонтальной осью.

6. **Деформированіе растянутаго призматическаго тѣла.** Пусть имѣетъ призматическое тѣло, его ось AB (фиг. 1) — горизонтальна, форма поперечнаго сѣченія произвольна. Предположимъ, что на основанія A и B призмы дѣйствуетъ одинаковая по величинѣ, но различная по направленію, нагрузка P. Такая нагрузка привести тѣло въ движеніе не можетъ, но начнетъ его деформировать, увеличивая его длину l на величину λ, которая называется *удлиненіемъ*.

Изслѣдуя явленіе растяженія опытнымъ путемъ, придаютъ испытуемому тѣлу правильно выполненную цилиндрическую или призматическую форму, намѣчаютъ на поверхности его рядъ продольныхъ линій и поперечныхъ, вычерчиваютъ на поверхности какія-либо геометрическія фигуры, составляютъ точный эскизъ всего начерченнаго на поверхности тѣла со всѣми размѣрами и затѣмъ подвергаютъ такимъ образомъ подготовленное тѣло воздѣйствію растягивающей нагрузки, направляя ее на тѣло *центрально*, т. е. по оси тѣла. Тогда упругая деформація тѣла происходитъ при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

1. Продольныя и поперечныя прямыя линіи, начерченныя на поверхности тѣла, не искривляются.

2. Разстояніе между поперечными линіями замѣтно увеличивается, а между продольными едва замѣтно уменьшается.

3. Очертаніе поперечнаго сѣченія нагруженнаго призматическаго тѣла или цилиндрическаго сохраняетъ свой видъ, но измѣняетъ размѣры, хотя и въ очень слабой степени, т. е. цилиндръ, напр., и послѣ вытягиванія его остается также цилиндромъ съ нѣсколько уменьшеннымъ только діаметромъ. Измѣненіе размѣровъ поперечнаго сѣченія при вытягиваніи его происходитъ въ такой слабой степени, что, говоря о величинѣ нагрузки, безопасной для растягиваемаго цилиндра, можно вовсе не обращать вниманія на сокращеніе поперечныхъ размѣровъ тѣла. Тѣмъ не менѣе, если до вытягиванія призмы фигуры $abcd$ и $efgh$ (фиг. 1) были квадраты, то послѣ вытягиванія мы найдемъ, что сторона cd дѣлается болѣе ad и діагональ eg болѣе fh.

4. Если на поверхности тѣла до вытягиванія его начертить рядъ поперечныхъ линій на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга, то и при

нагруженіи его равенство взаимныхъ разстояній не нарушается, т. е. каждая изъ размѣченныхъ частей тѣла вытягивается одинаково, или иначе, *удлиненіе призмы будетъ пропорціонально ея длинѣ.*

5. Измѣняя величину нагрузки на тѣло, получаютъ и различную величину удлиненія *л*. Строгая пропорціональность между величинами нагрузки и удлиненія сохраняется только до тѣхъ поръ, пока удлиненіе *л* будетъ *упругимъ*, или *исчезающимъ* по удаленіи нагрузки. Когда же величина нагрузки будетъ такова, что отъ дѣйствія ея будетъ получаться удлиненіе, состоящее изъ двухъ частей — *упругой* и *остающейся*, тогда полныя величины удлиненій начинаютъ быстро возрастать, и въ случаѣ вытягиванія металлическаго бруска деформаціи возрастаютъ быстрѣе нежели нагрузки.

6. Одинаково нагружая призматическіе бруски, имѣющіе различную величину площади поперечнаго сѣченія, получаютъ для нихъ разныя удлиненія; *величины ихъ обратно пропорціональны площадямъ сѣченій*; при большой разницѣ въ формѣ и размѣрахъ площади сѣченія это свойство будетъ выполняться лишь приближенно.

Пусть обозначаютъ:

P — нагрузку въ кг.

F — площадь поперечнаго сѣченія въ кв. мм.,

l — всю длину тѣла въ мм.,

л — удлиненіе тѣла на длинѣ l въ мм.

Тогда соединеніе опытныхъ данныхъ, выражаемыхъ пунктами 4, 5 и 6, приведетъ насъ къ формулѣ:

$$л = к. \frac{l.P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2},$$

гдѣ *к* будетъ нѣкоторый коэф. пропорціональности, завısящій отъ рода матеріала, изъ котораго сдѣлано тѣло.

7. **Уравненіе напряженій**. Приведенныя выше данныя позволяютъ сдѣлать предположеніе, что нагрузка P равномѣрно распредѣляется между всѣми элементами площади основаній A и B, и что явленіе вытягиванія происходитъ так. обр., какъ будто-бы все тѣло состояло изъ тонкихъ однообразныхъ призматическихъ нитей или волоконъ, одинаковымъ образомъ нагруженныхъ, одинаковымъ образомъ деформирующихся и одинаковымъ образомъ сопротивляющихся деформированію.

Если раздѣлимъ нагрузку P на величину площади основанія F, то получимъ напряженіе H, съ которымъ дѣйствуетъ нагрузка на основанія призмы:

$$\frac{P}{F} = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{3}.$$

Напряженіе это, очевидно, надо назвать *нормальнымъ*, т. к. перемѣщенія точекъ, лежащихъ въ плоскости основаній, происходятъ по направленію оси тѣла, т. е. по направленію, перпендикулярному къ основаніямъ призмы.

Найдемъ теперь *ур-іе напряженій* для произвольной точки тѣла. Послѣ того какъ деформація тѣла совершилась, и равновѣсіе между нагрузкою и внутренними силами установилось, представимъ себѣ призму какъ бы разсѣченною произвольною поперечною плоскостью C на двѣ части AC и BC, не нарушая ихъ равновѣсія. Чтобы достигнуть послѣдняго, разсматривая, напр., равновѣсіе части BC, мы должны будемъ въ плоскости C представить себѣ каждый изъ элементовъ площади нагруженнымъ совершенно такъ же, какъ и въ плоскости B, только въ обратномъ направленіи, т. е. совокупность всѣхъ внутреннихъ элементарныхъ силъ, дѣйствующихъ въ плоскости C, должна быть равна P, распредѣленіе ея между всѣми элементами площади должно быть равномѣрнымъ, а направленіе дѣйствія внутреннихъ силъ д. б. таково, чтобы онѣ могли противодѣйствовать перемѣщенію части BC. Слѣд., и въ плоскости C распредѣленіе внутренней силы P между элементами площади будетъ выражаться тѣмъ-же ур-іемъ **3**. Но т. к. плоскость C была выбрана произвольно, поэтому и во всѣхъ другихъ поперечныхъ сѣченіяхъ тѣла нормальное напряженіе будетъ выражаться также формулою **3**, т. е. оно будетъ во всѣхъ точкахъ тѣла одинаково.

Отсюда вытекаютъ слѣдствія:

1. Горизонтальною нагрузкою растягиваемое призматическое тѣло опаснаго сѣченія не имѣетъ, или иначе, *всѣ сѣченія его равноопасны.*

2. Ур-іе нормальныхъ напряженій такого тѣла получается въ видѣ ф-лы **3**, т. е. дѣля нагрузку на площадь поперечнаго сѣченія и приравнивая частное напряженію матеріала.

Разсѣчемъ теперь наше тѣло наклонной плоскостью D (фиг. 1), дѣлающей съ осью бруса уголъ β, и разсмотримъ равновѣсіе части BD. Вынесемъ плоскость D на отдѣльный чертежъ (фиг. 2). Пучекъ нагрузки p, дѣйствующей въ плоскости B, вызоветъ на плоскости D существованіе такого же пучка внутреннихъ силъ, только въ обратномъ направленіи. Здѣсь онъ м. б. разложенъ на *2* новыхъ пучка q и r, гдѣ

$$q = p.\ Sin\ \beta;\ r = p.\ Cos\ \beta.$$

Пучекъ q вызываетъ нормальное напряженіе на поверхности mn, а пучекъ r — тангенціальное напряженіе. Если пучекъ p передается въ плоскости поперечнаго сѣченія на площадь $mk = f$, то слагающіе пучки q и r будутъ передаваться на величину площади mn (фиг. 2), гдѣ

$$mn = f : Sin\ \beta.$$

Если назовемъ нормальное напряженіе отъ пучка p въ поперечной плоскости чрезъ H, нормальное напряженіе отъ пучка q въ наклонной плоскости—чрезъ h и тангенціальное напряженіе отъ пучка r въ наклонной плоскости — чрезъ t, тогда будемъ имѣть:

$$H = \frac{P}{F} = \frac{p}{f}$$

$$h = q : \frac{f}{Sin\,\beta} = H.\,Sin^2\,\beta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathbf{4.}$$

$$t = r : \frac{f}{Sin\,\beta} = \frac{H}{2}.\;Sin\,2\,\beta \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathbf{5.}$$

Ф-ла **4** показываетъ, что нормальное напряженіе для элементовъ плоскости, наклоненной къ поперечному сѣченію, будетъ всегда менѣе, чѣмъ въ самомъ поперечномъ сѣченіи, поэтому наиболѣе напряженными и опасными будутъ поперечныя сѣченія тѣла, а не наклонныя.

Ф-ла **5** показываетъ, что тангенціальныя напряженія въ наклонныхъ плоскостяхъ всегда менѣе нормальнаго напряженія въ поперечномъ сѣченіи, и что въ самомъ невыгодномъ случаѣ, когда

$$\beta = 45^0 \ldots\ldots \qquad max\ t = \frac{H}{2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathbf{6.}$$

8. **Разсчетное ур-іе**. Изъ предыдущаго видно, что *max* нормальныхъ напряженій имѣетъ мѣсто въ поперечныхъ сѣченіяхъ тѣла (во всѣхъ въ одно и то же время), а *max* тангенціальнаго напряженія (см. ф-лу **6**) получается въ плоскостяхъ, дѣлающихъ съ направленіемъ дѣйствія нагрузки уголъ въ 45^0. Чтобы тѣло было достаточно крѣпко, необходимо чтобы оба эти *max*'ныя напряженія не превосходили допускаемой величины. Для металловъ и дерева оказывается достаточно, если такое условіе будетъ удовлетворено только относительно нормальныхъ напряженій, тогда относительно тангенціальныхъ напряженій оно само собою удовлетворится.

Назовемъ допускаемую величину нормальнаго напряженія при вытягиваніи горизонтальнаго бруса чрезъ Z и замѣнимъ этой величиной напряженіе H въ ур-іи напряженія, тогда мы получимъ *разсчетное ур-іе* въ слѣдующемъ видѣ:

$$Z = \text{или болѣе}\ \frac{P}{F} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathbf{7.}$$

Табл. 1. Данныя для сравненія нагрузокъ

Килограммы.	Метрическія тонны	РУССКІЕ. Фунты	РУССКІЕ. Пуды.	АНГЛІЙСКІЕ. Фунты.	АНГЛІЙСКІЕ. Тонны.
1	0,001	2,44190	0,06105	2,20461	0,00098
1000	1	2441,90	61,0475	2204,61	0,98420
0,40952	0,00041	1	0,025	0,90283	0,00040
16,3808	0,01638	40	1	36,1130	0,01612
0,45360	0,000454	1,10763	0,02769	1	0,000446
1016,06	1,01606	2481,09	62,0275	2240	1

Табл. 2. Данныя для сравненія площадей.

Мт.	КВАДРАТНЫЕ.				
	Сантим.	Дм	Фут.	Саж.	Арш.
1	10000	1550,06	10,7643	0,21968	1,97712
0,0001	1	0,15501	0,00108	0,000022	0,000198
0,00065	6,45137	1	0,00694	0,00014	0,00128
0,09290	928,994	144	1	0,02041	0,18367
0,55210	45521	7056	49	1	9
0,50579	5057,9	784	5,44444	0,11111	1

Въ такомъ видѣ эта формула **7** опредѣляетъ величину нормальнаго напряженія въ тѣлѣ и показываетъ, что оно м. б. или равно, или менѣе допускаемаго напряженія Z.

Величина *безопасной площади* поперечнаго сѣченія тѣла будетъ опредѣляться такъ:

$$F = \text{или болѣе } \frac{P}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{7,a.}$$

По этой ф-лѣ будетъ опредѣляться площадь сѣченія разсчитываемаго, т. е. строющагося тѣла.

Величина *безопасной нагрузки*, которую можно передать на тѣло данныхъ размѣровъ, опредѣлится изъ ф-лы:

$$P = \text{или менѣе } Z.\ F \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{7,б.}$$

По этимъ ф-ламъ ведется повѣрочный разсчетъ тѣла существующаго и разсчетъ тѣла строющагося. Чтобы производить такого рода разсчеты, необходимо знать, въ какихъ единицахъ мѣры выражается каждая изъ этихъ величинъ.

Табл. 3. Данныя для сравненія напряженій матеріала.

Килограммы на кв. мм.	Пуд. на кв. дм.	АНГЛІЙСКІЕ.		Атмосферы =760 мм. ртутн. столба.
		Фунты.	Тонны.	
		На квадратный дюймъ.		
1	39,384	1422,26	0,635	96,778
0,25391	1	36,1130	0,01612	2,45749
0,000703	0,02769	1	0,00045	0,06805
1,57494	62,0275	2240	1	166,042
103,05	0,40586	14,657	0,00654	1

Наиболѣе просто и скоро подобнаго рода разсчеты производятся въ метрической системѣ, когда нагрузка P выражается въ *кг.*, а площадь F — въ кв. *мм.*, тогда напряженіе Z будетъ выражено *въ кг. на кв. мм.*

Въ Англіи нагрузку принято выражать въ англ. фунтахъ (*lbs*) и тоннахъ (*tn*), а площадь — въ кв. *дм.*, тогда напряженіе выразится или *въ lbs. на кв. дм.*, или *въ tn. на кв. дм.*

Въ Россіи нагрузку выражаютъ въ *пуд.*, площадь — въ кв. *дм.*, тогда напряженіе выразится *въ пуд. на кв. дм.*

Данныя для перевода нагрузокъ, площадей и напряженій изъ однихъ мѣръ въ другія приведены въ таблицахъ 1, 2 и 3-й.

Для быстраго соображенія и грубыхъ подсчетовъ можно довольствоваться такими данными:

1 кг. на кв. мм. соотвѣтствуетъ приблизительно 40 пуд. на кв. дм.

9. **Величины допускаемыхъ напряженій.** Чтобы производить разсчеты по ф-ламъ **7,а,б,** надо имѣть подъ руками величины допускаемыхъ напряженій Z для различныхъ матеріаловъ и разныхъ условій передачи нагрузки. Въ нижеслѣдующемъ приведены величины Z въ кг. на кв. мм. для случая, когда измѣняется величина нагрузки и когда мѣняется и величина ея и знакъ.

Таблица 4-я.

Названіе матеріаловъ.	Величины Z въ кг. на кв. мм., когда мѣняется у нагрузки: величина	величина и знакъ
Чугунъ	2—2,5	1
Желѣзо	6—7,5	3
Желѣзная проволока	8—10	—
Сталь	9—10	4,5—5
Стальная проволока	30—50	—
Красная мѣдь	7—9	—
Фосфористая бронза	5—6	2,5—3
Пушечная бронза	2—2,5	1
Кожаный ремень	0,2—0,28	—
Пеньковый канатъ	1	—
Дубъ, сосна	1—1,25	0,5—0,6
Ель	0,7	—

Практическое рѣшеніе вопроса о крѣпости частей машинъ и сооруженій приводитъ большею частію къ разрѣшенію ф-лъ **7, 7 а, 7 б** по знаку неравенства.

Степень допускаемой точности вычисленій можетъ быть охарактеризована слѣдующими данными:

1) Напряженіе, выражаемое въ кг. на кв. мм., высчитывается, кончая 2-мъ десятичнымъ знакомъ.

2) Нагрузка въ кг. высчитывается съ 1 десятичнымъ знакомъ.

3) Размѣры поперечнаго сѣченія даются въ цѣлыхъ мм. (или цѣлымъ числомъ шестнадцатыхъ долей дюйма).

10. **Задачи. № 1.** Сосновый квадратный брусъ (фиг. 3) задѣланъ въ стѣну, на свободномъ концѣ къ нему приложена нагрузка $P=10.000$ *кг.* Опредѣлить размѣры бруса и его вѣсъ, предполагая длину его $l=4$ *мт.*?

Случалось слышать отвѣтъ, что такой брусъ будетъ менѣе опасенъ, чѣмъ брусъ, работающій въ условіяхъ фиг. 1, п. ч. тамъ нагрузка дѣйствуетъ на оба конца бруса, а здѣсь—на один конецъ. Если бы съ этимъ согласиться, нужно было бы утверждать, что на фиг. 1 часть BC менѣе опасна, чѣмъ весь брусъ AB.

Примемъ $Z=1$ *кг.* на 1 кв. *мм.*, тогда по ф-лѣ **7a** получимъ

$$F=10000 \text{ кв. } мм. = x^2,$$

откуда сторона квадрата

$$x=100 \text{ мм.}$$

Объемъ бруса будетъ

$$0,1 \,.\, 0,1 \,.\, 4 = 0,04 \text{ куб. мт.}$$

Принимая уд. вѣсъ сосны 0,6, вѣсъ 1 куб. *мт.* ея, найдемъ равнымъ 600 *кг.*, а вѣсъ нашего бруса—24 *кг.*

№ 2. Замѣнить предыдущій брусъ желѣзнымъ, сдѣланнымъ изъ круглаго прокатнаго желѣза, и опредѣлить его вѣсъ.

Примемъ $Z=7,5$ *кг.* на кв. *мм.*, тогда

$$F=\frac{10000}{7,5}=1333,3 \text{ кв. мм.}$$

$$d=41,2 \text{ мм.} = 1^5/_8 \text{ дм.}$$

По таблицамъ прокатнаго завода погонный футъ стержня въ $1^5/_8$ *дм.* вѣситъ 7,77 фунта, поэтому стержень въ 4 *мт.* длины будетъ вѣсить

$$\frac{4 \,.\, 3,28 \,.\, 7,77}{2,44} = \text{ок. } 41 \text{ кг.}$$

№ 3. Цѣпь *Галля,* изображенная на фиг. 4 въ натур. вел., предназначается для груза въ 1000 *кг.*, и погонный *mt* ея вѣситъ 3,8 *кг.* Съ какимъ напряженіемъ цѣпь будетъ работать?

Въ сѣченіи kl высота звена $= 17$ *mm.*, а въ сѣченіи mn, за вычетомъ 10 *мм.* на отверстіе, высота живого сѣченія звена будетъ 26—10, или 16 *мм.* Такимъ образомъ опаснымъ сѣченіемъ цѣпи на растяженіе надо считать сѣченіе mn. Въ этомъ сѣченіи работаютъ 4 звена съ толщиною по 2 *мм.* каждое. Поэтому площадь разсчетнаго сѣченія цѣпи будетъ:

$$F = (26-10) . 4 . 2 = 128 \text{ кв. } мм.$$

Рабочее напряженіе будетъ

$$H = \frac{1000}{128} = 7{,}81 \text{ кг. на кв. } мм.,$$

или ок. 310 пуд. на кв. *дм.*

№ 4. Желѣзный брусъ ab (фиг. 5) посредствомъ системы веревочныхъ тягъ передаетъ воспринимаемое имъ давленіе на узлы e и f.

Длины

$$ac = ce = cd = db = df = 1 \; mt,$$

$$\text{длины } ab = ef = 2 \; mt.$$

Во всѣхъ узлахъ a, b, c, d, e, f—шарнирныя соединенія. Всѣ веревочные элементы ac, bd, cd, df, и ce имѣютъ діам. въ 1 дм. Опредѣлить величину безопасной нагрузки, которую можно прикладывать къ брусу ab и передавать на систему веревочныхъ тягъ?

Проводя dh перпендидулярно къ ab, найдемъ $bh = 0{,}5 \; mt$. Тогда

$$Cos \; \beta = \frac{bh}{bd} = 0{,}5,$$

т. е. уголъ dbh, а также и углы при точкахъ a, e и f будутъ по 60^0, а при точкахъ c и d по 120^0.

Называемъ искомую безопасную нагрузку чрезъ $2P$, тогда на узелъ a будетъ передаваться P. Разложимъ ее при узлѣ a на двѣ составляющія Q и R, тогда

$$Q = \frac{P}{Sin \, 60^0} = \frac{P}{0{,}866} = 1{,}155 . \, P$$

Перенося нагрузку Q изъ узла a въ узелъ c и раскладывая ее здѣсь на двѣ составляющія—вдоль cd и ce, найдемъ, что обѣ онѣ будутъ одинаковы и равны Q, т. е. всѣ 3 веревочныхъ элемента при узлѣ c будутъ одинаково натянуты; то же самое происходитъ и при узлѣ d.

Так. обр. разсчетная сила для каждаго изъ веревочныхъ элементовъ будетъ $1{,}155 \; P$.

Если діам. веревки $d = 1$ *дм.* $= 25{,}4$ *мм.*, то площадь круга съ такимъ діам. будетъ 506,7 кв. *мм.* Истинную величину *рабочей площади* веревки принимаемъ въ $^3/_4$ отъ теоретической, т. е. $506{,}7 . \, 0{,}75 = 380$ кв. *мм.*

Примемъ $Z = 1$ *кг.* на кв. *мм.*, тогда разсчетное ур-іе веревочнаго элемента будетъ

$$1{,}155.\ P = F.\ Z = 380,$$

$$P = 0{,}866\ .\ 380 = 329\ \text{кг.},$$

а потому безопасная нагрузка на брусъ *ab* можетъ быть принята равной 2.329, или 658 *кг.*

№ 5. Если въ предыдущемъ примѣрѣ веревка *cd* будетъ удалена, на сколько измѣнится безопасная нагрузка?

Измѣненіе нагрузки, при тѣхъ же размѣрахъ веревки, послѣдуетъ, очевидно, въ отношеніи Q къ P (фиг. 5), т. е. нагрузка можетъ быть повышена тогда на $15{,}5^0/_0$.

№ 6. Выяснить относительное достоинство наиболѣе употребительныхъ строительныхъ матеріаловъ, принимая во вниманіе не только ихъ крѣпость, но также и вѣсъ употребленнаго въ дѣло матеріала?

Для этого возьмемъ отношеніе безопасной нагрузки прочно построеннаго тѣла къ вѣсу на единицѣ его длины и назовемъ это отношеніе *приведенной безопасной нагрузкой*, или *относительной б. н.*

Назовемъ вѣсъ единицы объема матеріала чрезъ γ, тогда приведенная безопасная нагрузка выразится такъ:

$$A = \frac{F.\ Z}{F.\ l.\ \gamma}$$

Внесемъ въ это выраженіе вмѣсто γ — вѣсъ 1 куб. *мт.* матеріала; тогда, полагая, что Z выражено въ *кг.* на кв. *мм.* и удѣльный вѣсъ матеріала есть δ, получимъ:

$$A = \frac{Z.\ 1000000}{\delta.\ 1000} = 1000.\frac{Z}{\delta}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 8.$$

Сравнительныя данныя можно свести въ слѣдующую таблицу:

Таблица 5-я.

Названія матеріаловъ.	Z	δ	A	Относительныя величины Z.
Желѣзо сварочное и литое .	7,55	7,55	1000	15
Сталь и желѣзная проволока.	10	7,8	1282	20
Стальная проволока	50	7,8	6410	100
Чугунъ	2,5	7,2	347	5
Сосна	1,2	0,6	2000	24
Дубъ	1,1	0,8	1375	22
Ель	0,7	0,7	1000	14

Данныя этой таблицы показываютъ, что дерево, какъ строитель-

ный матеріалъ, по величинѣ своей относительной сопротивляемости не уступаетъ не только желѣзу, но даже и стали.

При сужденіи объ этихъ цифрахъ нужно имѣть еще въ виду, что допускаемыя напряженія для металловъ взяты при степени надежности $\phi =$ отъ 5 до 6, а для древесныхъ породъ при $\phi =$ отъ 10 до 12.

№ 7. Подобнымъ же образомъ, какъ въ предыдущей задачѣ, сравнить между собою крѣпость и вѣсъ желѣзной цѣпи и канатовъ— пеньковаго, желѣзнаго и стального.

По таблицамъ *Trautwine* (*The civil engineer's pocket-book*, 1893, pg. 413—414) подберемъ размѣры канатовъ и цѣпей для разрушающаго груза въ 66000 *lbs*.

Канаты и цѣпи.	Діам. каната или звена въ дюйм.	Вѣсъ погонн. фута въ *lbs*.
Стальной канатъ на 66000 *lbs*. . .	1	1,58
Желѣзный " " . .	$1^3/_8$	3,00
Пеньковый " на 68544 " . .	$3^{13}/_{16}$	4,75
Желѣзная цѣпь на 73114 " . .	$1^1/_4$	16,00
" " на 59226 " . .	$1^1/_8$	12,50

Цифры послѣдней колонны показываютъ намъ, насколько нераціонально употребляется желѣзо, какъ матеріалъ, при выдѣлкѣ изъ него издѣлія въ видѣ цѣпи.

11. **Коэффиціентъ упругости матеріаловъ при растяженіи.** Пусть имѣемъ два бруска A и B (фиг. 6) изъ одного и того же матеріала, но съ различной площадью сѣченія. При измѣреніи удлиненія можно ихъ нагружать одною или различными силами, и самую деформацію можно измѣрять на одной и той же длинѣ или на разной.

а. Нагружая бруски A и B одинаковой нагрузкой P_1 и мѣряя удлиненіе на одной и той же длинѣ l_1, положимъ, что брусокъ A даетъ удлиненіе λ_1, а брусокъ B — λ_2; тогда эти деформаціи будутъ обратно пропорціональны площадямъ сѣченій брусковъ, т. е.

$$\lambda_1 : \lambda_2 = F_2 : F_1.$$

б. Нагружая брусокъ B нагрузкой P_1, мы имѣли у него удлиненіе λ_2, а нагрузивъ его силою P_2, вызовемъ у него удлиненіе λ_3. Обѣ эти величины будутъ прямо пропорціональны нагрузкамъ, т. е.

$$\lambda_2 : \lambda_3 = P_1 : P_2.$$

в. Когда брусокъ B былъ нагруженъ нагрузкою P_2, у него можно было измѣрить удлиненіе на всей его длинѣ l_1 или только на части ея l_2; въ 1-мъ случаѣ удлиненіе было λ_3, а во 2-мъ оно будетъ λ_4; оба они будутъ прямо пропорціональны длинамъ бруска, т. е.

$$\lambda_3 : \lambda_4 = l_1 : l_2.$$

Перемножая 3 послѣднія равенства, мы получимъ отношеніе $л_1$ къ $л_4$, т. е. отношеніе деформацій двухъ одинаковаго матеріала брусковъ, у которыхъ всѣ остальныя величины различны — и длина, и площадь сѣченія, и нагрузка:

$$\frac{л_1}{л_4}=\frac{F_2}{F_1}\cdot\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{l_1}{l_2}, \text{ или}$$

$$\frac{P_1\cdot l_1}{F_1\cdot л_1}=\frac{P_2\cdot l_2}{F_2\cdot л_4}=const.=E \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{9}.$$

Формулы **9** и **2**, очевидно, тождественны, а величины k и E— обратныя одна другой.

Отношеніе $л : l = i$, т. е. отношеніе удлиненія бруска къ первоначальной его длинѣ называется *вытяжкой* или *относительнымъ удлиненіемъ*. Если, напр., $i=0{,}135$, это значитъ, что брусокъ отъ дѣйствія нѣкоторой нагрузки далъ удлиненіе, составляющее 13,5% отъ его первоначальной длины.

Внося въ ф-лы **2** и **9** значенія вытяжки и напряженія (ф-ла 3), получимъ

$$\left.\begin{aligned} E&=\frac{H}{i}=1:k \\ k&=\frac{i}{H}=1:E \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{10}.$$

Величина E наз. *коэффиціентомъ упругости* или *модулемъ упругости*. Слѣдовательно, *коэф. упругости матеріала есть отношеніе напряженія матеріала къ его вытяжкѣ.*

Величина k наз. *коэф. растяженія* и представляетъ собою отношеніе вытяжки къ напряженію.

Необходимо замѣтить себѣ разъ на всегда, что равенство **10** явилось результатомъ производства испытаній *а*, *б* и *в* въ такой обстановкѣ, когда *всѣ деформаціи* $л_1$, $л_2$, $л_3$ *и* $л_4$ *у брусковъ были упругими и ни одна изъ прикладываемыхъ къ тѣлу нагрузокъ не вызывала у него остающихся удлиненій.*

Соотношеніе, выражаемое рав. **10**, столь естественно, что необходимость существованія его была предугадана и высказана *Гукомъ (R. Hoock)* еще въ 1678 г., поэтому рав. 10 и называютъ иногда *закономъ Гука.*

Графическое представленіе этого закона можно получить, вычерчивая *) на основаніи результатовъ опыта такъ наз. *діаграмму удлиненій* (фиг. 7). Выбравъ прямоугольныя оси координатъ, откладываютъ по оси абсциссъ величины вытяжки, и по оси ординатъ—соотвѣтственныя величины напряженій. Тогда кривая удлиненій принимаетъ видъ

*) Разрывныя машины, посредствомъ которыхъ дѣлаются испытанія для выясненія зависимости между нагрузкой и деформаціей, нерѣдко снабжаются самопишущимъ приборомъ, кот. автоматически чертитъ такую діаграмму.

кривой Omh. Часть Om этой кривой прямолинейна; pm представляетъ наивысшее напряженіе, еще не вызывающее постоянныхъ удлиненій, и точка m отмѣчаетъ *предѣлъ пропорціональности* между напряженіемъ и вытяжкой. Прежде употребляли въ этомъ случаѣ неправильный терминъ, говоря, что въ точкѣ m тѣло достигаетъ *предѣла упругости*.

На діаграммѣ удлиненій (фиг. 7) величина коэф. упругости является тангенсомъ угла mOi, который дѣлаетъ прямолинейная часть кривой удлиненій съ осью удлиненій.

Наибольшій практическій интересъ изъ всей кривой удлиненій представляетъ именно прямолинейная ея часть Om *). Ни одно изъ рабочихъ напряженій матеріала въ частяхъ машинъ и сооруженій никогда не должно превосходить наивысшей или предѣльной ординаты pm прямолинейной части этой діаграммы.

Если въ ф-лѣ **10** сдѣлаемъ $i=1$, т. е. $\lambda=l$, тогда $E=H$, т. е. если бы удлиненіе бруса возможно было получить равнымъ первоначальной длинѣ бруса, тогда въ поперечномъ сѣченіи его возникло бы напряженіе матеріала, равное коэф. упругости; но ни одинъ изъ существующихъ матеріаловъ не позволяетъ вызвать столь большого удлиненія.

Ф-ла **10** показываетъ, что коэф. упругости выражается въ тѣхъ же самыхъ единицахъ мѣры, какъ и напряженіе матеріала.

12. **Величины коэф. упругости E** (въ кг. на кв. *мм.*) для различныхъ матеріаловъ въ круглыхъ цифрахъ и величины *предѣльнаго напряженія* H_0 (въ кг. на кв. *мм.*), еще не вызывающаго остающихся удлиненій, приводятся въ таблицѣ 6-й.

Таблица 6-я.

Матеріалы.	ВЕЛИЧИНЫ.	
	E	H_0
	въ кг. на кв. *мм.*	
Желѣзо	20000	13—17
Литое желѣзо (*Flusseisen*)	21500	20—24
Литая сталь	22000	25—50
Пружинная сталь незакаленная	22000	40
„ „ закаленная	22000	75
Стальныя отливки	21500	20
Чугунъ . . . . отъ 7500 до	10500	нѣтъ
Красная мѣдь въ листахъ	11000	15
„ „ „ проволокѣ	12000	15

*) Чугунъ представляетъ исключеніе въ этомъ отношеніи. На его діаграммѣ удлиненій прямолинейная часть ея отсутствуетъ вовсе, и величина E у него уменьшается по мѣрѣ увеличенія напряженія.

Матеріалы.	ВЕЛИЧИНЫ.	
	E	H_0
	въ кг. на кв. *мм.*	
Пушечная бронза.	11000	3—9
Дэльта-металлъ	10000	18—25
Свинецъ (въ трубахъ)	700	1
Латунная проволока	9900	13
Фосфористая бронза.	9500	15
Кожаный ремень новый	12,5	—
„ „ работавшій.	22,5	1,5
Дерево вдоль волоконъ . . . . отъ 980 до .	1200	—
Алюминіева бронза Al—10%, Cu—90%. . .	—	18—27
„ „ „ $7^1/_2$% „ $92^1/_2$%. .	—	14,5
Марганцовистая бронза.	—	22

Въ таблицѣ приведены среднія округленныя цифры для величины коэф. упругости, которая вообще непостоянна и зависитъ отъ весьма многихъ причинъ:

а. Чѣмъ больше разница въ размѣрахъ сѣченій одного и того же вида и чѣмъ болѣе разница въ очертаніи сѣченій, тѣмъ болѣе можно наблюдать и разницу въ величинахъ E. При поставкѣ круглаго желѣза на стропильныя затяжки для вокзала въ Будапештѣ была найдена разница въ величинѣ E до *29*% въ брускахъ разнаго діаметра. Наибольшая толщина брусковъ была 103 $^m/_m$; разрѣзая ихъ на отдѣльные элементы и подвергая ихъ испытанію, обнаружили, что удѣл. вѣсъ у этихъ элементовъ измѣнялся въ предѣлахъ отъ *7,75* до *7,806*, разрывающее напряженіе — отъ *32,23* до *38,88* и коэф. упругости — отъ *17700* до *20800*. Вообще съ повышеніемъ уд. вѣса увеличивается также и величина E.

б. При отжиганіи металла величина коэф. упругости уменьшается.

в. При увеличеніи t-ры величина коэф. упруг. тоже уменьшается.

При $t = 20^0$ C для желѣза . . . . $E = 20700$.
„ 200^0 „ . . . . $= 19500$.
„ 300^0 „ . . . . $= 18800$.
„ 400^0 „ . . . . $= 17900$.
„ 500^0 „ . . . . $= 15100$.
„ 600^0 „ . . . . $= 13400$.

13. **Задачи. № 8**. Сравнить удлиненіе брусковъ въ 1 *mt* длины, приготовленныхъ изъ различныхъ матеріаловъ съ обычно допускаемыми въ нихъ величинами напряженій.

Общая ф-ла для опредѣленія удлиненія м. б. получена изъ ф-лы **2** или **9**:

$$\lambda = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{E} = \frac{Z.\,l}{E} \quad \dots\dots\dots\dots \mathbf{11.}$$

Для желѣза (см. тб. 5 и 6):

$$л = \frac{7,5 . 1000}{20000} = 0,375 \ ^m/_m.$$

Для стали

$$л = \frac{10}{22} = 0,455 \ ^m/_m.$$

Для стальной проволоки

$$л = \frac{50}{22} = 2,275 \ ^m/_m.$$

Для чугуна

$$л = \frac{2,5 . 1000}{10000} = 0,25 \ ^m/_m.$$

Для дубоваго бруса

$$л = \frac{1 . 1000}{1000} = 1 \ ^m/_m.$$

№ 9. Опредѣлить приращеніе напряженія, вызываемое въ желѣзномъ и чугунномъ брускѣ постоянной длины при пониженіи температуры ихъ на 1^0 C?

Примемъ коэф. линейнаго расширенія желѣза при измѣненіи t-ры на 1^0 C равнымъ

$$\frac{л}{l} = 0,0000123.$$

Тогда приращеніе напряженія при уменьшеніи t-ры на 1^0 C по ф-лѣ **11** выразится такъ:

$$Z = E . \frac{л}{l} = 20000 . \ 0,0000123$$

$$Z = 0,246 \text{ кг. на кв. мм.}$$

При измѣненіи t-ры отъ $(+30^0)$ до (-20^0), т. е. на 50^0 C, что вполнѣ возможно въ нашемъ климатѣ, приращеніе напряженія получимъ равнымъ

$$0,246 . \ 50 = 12,3 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Для чугуна приращеніе напряженія на 1^0 C получимъ равнымъ

$$10000 . \ 0,0000108, \text{ или}$$

$$0,108 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Этотъ примѣръ съ одной стороны показываетъ, насколько опасно и нераціонально дѣлать глухія скрѣпленія концовъ шпренгельныхъ балокъ, стропилъ съ затяжками *) и т. п. со стѣнами зданій.

Съ другой же стороны въ этомъ примѣрѣ мы находимъ указаніе средства для исправленія разъѣхавшихся стѣнъ зданія, для крѣпкаго стягиванія различныхъ частей машинъ посредствомъ надѣванія на нихъ нагрѣтыхъ предварительно анкерныхъ колецъ и т. п.

12. **Повтореніе вытяжки.** Удлиненіе отъ небольшой нагрузки получается почти сразу и представляетъ собою обыкновенно упругое, исчезающее удлиненіе; исключеніе въ этомъ случаѣ представляютъ только непросушенное дерево и литые металлы, которые даже и отъ небольшихъ нагрузокъ могутъ уже давать небольшія остающіяся удлиненія. Для кованыхъ и тянутыхъ полосъ, полученныхъ горячею прокаткою или холоднымъ волоченіемъ, почти мгновенное полученіе удлиненія имѣетъ мѣсто и при большихъ сравнительно нагрузкахъ, доходящихъ до $^1/_3$ отъ разрушающей.

Для практики имѣетъ большое значеніе вопросъ о повтореніи процесса вытяжки и о вліяніи его на свойства матеріала. Систематическое изученіе этого вопроса было начато *Герстнеромъ* и продолжено затѣмъ и многими другими экспериментаторами. Результаты этихъ изслѣдованій можно охарактеризовать такъ:

1. Всякая нагрузка вызываетъ въ брускѣ **всегда** *одно и то же* **упругое** *удлиненіе*, будетъ-ли приложена эта нагрузка къ такому бруску, который еще вовсе не подвергался растяженію, или же къ бруску, который уже былъ растягиваемъ и получилъ уже значительныя остающіяся удлиненія. Это свойство можно было наблюдать въ проволокахъ, когда нагрузка доходила даже до *0,8* отъ разрушающей и было уже получено отъ нея остающееся удлиненіе въ *5* разъ болѣе упругаго.

2. Когда брусокъ былъ вытянутъ нагрузкою вполнѣ, т. е. у него получилась уже вся величина и остающагося удлиненія, тогда при дѣйствіи нагрузокъ, меньшихъ наибольшей предыдущей, вызываются ими только одни упругія удлиненія, а на величину имѣющагося остающагося удлиненія такія нагрузки вліянія уже не оказываютъ.

При опытахъ проф. *В. Л. Кирпичева* надъ брусками изъ пушечной стали Пермскаго казен. зав. нагрузка доводилась до $^{12}/_{13}$ отъ разрушающей, но всѣ меньшія чѣмъ эта нагрузки давали всетаки одни только упругія удлиненія соотвѣтственной величины.

Так. обр. нагрузкою, до которой сохраняется еще пропорціональность между нею и упругимъ удлиненіемъ, является та наивысшая нагрузка, дѣйствіе которой уже испытывалъ на себѣ брусокъ. Если бы при 1-мъ нагруженіи бруска нагрузка была доведена только до величины Oq (фиг. 7), вызвавшей удлиненіе qs, тогда при вторичномъ нагруженіи

*) Инж Шуховъ для стропильныхъ тягъ употребляетъ въ подобныхъ случаяхъ *упругія стяжки*, позволяющія измѣнять длину тягъ и регулирующія величину давленія, передаваемаго тягѣ.

пропорціональность между нагрузкою и упругимъ удлиненіемъ сохранится въ предѣлахъ измѣненія нагрузки не только отъ нуля до *Оп*, но и отъ *Оп* до *qO*, т. е. новымъ предѣломъ пропорціональности будетъ уже *qO* и т. д.

Этимъ свойствомъ матеріаловъ пользуются въ практикѣ весьма часто. Когда не желаютъ при работѣ какой-либо части имѣть остающіяся удлиненія, передаютъ на нее нагрузку больше той, какую она будетъ выносить на себѣ въ работѣ, при этомъ будутъ вызваны и упругія, и остающіяся удлиненія, но затѣмъ въ работѣ будутъ проявляться уже только однѣ упругія деформаціи. Так. обр. предварительно вытягиваютъ, напр., передъ употребленіемъ въ дѣло широкіе приводные ремни, приводные и шахтные канаты; ту же цѣль имѣетъ такъ наз. *разстрѣливаніе* пушекъ, когда стѣнки ихъ работаютъ при давленіи, большемъ нормальнаго, и остающіяся деформаціи внутренняго канала будутъ вызваны уже ранѣе.

Существованіемъ предварительной вытяжки въ самомъ процессѣ обработки матеріала, очевидно, объясняется и то, почему у кованыхъ и прокатныхъ полосъ и проволокъ предѣлъ пропорціональности такъ высокъ, а у такихъ матеріаловъ, какъ литье, дерево, пускаемыхъ въ дѣло въ ихъ естественномъ видѣ, т. е. безъ предварительной вытяжки, остающіяся удлиненія получаются уже и при дѣйствіи слабыхъ нагрузокъ.

Искусственное повышеніе предѣла пропорціональности матеріала путемъ значительной предварительной вытяжки его, какъ оказывается изъ опытовъ, не только не уменьшаетъ разрушающаго матеріалъ напряженія, но даже увеличиваетъ его; но эта операція всегда дѣлаетъ матеріалъ въ дальнѣйшемъ менѣе податливымъ, менѣе тягучимъ, менѣе способнымъ выдерживать на себѣ внезапное прикладываніе къ тѣлу нагрузки и ударное ея дѣйствіе. Поэтому предварительное вытягиваніе въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ оно нужно, надо производить въ такой только мѣрѣ, въ какой это необходимо, не злоупотребляя податливостью матеріала.

15. **Сжатіе поперечнаго сѣченія при растяженіи.** Выше было упомянуто о существованіи явленія сжатія поперечнаго сѣченія призмы при ея вытягиваніи. Пока брусокъ получаетъ при вытягиваніи одни только упругія удлиненія, всѣ поперечныя сѣченія его сокращаются въ одинаковой мѣрѣ и въ общемъ весьма незначительно. Подобно тому, какъ мы высчитывали *вытяжку* продольнаго ребра призмы, можно опредѣлить также и *усадку* поперечнаго ея ребра. Пусть будутъ:

λ—удлиненіе продольнаго ребра призмы, растянутой вдоль ея оси,

l—длина ребра, къ которой относится удлиненіе,

$i = \lambda : l$—*вытяжка* продольнаго ребра,

λ_1—укороченіе поперечнаго ребра призмы,

l_1—длина поперечнаго ребра,

$i_1 = \lambda_1 : l_1$—*усадка* поперечнаго ребра.

Зависимость между упругой вытяжкой и усадкой для металловъ была найдена опытнымъ путемъ:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = i : m \\ \text{гдѣ } m = \text{отъ } \frac{10}{3} \text{ до } 4 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{12.}$$

Посмотримъ теперь, какъ велика ошибка, которая вводится въ вычисленіе, взявши при опредѣленіи напряженія по ф-лѣ **3** полную первоначальную площадь сѣченія вмѣсто дѣйствительной. Эту ошибку можно измѣрять отношеніемъ разности площадей первоначальной F и послѣдующей F_1 къ первоначальной площади, т. е. величиной

$$b = \frac{F - F_1}{F} = 1 - \frac{F_1}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{13.}$$

Очевидно, что

$$F_1 = F\,(1 - i_1)^2, \text{ или}$$

$$\frac{F_1}{F} = \left(1 - \frac{i}{m}\right)^2 = \left(1 - \frac{Z}{m.E}\right)^2$$

Т. к. отношеніе $Z:E$ представляетъ собою весьма малую правильную дробь, то квадратомъ этой величины въ слагаемомъ при единицѣ можно пренебречь; тогда, принявъ $m = 4$, найдемъ

$$\frac{F_1}{F} = 1 - \frac{2\,.\,Z}{4\,E}, \text{ откуда}$$

$$b = \frac{Z}{2\,E} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{13,a.}$$

Для дерева эту величину получимъ равной (см. табл. 5 и 6).

$$b = \frac{1}{2.1000} = \frac{1}{2000}$$

Для желѣза (табл. 5 и 6):

$$b = \frac{7,5}{2.20000} = \frac{1}{5333}$$

и для чугуна (табл. 5 и 6):

$$b = \frac{2,5}{2.10000} = \frac{1}{8000}$$

Эти величины указываютъ, что погрѣшность при вычисленіи напряженія будетъ совершенно ничтожна, и никакого практическаго значенія имѣть она не можетъ.

16. **Механическая работа, необходимая для воспроизведенія деформаціи тѣла.** а) *Случай спокойной передачи нагрузки на тѣло.* Когда нагрузка P уже передана на призматическое тѣло, во всѣхъ сѣченіяхъ его существуетъ одинаковое напряженіе H, опредѣляемое ф-лой **3**:

$$H = \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{3.}$$

На длинѣ l брусъ при этомъ получаетъ удлиненіе λ, которое выражается ф-лой **11**.

$$\lambda = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{11.}$$

Но когда нагрузка только еще начинаетъ передаваться на брусъ, въ его сѣченіяхъ напряженіе начинаетъ возрастать отъ нуля и доходитъ до H по мѣрѣ того, какъ совершается деформація. За весь періодъ полученія тѣломъ удлиненія λ внѣшняя нагрузка совершитъ работу $P.\ \lambda$, а силы упругости за тотъ же періодъ совершаютъ работу $\frac{F.\ H}{2}.\ \lambda$, п. ч. напряженіе въ это время возрастаетъ отъ нуля до H, и средняя его величина будетъ $\frac{H}{2}$. Найдемъ разность этихъ двухъ работъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ:

$$C = P.\ \lambda - \frac{H.\ F}{2}.\ \lambda = \frac{P.\ \lambda}{2} \quad \ldots\ldots \mathbf{14.}$$

Это выраженіе показываетъ, что будетъ еще существовать нѣкоторый избытокъ внѣшней работы въ то время, когда брусокъ уже получитъ удлиненіе λ. Свободный конецъ его будетъ перемѣщаться тогда съ нѣкоторою скоростью v, которая получится изъ ур-ія живыхъ силъ:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{P.\ \lambda}{2}, \text{ откуда}$$

$$v = \sqrt{g.\ \lambda}, \text{ или}$$

$$v = \sqrt{g \cdot \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{E}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{15.}$$

Брусъ, который въ концѣ вытяжки пріобрѣлъ скорость v, находится подъ дѣйствіемъ избытка живой силы C, которая будетъ стремиться вызвать дальнѣйшее его удлиненіе на величину λ_1, пока скорость перемѣщенія всѣхъ точекъ тѣла не сдѣлается равною нулю. Это добавочное удлиненіе бруса будетъ сопровождаться повышеніемъ въ немъ напряженія матеріала до величины H_1. Мы допускаемъ при этомъ, что напряженіе H_1 все еще не вызываетъ остающихся удлиненій, и что

при возрастаніи напряженія отъ H до H_1 все еще сохраняется пропорціональность между напряженіемъ и деформаціею.

Так. обр. удлиненіе бруса будетъ теперь $л + л_1$, причемъ длина $л_1$ будетъ пройдена точкою приложенія нагрузки подъ дѣйствіемъ избытка живой силы C при постепенномъ сокращеніи скорости отъ v до нуля. За все время измѣненія скорости сначала отъ o до v, а затѣмъ отъ v до o, сила P совершаетъ работу $P.(л + л_1)$, а напряженіе, возрастая отъ O до H_1, совершитъ соотвѣтственную же работу, т. е.

$$P.\ (л + л_1) = \frac{F.\ H_1}{2}.\ (л + л_1),\ \text{откуда}$$

$$H_1 = 2.\frac{P}{F} = 2H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{16},$$

т. е. *величина максимальнаго напряженія, вызываемаго въ поперечномъ сѣченіи тѣла во время спокойной передачи внѣшней нагрузки*, **вдвое болѣе** *того напряженія, съ которымъ тѣло будетъ работать, когда передача нагрузки уже совершится.*

Очевидно, что къ тому же самому результату мы придемъ и графически (фиг. 8), строя діаграмму работъ постояннаго давленія $F.\ H$, равнаго внѣшней нагрузкѣ, и діаграмму работъ перемѣнной силы упругости, измѣняющей свою величину пропорціонально удлиненію и достигающей наибольшей своей величины H_1. Чтобы площади обѣихъ діаграммъ были равновелики, для этого необходимо имѣть

$$л = л_1 \text{ и } H_1 = 2H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{16a}.$$

Величина работы силы упругости при вытягиваніи бруса на длину $л$ опредѣлялась ф-лой **14**. Внесемъ въ нее значенія P и $л$ изъ ф-лъ **3** и **11**:

$$C = \frac{P.\ л}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{P.\ l}{E.\ F},\ \text{или}$$

$$C = (F.\ H)^2.\frac{l}{2EF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2}{E}.\ F.\ l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{17}.$$

Эта ф-ла показываетъ, что *работа упругаго сопротивленія тѣла зависитъ отъ его объема и отношенія квадрата напряженія въ поперечномъ сѣченіи тѣла къ его коэф. упругости.*

Поэтому, если въ двухъ различныхъ брускахъ одного и того же матеріала мы будемъ доводить напряженіе до одной и той же величины H, работа упругаго сопротивленія тѣла будетъ зависѣть только отъ его объема и будетъ ему прямо пропорціональна.

Величины $H^2 : E$ будутъ таковы (см. табл. 5 и 6):

для ремня . . . . $\frac{(0{,}28)^2}{22.5} = \frac{1}{287}$

для желѣза . . . . . . $\frac{(7,5)^2}{20000} = \frac{1}{355,5}$

для дерева . . . . $\frac{(1,2)^2}{10000} = \frac{1}{700}$

для чугуна . . . . $\frac{(2,5)^2}{10000} = \frac{1}{1600}$

Эти цифры объясняютъ между прочимъ, почему столь сильное разрушительное дѣйствіе наблюдается каждый разъ при обрывѣ ремня.

б) *Случай внезапной передачи нагрузки на тѣло.* Если нагрузка до передачи ея на тѣло имѣла уже нѣкоторую живую силу $\frac{P}{g} \cdot \frac{v_0^2}{2}$, соотвѣтствующую работѣ $P.\,h$, тогда, работая въ новыхъ условіяхъ, нагрузка вызоветъ нѣкоторое новое удлиненіе λ_2 (фиг. 9), которое будетъ больше 2λ, и когда скорость перемѣщенія сдѣлается $= O$, напряженіе матеріала достигнетъ величины H_2, большей нежели H_1. Мы и здѣсь предполагаемъ, что въ это время пропорціональность между напряженіемъ и деформаціей все еще будетъ существовать, т. е. деформація тѣла будетъ упругою, исчезающею. Діаграмма работъ представится въ этомъ случаѣ фиг. 9-й, гдѣ площадь прямоугольника $abcd$ есть работа нагрузки, а площадь треугольника efc — работа силъ упругости. Обѣ эти площади д. б. равновелики, а равно — и площади, покрытыя штрихами:

$$P.\,(h + \lambda_2) = \frac{F.\,H_2}{2}.\,\lambda_2 \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{18.}$$

По закону *Гука:*

$$\lambda_2 = \frac{H_2.\,l}{E}, \text{ поэтому}$$

$$P.\,h + \frac{P.\,l}{E}.\,H_2 = \frac{F.\,H_2}{2} \cdot \frac{H_2.\,l}{E}, \text{ или}$$

$$H_2^2 - 2\,\frac{P}{F}.\,H_2 - 2\,\frac{P}{F} \cdot \frac{E.\,h}{l} = o$$

$$H_2 = \frac{P}{F} + \sqrt{\frac{P^2}{F^2} + 2\,\frac{P}{F} \cdot \frac{Eh}{l}}$$

$$H_2 = \frac{P}{F}\left[1 + \sqrt{1 + 2\,\frac{E.\,F}{P} \cdot \frac{h}{l}}\,\right] \quad \dots\dots \quad \mathbf{19.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что *наибольшее напряженіе, вызываемое при ударномъ дѣйствіи нагрузки, будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше живая сила до удара, и чѣмъ короче деформируемое тѣло.*

Принимая во вниманіе ф-лы **3** и **11**, можемъ написать:

$$\frac{H_2}{H}=\frac{л_2}{л}=1+\sqrt{1+2.\frac{h}{л}}=$$

$$=1+\sqrt{1+\frac{1}{л}.\frac{v_0^2}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{20.}$$

Если сдѣлаемъ $h=0$, тогда мы возвращаемся къ случаю *а)* и получаемъ

$$\frac{л_2}{л}=\frac{H_2}{H}=2, \text{ т. е.}$$

$$л_2=2л \text{ и } H_2=H_1.$$

Сравненіе разсмотрѣнныхъ двухъ случаевъ нагруженія *а* и *б* показываетъ, насколько болѣе невыгоднымъ для тѣла можетъ оказаться 2-й случай по сравненію его съ 1-мъ, и насколько осторожно всегда слѣдуетъ передавать нагрузку на тѣло, будетъ-ли это подъемъ груза, пусканіе машины въ ходъ, остановка ея и т. д. Въ особенности сильныя напряженія могутъ быть вызываемы при неосторожномъ, чрезмѣрно быстромъ пусканіи машины въ ходъ и внезапной остановкѣ ея.

Какой эффектъ въ подобныхъ случаяхъ дѣлаетъ на пути передачи усилія присутствіе тѣла съ весьма большимъ объемомъ, можно видѣть изъ слѣдующаго опыта инж. *Норре:* нужно взять толстую суровую нитку или тонкую веревку и разрѣзать ее на 2 части; одну изъ нихъ слѣдуетъ привязать къ бородкѣ большого ключа отъ двери (фиг. 10), а другой къ ручкѣ его; чтобы острые, незаправленные ребра бородки ключа не могли перерѣзать нитки или веревки, передъ привязываніемъ ихъ къ бородкѣ послѣднюю надо обернуть тряпкой или бумагой. Приборъ располагается въ такомъ положеніи, какъ показано на фиг. 10; конецъ *a* обертываются вокругъ лѣвой руки, а конецъ *b*—вокругъ правой; лѣвую руку держатъ въ приподнятомъ положеніи, выжидаютъ пока прекратится раскачиваніе ключа, и тогда правой рукой сильно дергаютъ за конецъ *b* по отвѣсному направленію, настолько сильно, чтобы гибкое тѣло оборвалось: обрывъ его всегда происходитъ въ части *b*, а не въ части *a*, на которую ударное дѣйствіе передается чрезъ массу ключа, имѣющаго весьма большой объемъ.

Этотъ опытъ указываетъ, насколько полезно въ паровыхъ приводныхъ и электрическихъ подъемныхъ кранахъ, работающихъ съ большой скоростью подъема груза, имѣть на рабочемъ концѣ цѣпи *массивный крюкъ*, разсчитанный съ большей надежностью, чѣмъ сама подъемная цѣпь. Столь же полезно ту часть цѣпи, которая никогда не навивается на воротъ и прилегаетъ непосредственно къ крюку, дѣлать болѣе толстою, чѣмъ остальная ея рабочая часть, навиваемая на барабанъ. Это будетъ способствовать сохраненію крѣпости цѣпи въ рабочей ея части и позволитъ не употреблять противовѣса возлѣ крюка, которымъ натягивается ненагруженная цѣпь.

17. **Опредѣленіе разрушающаго напряженія матеріала при растяженіи.** Напряженіе матеріала, при которомъ происходитъ разрывъ бруска, наз. *разрушающимъ напряженіемъ матеріала при растяженіи*, или *коэф. крѣпости*, или *временнымъ сопротивленіемъ матеріала*.

Совокупность всѣхъ предыдущихъ данныхъ относительно развитія работы упругаго сопротивленія показываетъ, что сравнимые между собою результаты при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ можно получить, только производя опыты въ совершенно одинаковыхъ условіяхъ относительно нагруженія, и что вообще самое нагруженіе д. б. производимо во-1-хъ, *центрально*, во-2-хъ *безъ ударовъ*, плавно и осторожно, чтобы не повліять неблагопріятно на крѣпость тѣла.

При опытахъ обращаютъ вниманіе не только на опредѣленіе коэф. крѣпости бруска, но также и на его тягучесть, упругую податливость. Съ этою послѣднею цѣлію опредѣляется вытяжка тѣла въ длину и сокращеніе его поперечнаго сѣченія. Имѣющіе въ практическихъ приложеніяхъ особенную цѣнность, мягкіе податливые матеріалы передъ самымъ разрывомъ начинаютъ давать въ наиболѣе слабомъ мѣстѣ большую вытяжку и весьма замѣтное суженіе сѣченія, *пережимъ*. На фиг. 11 *вверху* дана форма образца до его испытанія, а внизу—форма того же образца въ моментъ разрыва по сѣченію mn, когда уже образовался пережимъ ef.

Международнымъ соглашеніемъ инженеровъ выработана форма и размѣры *нормальнаго образца* для испытанія на разрывъ, представленные на фиг. 11 вверху: діаметръ образца—20 $^m/_m$, длина между утолщеніями на его концахъ 220 $^m/_m$, длина между отмѣтками a и b на образующей образца—$l=200$ $^m/_m$. За измѣненіями этой длины во время опыта и слѣдятъ непрерывно. Пусть, напр., при обрывѣ образца разстояніе между отмѣтками a и b достигло $l_1=250$ $^m/_m$ (фиг. 11 внизу), тогда полученная образцомъ вытяжка до разрыва въ процентахъ будетъ

$$i_1=100\cdot\frac{l_1-l}{l}=\frac{50}{200}\cdot 100=25\%$$

При особенно мягкихъ сортахъ желѣза и стали можно наблюдать вытяжку въ 30 и болѣе %.

Если первоначальная площадь образца была F, а при разрывѣ по сѣченію mn (фиг. 11) она будетъ F_1, тогда сокращеніе площади сѣченія въ %-хъ будетъ

$$u=100\cdot\frac{F_1-F}{F}$$

Въ мягкихъ сортахъ желѣза и стали эта величина бываетъ $=40\%$ и болѣе, а въ чугунѣ и жесткой стали она составляетъ небольшія только доли процента.

Если діаметръ образца приходится дѣлать менѣе 10 $^m/_m$, то и длина его соотвѣтственно д. б. менѣе.

Мартенсъ обращаетъ вниманіе на то, что *геометрически подобныя тѣла, сдѣланныя изъ одного и того же матеріала, при одинаковой обстановкѣ опыта и одинаковыхъ напряженіяхъ даютъ и геометрически подобныя деформаціи.* Поэтому для полученія одинаковой вытяжки у двухъ образцовъ изъ одного и того же матеріала требуется не только одинаковость размѣровъ d и l между отмѣтками a и b (фиг. 11), но и одинаковость длины l_0 между утолщеніями на концахъ образца. Въ случаѣ, когда нельзя имѣть $d = 20^m/_m$, и приходится испытывать образецъ съ площадью сѣченія F, тогда длины l и l_0, по даннымъ *Мартенса*, надо опредѣлять по формуламъ

$$l = 11,3\sqrt{F}$$

$$l_0 = 12,5\sqrt{F},$$

гдѣ длины—въ $^m/_m$, а площадь—въ кв. $^m/_m$.

Если образецъ приходится брать прямоугольнаго или квадратнаго сѣченія, то при длинѣ его $l = 200\ ^m/_m$, выбирается $F =$ отъ 300 до 500 кв. $^m/_m$.

Форма и сѣченіе образца на всемъ протяженіи его д. б. строго однообразны.

При прямоугольной формѣ сѣченія образцовъ обработка ихъ дѣлается лучше всего фрезованіемъ сразу нѣсколькихъ образцовъ, положенныхъ одинъ на другой; если же приходится такіе образцы строгать на узкой ихъ сторонѣ поперекъ, тогда 2 крайніе образца, наиболѣе поврежденные рѣзцомъ, или отбрасываются, или окончательно подправляются пилою.

При обработкѣ образца во время подготовки его къ испытанію весьма важно избѣжать нагрѣва металла и по возможности сохранить у него „корку", которая получается при прокаткѣ, отливкѣ и проковкѣ.

Кромѣ формы и размѣровъ образца, на результатъ опыта вліяетъ также и быстрота производства испытанія. При матеріалахъ, особенно тягучихъ (красной мѣди, мягкомъ желѣзѣ и стали), скорость вытяжки образца въ концѣ опыта непремѣнно д. б. понижена. При красной мѣди полная величина вытяжки достигаетъ часто 50% и болѣе отъ первоначальной длины, и значительная часть этой вытяжки получается именно въ концѣ опыта, если вести его правильно и достаточно медленно, чтобы въ минуту, по *Баушингеру*, получалось удлиненіе не болѣе 2% отъ первоначальной длины.

18. **Величины разрушающаго напряженія** приведены въ нижеслѣдующей таблицѣ 7-й; тамъ же дана вытяжка до разрыва въ % и величина напряженія, при которомъ начинается особенно быстрая вытяжка, или „теченіе" матеріала.

Таблица 7-я.

НАЗВАНІЯ МАТЕРІАЛОВЪ.	Разрывающее напряженіе въ кг. на кв. мм.	Вытяжка до разрыва въ %.	Текучесть начинается при напряженіи.
Желѣзо ǁ направленію прокатки.	33—40	10—12	22—28
„ ⊥ „ „	28—35	3—5	—
Литое желѣзо (*Flusseisen*) прокатн.	34—44	20—25	25—30
Литая сталь прокатная	45—100 и болѣе.	15—25	28 и болѣе; при жесткомъ матеріалѣ отсутствуетъ.
Пружинная сталь незакаленная .	75—90	12	—
„ „ закаленная.	80 и болѣе	4	—
Чугунъ	12—18	—	—
Ковкій чугунъ	42—49	1—3	—
Стальное литье	35—70	—	Какъ при литой стали.
Проволока изъ литого желѣза .	40—55	5	—
„ стальная	110—250	—	—
Красная мѣдь кованая	20—26	35—38	—
„ „ въ проволокѣ . .	40—70	—	—
Латунь	15	—	—
„ въ проволокѣ.	40	—	—
Пушечная бронза	30—32	—	—
Фосфористая бронза	40—28	—	—
„ „ въ проволокѣ.	32—72	—	—
Дэльта-металлъ литой.	34—37	—	—
„ „ прокатанный . .	50—62	12,5	33—38
Алюминіева бронза *Al*— 5,5% .	44	64	—
„ „ 8,5 . .	50	52	—
„ „ 9,0 . .	57,5	32	—
„ „ 9,5 . .	62	19	—
„ „ 10,0 . .	64	11	—
„ „ 11,0 . .	68	1,0	—
„ „ 11,5 . .	80	0,5	—
Марганцовистая бронза	37—48	—	—
Алюминій литой.	11	—	—
„ кованый	18—20	—	—
„ „ при 190° *C*.	8,7	—	—
Свинецъ	1,3	—	—
„ въ проволокѣ	2,2	—	—
Олово	3,5	—	—
Кожаный ремень	2,8—5,2	—	—
Пеньковый канатъ	3,5—6	—	—

НАЗВАНІЯ МАТЕРІАЛОВЪ.	Разрывающее напряженіе въ кг. на кв. мм.	Вытяжка до разрыва въ %.	Текучесть начинается при напряженіи.
Дубъ ‖ волоконъ.	10—11,5	—	—
„ ⊥ „	0,5	—	—
Ель ‖ „	8—9	—	—
„ ⊥ „	0,48	—	—
Сосна ‖ „	9—11	—	—
„ ⊥ „	0,48	—	—
Букъ ‖ „	13,4	—	—
Береза ‖ „	11	—	—
Кедръ ‖ „	5,5	—	—

19. **Вліяніе различныхъ факторовъ на величину крѣпости и вытяжки матеріала**. Опыты надъ опредѣленіемъ разрывающаго напряженія при различныхъ температурахъ особенно подробно и обстоятельно были произведены въ послѣднее время въ Берлинской механич. лабораторіи (*Mittheilungen aus den königl.-techn. Versuchsanstalten zu Berlin*, 1890, *H.* IV). Въ одномъ изъ характерныхъ примѣровъ явленіе происходило слѣд. образомъ: разрывающее напряженіе для бруска изъ литого желѣза при (-20^0) *C* было 41,2; при ($+20^0$) — 38,4, при $+50^0$ оказался *min*, равный 38,0; при 240^0 — 51,5, при 300^0 — 47,4, т. е. все еще на 23% болѣе чѣмъ при обыкновенной температурѣ, затѣмъ разрывающее напряженіе начинаетъ падать и достигаетъ 10,7 при 600^0 *C*. Величина вытяжки отъ (-20^0) до $+300$ уменьшалась отъ $33{,}8\%$ до 13%, а затѣмъ быстро увеличивалась, достигая 80% при 600^0 *C*.

Въ стали величина разрывающаго напряженія при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ зависитъ отъ процентнаго содержанія въ ней углерода. Если послѣдняя величина будетъ *C*, то, по даннымъ *Баушингера*, величина разрывающаго напряженія въ кг. на кв. $^m/_m$ будетъ

$$42\ (1 + C),$$

а въ *tn* на кв. дм. —

$$27{,}6\ (1 + C).$$

Холодное наклепываніе полосъ изъ красной мѣди и литого желѣза увеличиваетъ ихъ крѣпость, но уменьшаетъ ихъ упругую податливость. Отжиганіе матеріала возстановляетъ первоначальныя его свойства.

Просверливаніе на образцѣ отверстій, не нарушающихъ центральности передачи нагрузки, на крѣпость матеріала вліянія не оказываетъ въ смыслѣ ея уменьшенія.

Пробиваніе отверстій, хотя бы и не нарушающихъ центральности передачи нагрузки, ослабляетъ крѣпость матеріала и тѣмъ въ большей степени, чѣмъ матеріалъ обладаетъ меньшей мягкостью и чѣмъ дальше

отверстія расположены одно отъ другого. Въ желѣзныхъ листахъ и полосахъ ослабленіе крѣпости бываетъ на 15—20%, а въ стали—на 20—35%. Развертываніе отверстій послѣ ихъ пробиванія мало вліяетъ на измѣненіе крѣпости матеріала въ смыслѣ ея возстановленія; послѣднее достигается только отжигомъ матеріала послѣ пробивки въ немъ отверстій.

Выполненіе испытуемаго образца съ перехватомъ (фиг. 12) измѣняетъ величину коэф. крѣпости слѣд. обр.: по опытамъ *Киркальди*, крѣпость желѣзной полосы увеличивается отъ этого отъ 20 до 32% и тѣмъ болѣе, чѣмъ мягче желѣзо; въ мягкой стали увеличеніе крѣпости наблюдалось до 40%, а въ чугунѣ, наоборотъ, было обнаружено уменьшеніе крѣпости до 11,5%. Увеличеніе крѣпости у мягкихъ матеріаловъ объясняется въ такомъ случаѣ уменьшеніемъ вытяжки образца и отсутствіемъ работы нагрузки съ ускореніемъ; а уменьшеніе крѣпости чугуннаго образца съ проточкой на поверхности его м. б. объяснено нарушеніемъ внутренняго равновѣсія между частицами чугуна при образованіи у него проточки въ одномъ мѣстѣ. Сокращеніе площади поперечнаго сѣченія при разрывѣ образца съ проточкой получается, примѣрно, на 15—18% менѣе, чѣмъ у образца безъ проточки, т. е. у цѣлаго образца стали оно было, напр., 37,8%, а у образца съ проточкой оно будетъ 20%.

Характеристику литого желѣза (*Flusseisen*), какъ матеріала, со всѣми практическими подробностями относительно его испытанія и обращенія съ нимъ можно найти въ статьѣ инж.-техн. *И. Г. Гершуна* (*Бюлл. Политехн. О-ва*, № 1 за 1894—95 г.).

Въ табл. 7 не приведено данныхъ Z_0 для такихъ матеріаловъ, какъ известь, цементъ, камни и т. п., п. ч. эти матеріалы оказываютъ весьма слабое сопротивленіе растяженію, и въ этихъ условіяхъ ихъ обыкновенно не заставляютъ работать. Но лабораторные опыты и съ этими матеріалами дѣлаются большею частію на разрывъ, т. к. этотъ способъ испытанія является наиболѣе простымъ. Затвердѣвшіе образцы послѣ 28 дней пребыванія ихъ подъ водою даютъ слѣдующія величины Z_0 (въ *кг.* на кв. сантиметръ).

Чистый портландскій цементъ	65	*кг.* на кв *смт.*
Смѣсь 1 ч. его и 3 ч. песку	16	
Чистый романскій цементъ	20	
Смѣсь 1 ч. его и 3 ч. песку	10	
Смѣсь 1 ч. гидравл. извести и 3 ч. песку	6	

Б. Растяженіе тѣла съ вертикальной осью.

20. **Уравненіе напряженій.** Пусть имѣемъ призматическое тѣло съ вертикальной осью *hp* (фиг. 13) и пусть на нижнее сѣченіе его *ab* передается равномѣрно распредѣленная пагрузка *P*. Возьмемъ произвольное поперечное сѣченіе *cd*, отстоящее на разстояніи *x* отъ нижняго и разсмотримъ равновѣсіе части бруса *abdc* послѣ того, какъ нагрузка

уже деформировала тѣло, и оно пришло въ равновѣсіе. На сѣченіе cd по направленію внизъ дѣйствуютъ, очевидно, двѣ нагрузки — внѣшняя нагрузка P и собственный вѣсъ тѣла на длинѣ x. Его можно выразить такъ:

$$Q_x = F . x . \gamma,$$

если γ будетъ вѣсъ единицы объема матеріала. Потому для равновѣсія нижней части бруса въ сѣченіи cd по направленію вверхъ д. б. приложена сила

$$P + Q_x,$$

равномѣрно распредѣленная между всѣми элементами сѣченія. Напряженіе матеріала, вызываемое въ сѣченіи cd, будетъ

$$H = \frac{P + F . x . \gamma}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{21}.$$

Это и. будетъ ур-іе напряженій, т. к. оно выражаетъ зависимость между H и x въ произвольномъ сѣченіи бруса.

Ур-іе **21** представляетъ собою прямую линію knq (фиг. 13), отнесенную къ осямъ координатъ Hhx: по оси ординатъ откладываются разстоянія поперечныхъ сѣченій отъ нижняго, а по оси обсциссъ—величины напряженій. При $x = o$ получимъ

$$hk = P : F,$$

величину напряженія матеріала, одинаковую съ той, которая ф-лой **3** опредѣлялась для бруса съ горизонтальной осью.

Въ произвольномъ сѣченіи cd имѣемъ $H = mn$ и наконецъ въ сѣченіи ef при $x = l$ получимъ

$$max\ H = \frac{P + F . l . \gamma}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \textbf{21,a}.$$

Так. обр. видимъ, что у бруса съ вертикальной осью напряженія во всѣхъ его сѣченіяхъ различны, и что *max* напряженія получается въ самомъ верхнемъ сѣченіи, которое поэтому и будетъ *опаснымъ*.

21. **Разсчетное ур-іе**. Чтобы получить разсчетное ур-іе, надо написать ур-іе напряженій для опаснаго сѣченія, т. е. ур-іе **21,а**, и величину максимальнаго напряженія приравнять *допускаемому* напряженію Z при растяженіи. Тогда получимъ:

$$Z = \text{или болѣе}\ \frac{P + F . l . \gamma}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \textbf{22}.$$

При $\gamma = o$, т. е. если не обращать вниманія на собственный вѣсъ тѣла, это ур-іе будетъ тождественно съ **7**.

Величина *безопасной площади* сѣченія будетъ:

$$F = \text{или болѣе}\ \frac{P}{Z - l . \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \textbf{22,a}.$$

По этой ф-лѣ будетъ опредѣляться площадь сѣченія строющагося тѣла.

Величина *безопасной нагрузки*, которую можетъ воспринять на себя тѣло данныхъ размѣровъ, будетъ

$$P = \text{или менѣе } F.\ (Z - l.\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{22,б.}$$

По этимъ формуламъ ведется разсчетъ существующаго и строющагося тѣла съ вертикальной осью, испытывающаго растягивающую нагрузку.

Ф-лы **7**, **7 а** и **7 б** очень часто примѣняются къ разсчету и вертикальныхъ брусьевъ вмѣсто ф-лъ **22**, **22 а** и **22 б**, т. к. онѣ проще послѣднихъ и легче держатся въ памяти. При этомъ, слѣд., пренебрегаютъ вліяніемъ собственнаго вѣса и вносятъ въ вычисленіе небольшую ошибку. Посмотримъ, когда это можно дѣлать.

Пусть, напр., безопасная площадь сѣченія вертикальнаго бруса вмѣсто ф-лы **22 а** была разсчитана по ф-лѣ **7 а**. Разсчитывая по ф-лѣ **22 а**, можно взять для желѣзнаго бруса допускаемое напряженіе въ **7,5** *кг.* на кв. *мм.*, а производя разсчетъ по приближенной для вертик. бруса ф-лѣ **7 а** можно взять допускаемое напряженіе въ 7 *кг.* Слѣд., разницы въ вычисленіи по той и на другой ф-лѣ не получится вовсе, если взять

$$7 = 7.5 - l.\gamma$$

Отсюда опредѣлится длина бруса, до которой все еще можно пренебрегать вліяніемъ собственнаго вѣса. Принимая уд. вѣсъ желѣза 7,55, получимъ

$$\frac{l\ {}^{m}/_{m}.7,55}{1000000} = 0,5, \text{ откуда}$$

$$l = \text{ок. } 66\ mt.$$

Точно также, разсчитывая вертикальный сосновый брусъ по ф-лѣ **22 а**, можно взять допускаемое напряженіе въ 1,2 *кг.*, а ведя разсчетъ по ф-лѣ **7 а** можно взять $Z = 1{,}1$ *кг.*, и тогда никакой разницы въ разсчетѣ по обѣимъ ф-ламъ не получится еще при длинѣ бруса.

$$l = \frac{0,1.1000}{0,6}, \text{ или болѣе } 166\ mt.$$

Так. обр. видимъ, что *разсчетъ короткихъ вертикальныхъ брусьевъ безъ существенной погрѣшности* **всегда** *можно производить по ф-ламъ* **7**, **7 а**, **7 б**, т. е. не обращая вниманія на собственный вѣсъ тѣла.

22. **Задачи. № 10**. Вертикальный желѣзный брусъ съ данной площадью F и длиною $l = 300$ *mt*, работалъ съ нагрузкою P при напряженіи 6 *кг.* Не мѣняя ни размѣровъ сѣченія бруса, ни внѣшней нагрузки на него, требуется наростить брусъ въ длину, считая возможнымъ повышеніе напряженія матеріала до 6,5 *кг.* Спрашивается, на сколько длиннѣе можно сдѣлать брусъ?

Пусть новая длина бруса будетъ l_1. Тогда изъ ур-iя **22а**:

$$F = \frac{P}{6 - l.\gamma} = \frac{P}{6{,}5 - l_1.\gamma}, \text{ откуда}$$

$$(l_1 - l).\gamma = 0{,}5;\; l_1 - l = 66 \; mt.$$

№ 11. Вертикально подвѣшенная квадратная желѣзная штанга 60×60 $^m/_m$ длиною 300 *mt* разсчитывается съ напряженiемъ въ 7 *кг.* на кв. мм. Какова будетъ разница въ величинѣ безопасной нагрузки, если принимать во вниманiе собственный вѣсъ штанги и не принимать его?

Пренебрегая вѣсомъ штанги, получимъ нагрузку по ф-лѣ **7б**.

$$P = 7.60.60 = 25200 \; кг.$$

Точная же величина безопасной нагрузки найдется по ф-лѣ **22б**, гдѣ

$$l.\gamma = \frac{300000.7{,}55}{1000000} = 2{,}265$$

$$P_1 = 60.60\;(7 - 2{,}265) = 17046 \; кг.$$

№ 12. Формула **22а** показываетъ, что для каждаго матерiала существуетъ такая длина l бруса, при которой $F = \infty$. Опредѣлить для главнѣйшихъ матерiаловъ такую длину, называемую *предѣльной?*

По ф-лѣ **22а** предѣльная длина бруса опредѣлится такъ

$$l = Z : \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{23}.$$

Случалось слышать отвѣтъ, что предѣльная длина бруса — такая, при которой брусъ отъ данной нагрузки обрывается, какая бы площадь у него ни была. Это не вѣрно. На самомъ же дѣлѣ, предѣльная длина бруса, удовлетворяющая ф-лѣ **23**, это — такая длина, при которой *допускаемое въ матерiалѣ напряженiе получается уже отъ собственнаго вѣса*, безъ посторонней нагрузки. Выражая эту мысль, мы должны будемъ написать ур-iе крѣпости **22** при $P = 0$ въ слѣдующемъ видѣ:

$$F.l.\gamma = F.Z,$$

что тождественно съ ф-лой **23**.

Примемъ для сосноваго бруса $Z = 0{,}9$ *кг.* на кв. *мм.* и уд. вѣсъ $\delta = 0{,}6$, тогда

$$l = 0{,}9 : \frac{0{,}6}{1000} = 1500 \; mt.$$

Для желѣзной проволоки при $Z = 10$ и $\delta = 7{,}8$

$$l = 10 : \frac{7{,}8}{1000} = \text{около } 1280 \; mt.$$

Для стальной проволоки при $Z = 50$ и $\delta = 7{,}8$

$$l = \text{около } 6400 \; mt.$$

Если при сосновомъ брусѣ *рабочую* длину бруса возьмемъ равной

$^1/_3$ предѣльной, т. е. 500 *mt*, тогда на каждомъ 1 кв. *мм*. площади сѣченія освободится напряженіе

$$0,9 - \frac{500000 . 0,6}{1000000} = 0,9 - 0,3 = 0,6 \text{ кг.},$$

и соотвѣтственно этому можетъ быть навѣшена добавочная внѣшняя нагрузка сверхъ собственнаго вѣса при сохраненіи той же величины допускаемаго напряженія, что и ранѣе. Величина площади сѣченія F для данной нагрузки P будетъ опредѣляться тогда слѣд. обр.:

$$F = \text{или болѣе } P : 0,6.$$

№ 13. Опредѣлить длину бруса изъ даннаго матеріала, при которой онъ обрывается отъ собственнаго вѣса? Будемъ называть такую длину *критической* и обозначать чрезъ L. Если Z_0 будетъ разрывающее напряженіе, тогда при обрывѣ бруса будетъ существовать ур-іе:

$$F . L . \gamma = F . Z_0, \text{ откуда}$$

$$\left.\begin{array}{l} L . \gamma = Z_0 \\ L = Z_0 : \gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{24.}$$

Ф-ла **24** показываетъ слѣдующее:

а. Критическая длина бруса, какъ и предѣльная его длина, не зависитъ отъ площади сѣченія бруса по стольку, поскольку Z_0 и γ не зависятъ отъ нея; но обѣ эти величины, какъ извѣстно, зависятъ и отъ способа выработки матеріала, а сообразно съ этимъ, и отъ формы и отъ размѣровъ поперечнаго сѣченія.

б. Критическая длина бруса равна предѣльной его длинѣ, умноженной на число, выражающее степень надежности постройки.

Для желѣза въ видѣ тонкихъ сортовыхъ полосъ примемъ (см. тб. 5 и 7):

$$\delta = 7,55; \quad Z_0 = 40 \text{ кг. на кв. } {}^m/_m$$

$$L = 40 : \frac{7,55}{1000000} \; {}^m/_m = \text{около } 5300 \; mt.$$

Для желѣзной цѣпи *Галля* (фиг. 4), разсчитанной въ задачѣ *№ 3*, вѣсъ погоннаго *мт*. былъ указанъ въ 3,8 *кг*. Примемъ для нея $Z_0 = 38$ *кг*. на кв. $^m/_m$; на живое сѣченіе цѣпи, указанное въ зад. № 3 равнымъ 128 кв. $^m/_m$, придется разрывающая нагрузка въ 128×38 *кг*., поэтому

$$L = 128 . 38 : 3,8 = 1280 \; mt.$$

Сравненіе этой цифры съ предыдущей показываетъ, насколько вообще нераціонально употребляется матеріалъ въ издѣліи цѣпи *Галля*.

Чтобы получить критическую длину для обыкновенной цѣпи и для канатовъ изъ разнаго матеріала, воспользуемся данными, приведенными въ задачѣ № 7. Тамъ приведены для каждаго случая величина груза, разрывающаго канатъ или цѣпь, и вѣсъ погоннаго фута ихъ; обѣ ве-

личины выражены въ *lbs*; дѣля одну величину на другую, мы получимъ, очевидно, критическую длину, выраженную въ футахъ. *)

Для желѣзной цѣпи съ діам. звена въ $1^1/_8$ д. имѣемъ (см. зад. № 7):

$$L = \frac{59226}{12{,}5} = 4738 \text{ фут.} = 1445 \ mt.,$$

Для пеньковаго каната діам. $3^{13}/_{16}$ разрывающій грузъ данъ въ 68544 *lbs*, а вѣсъ погон. фута 4,75 *lbs* (см. зад. № 7), поэтому

$$L = \frac{68544}{4{,}75} = 14430 \text{ фут.} = \text{ок. } 4400 \ mt.$$

Для желѣзнаго каната діам. $1^3/_8$ д. разрывающій грузъ мы имѣли въ 66000 *lbs* (см. зад. № 7), а вѣсъ пог. фута каната $= 3$ *lbs*, поэтому

$$L = \frac{66000}{3} = 22000 \text{ фут.} = 6710 \ mt.$$

Для стального каната діам. 1 д. разрывающій грузъ былъ данъ также 66000 *lbs* (см. зад. № 7), а вѣсъ погон. фута каната $= 1{,}58$ *lbs*, а потому

$$L = \frac{66000}{1{,}58} = 41772 \text{ фут.} = 12740 \ mt.$$

Стальной канатъ завода *Felten & Guillaume* толщ. 35 $^m/_m$, изготовленный для шахты въ *Vieneburg*, состоялъ изъ 114 стальн. проволокъ діам. $2{,}_2 \, ^m/_m$, имѣвшихъ разрывающее напряженіе въ 150 *кг.* на кв. *мм.* Вѣсъ погон. мт. каната $= 4{,}1$ *кг.* Разрывающій грузъ для этого каната

$$P_0 = 150 . 114 . 0{,}785 . (2{,}2)^2 = 65000 \ кг.$$

$$L = 65000 : 4{,}1 = 16000 \ mt.$$

Та же фирма готовитъ спеціальные канаты для тяги паровыхъ плуговъ съ разрывающимъ напряженіемъ у проволокъ въ 250 *кг.* на кв. мм.

Принимая для кованаго алюминія $\delta = 2{,}7$ и $Z_0 = 20$, получимъ:

$$L = 20 : \frac{2{,}7}{1000000} \ ^m/_m = \text{около } 7400 \ mt,$$

т. е. менѣе, чѣмъ для дерева и стали.

Наивысшія цифры критической длины, оказывается, нужно искать среди волокнистыхъ матеріаловъ (см. статью *Ernst Mueller—Festigkeits-Eigenschaften. von Gespinsten* — въ журн. *Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing.*, 1884, № 8, *S.* 162—164).

---

*) Пусть вѣсъ погонной единицы длины бруса даннаго сѣченія F будетъ q, когда при обрывѣ бруса будетъ существовать ур-іе

$$q . L = F . Z_0, \text{ откуда}$$

$$L = F . Z_0 : q,$$

т. е. *для полученія критической длины бруса надо раздѣлить разрывающее данный брусъ усиліе на вѣсъ погонной единицы длины его.*

Группируя теперь всѣ полученныя здѣсь данныя и присоединяя къ нимъ указанія *Mueller*'а относительно волокнистыхъ матеріаловъ, можно расположить всѣ матеріалы въ порядкѣ возрастанія ихъ критической длины (въ *киломтр.*) въ слѣдующемъ видѣ:

		L киломтр.
1.	Свинцовая проволока, $Z_0 = 2,2$; $\delta = 11,3$	0,197
2.	Желѣзная цѣпь *Галля*	1,28
3.	Обыкновенная желѣзная цѣпь, діам. звена $1^1/_8$ д.	1,45
4.	Чугунъ, $Z_0 = 13$; $\delta = 7,2$	1,80
5.	Слабый ремень, $Z_0 = 3,5$; $\delta = 1,1$	3,18
6.	Пеньковый канатъ, діам. $3^3/_4$ д.	4,4
7.	Ремень лучшихъ качествъ, $Z_0 = 5,2$	4,73
8.	Желѣзо, $Z_0 = 40$; $\delta = 7,55$	5,3
9.	Желѣзный канатъ, діам. $1^3/_8$ д.	6,71
10.	Алюминій, $Z_0 = 20$; $\delta = 2,7$	7,4
11.	Волокна шерсти (по *Мюллеру*.... $Z_0 = 10,9$; $\delta = 1,314$)	8,3
12.	Полотно, употребляемое для парусовъ (по даннымъ *Rankine*)	8,5
13.	Ель, $Z_0 = 8$; $\delta = 0,7$	11,43
14.	Стальной канатъ, діам. $1 - 1^1/_2$ д.	13—16
15.	Сосна, $Z_0 = 11$; $\delta = 0,6$	18,33
16.	Волокна хлопка (по *Мюллеру*.... $Z_0 = 34,2$; $\delta = 1,503$)	22,75
17.	Волокна пеньки (по *Мюллеру*.... $Z_0 = 35,2$; $\delta = 1,465$)	24
18.	Волокна шелка-сырца (по *Мюллеру*.... $Z_0 = 44,8$; $\delta = 1,359$)	33

Можно быть увѣреннымъ, что въ высшей степени поучительныя данныя этой таблицы, для большинства читателей являются совершенно неожиданными.

23. **Опредѣленіе удлиненія растянутаго бруса съ вертикальной осью.** Величина напряженія H у такого бруса, какъ показываетъ ф-ла **21**, есть перемѣнная величина, поэтому и вытяжка двухъ элементовъ одинаковой высоты, но лежащихъ въ разныхъ мѣстахъ по длинѣ бруса здѣсь не будетъ одной и той же величиной. Найдемъ ур-іе удлиненій для вертикальнаго бруса.

Двумя безконечно близкими другъ къ другу поперечными сѣченіями m и t (фиг. 14) выдѣлимъ элементъ объема въ видѣ призмы съ безконечно малой высотой dx. Нижнее основаніе этой призмы пусть отстоитъ на разстояніе x отъ нижняго основанія h нашей призмы. Сѣченіе cd будетъ испытывать напряженіе H, опредѣляемое ф-лой **21**, и будетъ выносить на себѣ нагрузку $P + F.x.\gamma$. Пренебрегая собственнымъ вѣсомъ элементарнаго бруска tm, удлиненіе его $\varDelta л$ по закону *Гука* вычислимъ изъ ф-лы

$$H : \frac{\varDelta л}{dx} = E, \text{ откуда}$$

$$\varDelta л = \frac{H.dx}{E} = \frac{P + F.x.\gamma}{E.F} . dx.$$

Удлиненіе λ на всей длинѣ x получится суммированіемъ предыдущаго выраженія, измѣняя въ немъ x въ предѣлахъ отъ O до x:

$$\lambda = \sum \Delta\lambda = \frac{1}{E.F}\int_0^x (P + F.x.\gamma).dx$$

$$\lambda = \frac{x}{E.F}\left(P + \frac{F.x.\gamma}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{25.}$$

Это и есть *ур-іе удлиненій*. Оно представляетъ собою параболу hvs (фиг. 14), отнесенную къ осямъ λhx: по оси ординатъ откладываются разстоянія взятаго поперечнаго сѣченія отъ нижняго основанія бруса, а по оси абсциссъ—удлиненія бруса. Когда $x = 0$ и $\lambda = 0$, т. е. парабола проходитъ чрезъ точку h, центръ тяжести нижняго основанія бруса. При $x = hm \ldots \lambda = mv$.

При $x = l = hp \ldots$

$$\lambda_1 = ps = \frac{l}{E.F}\left(P + \frac{F.l.\gamma}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{25,a.}$$

Вершина параболы удлиненій находится въ точкѣ O (фиг. 14) и опредѣляется координатами a и b. Находя ихъ обычнымъ путемъ, перенесеніемъ осей параллельно самимъ себѣ и расположеніемъ начала координатъ въ точкѣ O, получимъ

$$b = \frac{P}{F.\gamma};\ a = \frac{1}{2E.\gamma}\cdot\left(\frac{P}{F}\right)^2$$

Взявъ для желѣзнаго бруса

$E = 20000$ кг. на кв. мм.,

$\frac{P}{F} = 7{,}55$ „ „

$\gamma = \frac{7{,}55}{1000000}$ кг. для 1 куб. $^m/_m$, получимъ

$b = 1000\ mt;\ a = 38{,}75\ mt.$

Вычисленныя для a и b величины показываютъ, что въ части hvs (фиг. 14) парабола будетъ весьма близко подходитъ къ прямой, соединяющей точкѣ h и s.

Въ случаѣ горизонтальнаго бруса ур-іе удлиненій получится изъ **25**, дѣлая въ немъ $\gamma = 0$, и кривая удлиненій обратится въ прямую BA_1 (фиг. 3), гдѣ при $x = l$ наибольшее удлиненіе бруса опредѣлится ф-лой

$$AA_1 = \frac{P.l}{E.F},$$

которая вполнѣ согласна съ ф-лой **11**.

Если же въ ф-лѣ **25а** сдѣлаемъ $P = 0$, тогда найдемъ удлиненіе, получаемое брусомъ отъ собственнаго вѣса:

$$\lambda_1 = \frac{l}{E.F}\cdot\left(\frac{F.l.\gamma}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{26.}$$

Выраженіе, заключенное здѣсь въ скобки, представляетъ собою $^1/_2$ собственнаго вѣса тѣла, и ф-ла **26** показываетъ, что *собственный вѣсъ тѣла вызываетъ удлиненіе, равное* **ПОЛОВИНѢ** *того удлиненія, которое вызвала бы равная ему по величинѣ нагрузка у этого же бруса, но съ горизонтальной осью.*

24. **Задачи. № 14.** Сосновый квадратный брусъ 100×100 $^m/_m$ длиною 100 *mt* работаетъ съ наибольшимъ напряженіемъ въ 0,5 *кг.* на кв. *мм.* Опредѣлить его удлиненіе, если ось бруса вертикальна.

Принимая уд. вѣсъ сосны $\delta = 0,6$ (см. зад. № 1), собственный вѣсъ бруса получимъ равнымъ

$$Q = F \,.\, l \,.\, \gamma = \frac{100 \,.\, 100 \,.\, 100000 \,.\, 0,6}{1000000}$$

$$Q = 600 \text{ кг.}$$

Нагрузка, допущенная для бруса, найдется изъ ф-лы **22**:

$$0,5 = \frac{P + 600}{100 \,.\, 100}, \text{ откуда}$$

$$P = 5000 \quad 600 = 4400 \text{ кг.}$$

По ф-лѣ **25 а**

$$\lambda_1 = \frac{100000}{1000 \,.\, 100 \,.\, 100}(4400 + 300) = 47\ ^m/_m.$$

Изъ этихъ 47 $^m/_m$ на собственный вѣсъ тѣла приходится удлиненіе только въ 3 $^m/_m$, а все остальное вызывается дѣйствіемъ нагрузки.

№ 15. Желѣзный стержень діам. $1^5/_8$ *дм.* (см. зад. № 2) имѣетъ длину 50 *mt* и подвѣшенъ вертикально. Какая нагрузка можетъ быть передана этому стержню, вызывая у него удлиненіе не болѣе 10 $^m/_m$, и съ какимъ напряженіемъ онъ будетъ работать?

Площадь сѣченія такого стержня дана въ зад. № 2

$$F = 1333,3 \text{ кв. мм.}$$

Вѣсъ погоннаго фута его указанъ тамъ 7,77 *фн.*, или

$$7,77 \,.\, 0,40952 = 3,18 \text{ кг.}$$

Вѣсъ погоннаго *mt* будетъ

$$3,18 \,.\, 3,28 = 10,43 \text{ кг.}$$

Вѣсъ всего разсчитываемаго стержня будетъ

$$10,43 \,.\, 50 = 522 \text{ кг.}$$

По ф-лѣ **25 а** имѣемъ

$$10 = \frac{50000}{20000 \,.\, 1333,3}(P + 261)$$

$$P = \text{около } 5072 \text{ кг.}$$

По ф-лѣ **21 а** найдемъ

$$max\ H = \frac{5072 + 522}{1333,3} = 4,2 \text{ кг. на кв. } ^m/_m.$$

№ 16. Цилиндрическіе концы тѣла AB (фиг. 15) имѣютъ радіусы r и R; средняя часть тѣла длиною l выполнена въ видѣ усѣченнаго конуса. Ось тѣла горизонтальна. Нагрузка P распредѣлена равномѣрно въ каждомъ изъ поперечныхъ сѣченій тѣла. Опредѣлить удлиненіе конической части тѣла.

Опасными сѣченіями этого тѣла будутъ всѣ поперечныя сѣченія его, начиная съ сѣченія A, слѣва отъ него. Ур-іе крѣпости тѣла будетъ

$$Z = P : \pi . r^2.$$

Пусть $R = m . r$ и вершина O конуса отстоитъ на разстояніе a отъ сѣченія A. Тогда

$$\frac{R}{r} = \frac{a + l}{a} = m.$$

На разстояніи x отъ основанія A возьмемъ сѣченіе C съ радіусомъ y, опредѣляемымъ изъ ф-лы

$$y = r . \frac{a + x}{a}.$$

Напряженіе матеріала въ сѣченіи C будетъ

$$H = \frac{P}{\pi . y^2} = \frac{Z . a^2}{(a + x)^2}.$$

На разстояніи dx отъ сѣченія C проведемъ другое, и заключенный между ними безконечно тонкій элементъ объема будемъ считать цилиндрическимъ и дающимъ удлиненіе $\varDelta \lambda$. Тогда по закону *Гука* можно написать

$$H = E . i = E . \frac{\varDelta \lambda}{dx}, \text{ откуда}$$

$$\varDelta \lambda = \frac{H . dx}{E}.$$

Взявши сумму такихъ удлиненій при измѣненіи x въ предѣлахъ отъ O до x, мы получимъ удлиненіе λ конуса на длинѣ x:

$$\lambda = \sum \varDelta \lambda = \int_0^x \frac{H}{E} . dx, \text{ или}$$

$$\lambda = \frac{Z . a^2}{E} . \int_0^x \frac{dx}{(a + x)^2} = - \frac{Z . a^2}{E} . \left[\frac{1}{a + x} \right]_0^x$$

$$\lambda = \frac{Z . a^2}{E} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x} \right) = \frac{Z}{E} . \frac{a . x}{a + x}.$$

Это есть общій видъ ур-ія удлиненій для конуса. Удлиненіе λ_2 на всей длинѣ конуса получится, если сдѣлаемъ $x = l$:

$$\lambda_2 = \frac{Z}{E} . \frac{a . l}{a + l} = \frac{1}{m} . \frac{l}{E} \frac{P}{\pi . r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{27},$$

т. е. *удлиненія усѣченнаго конуса и цилиндра, прилегающаго къ малому изъ его основаній, при одинаковой ихъ длинѣ относятся между*

собою, какъ радіусъ малаго основанія усѣченнаго конуса относится къ радіусу большого.

25. **Работа силъ упругости въ случаѣ бруса съ вертикальной осью.** *a. Случай спокойнаго воздѣйствія собственнаго вѣса бруса.* Назовемъ чрезъ

l — длину бруса, когда ось его горизонтальна,

$q = F.\gamma$ — вѣсъ погонной единицы длины бруса.

Въ *§ 16* былъ разсмотрѣнъ вопросъ о работѣ силъ упругости въ случаѣ бруса съ горизонтальной осью и получены были слѣдующіе результаты.

Напряженіе отъ дѣйствія спокойной нагрузки

$$H = P : F \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{3.}$$

Удлиненіе бруса отъ дѣйствія спокойной нагрузки

$$\lambda = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{11.}$$

Напряженіе въ брусѣ въ моментъ передачи нагрузки

$$H_1 = 2H \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{16.}$$

Удлиненіе бруса въ моментъ передачи нагрузки

$$\lambda + \lambda_1 = 2\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{16,a.}$$

Если нагрузка передаётся съ нѣкоторой живой силою, соотвѣтствующей работѣ $P.h$, то напряженіе въ брусѣ H_2 и удлиненіе его λ_2 опредѣлялись ф-лой

$$\frac{H_2}{H} = \frac{\lambda_2}{\lambda} = 1 + \sqrt{1 + 2.\frac{h}{\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{20.}$$

Удлиненіе вертикально подвѣшеннаго бруса при спокойномъ воздѣйствіи его собственнаго вѣса опредѣлялось ф-лой **26**. Назовемъ здѣсь это удлиненіе чрезъ κ; тогда

$$\kappa = \frac{l}{E.F} \cdot \frac{F.\gamma.l}{2} = \frac{q.l^2}{2E.F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{26.}$$

Для опредѣленія удлиненія не на всей длинѣ бруса l, а на произвольной длинѣ его x, имѣли бы ф-ту

$$u = k_x = \frac{q.x^2}{2E.F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{26,a.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что въ случаѣ дѣйствія одного собственнаго вѣса кривая удлиненій есть парабола AC (фиг. 16), имѣющая вершину A въ центрѣ тяжести нижняго основанія бруса, а своей осью — линію AD, перпендикулярную къ оси бруса. На фиг. 16 обозначаютъ: $EF = x$; $AE = u$; $CD = l$; $AD = k$.

Опредѣлимъ теперь работу силъ упругости подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса. Элементъ объема съ высотою dx, взятый на разстояніи x (фиг. 16) отъ нижняго основанія бруса, дастъ удлиненіе

$$du = \frac{q.x.dx}{E.F}.$$

На этотъ элементъ будетъ дѣйствовать нагрузка $q.x$. Разсматривая самъ элементъ объема невѣсомымъ, элементарную работу силъ упругости для него, согласно съ ф-лой **14**, напишемъ такъ

$$dC=q.x.\frac{du}{2}=\frac{q^2}{2\,EF}.x^2.dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{28.}$$

Интегрируя это ур-іе при измѣненіи x въ предѣлахъ отъ O до x, получимъ работу силъ упругости на длинѣ x:

$$C_x=\frac{q^2}{2E.F}.\frac{x^3}{3}=\frac{q.x}{3}.\frac{q.x^2}{2\,E.F}=\frac{q.x}{3}.u \quad . \ . \ . \ \mathbf{28{,}a.}$$

Совокупность ф-лъ **28** и **28,а** показываетъ намъ, что работа силъ упругости, вызываемыхъ отъ дѣйствія собственнаго вѣса тѣла, можетъ быть изображена графически площадью нѣкоторой параболы, такъ какъ dC можетъ быть представленъ площадью элементарнаго прямоугольника, у котораго одно измѣреніе равно dx, а другое пропорціонально x^2; а изъ разсмотрѣнія ф-лы **28,а** видно, что такою параболою въ извѣстномъ масштабѣ можетъ служить прямо кривая удлиненій, если у нея абсциссы считать по прежнему за величины удлиненій u, а за ординаты брать не x, а величины $q.x$, т. е. величины нагрузокъ въ каждомъ изъ поперечныхъ сѣченій тѣла, или же величины, пропорціональныя напряженію въ сѣченіи. Такая діаграмма работъ представлена на фиг. 17, гдѣ

$Ai=bd=u$—удлиненіе бруса на длинѣ x,

$Ab=di=q.x=F.h$ — нагрузка на длинѣ x, вызывающая въ сѣченіи b напряженіе h,

площадь $Abd=C_x$—работа силъ упрутости на длинѣ x,

$AI=BD=k$ — удлиненіе бруса на всей длинѣ его l,

$AB=DI=q.l=F.h_0$— собственный вѣсъ всего тѣла, вызывающій въ верхнемъ сѣченіи B бруса напряженіе h_0.

площадь $ABDdA=C$—работа силъ упругости, вызываемыхъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса тѣла, по всей его длинѣ. Очевидно,

$$C=\frac{q.l}{3}.k \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{28{,}б.}$$

Діаграмма работъ AdB (фиг. 17) показываетъ въ то же время и законъ измѣненія напряженій въ поперечномъ сѣченіи соотвѣтственно полученному тѣломъ удлиненію.

Когда брусъ подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса получилъ удлиненіе k, нагрузка, равная вѣсу тѣла, совершила работу, выражаемую площадью $ABDI$ (фиг. 17) и равную $q.l.k$, а силы упругости оказали при этомъ упругое сопротивленіе, работа котораго C выражается площадью $ABDdA$.

Мы видимъ, что при этомъ оказывается существующимъ значительный избытокъ внѣшней работы, выражаемый площадью $AdDI$ Слѣдовательно, перемѣстившись на величину k, нижнее сѣченіе тѣла будетъ

оживлено еще нѣкоторою скоростію v и будетъ продолжать удлиняться далѣе. Положимъ, что нижнее сѣченіе тѣла получитъ скорость $= o$, только перемѣстившись на длину k_0, т. е. давши удлиненіе $k_1 = k + k_0$; это удлиненіе предполагаемъ упругимъ, а тогда зависимость между удлиненіями и напряженіями будетъ выражаться при измѣненіи скорости отъ v до o такъ же, какъ и ранѣе—при измѣненіи ея отъ o до v, т. е. по закону, выражаемому одною и тою же параболою ADH (фиг. 17); ея крайняя ордината $CH = F . h_1$ будетъ выражать при этомъ величину наибольшаго сопротивленія въ поперечномъ сѣченіи.

За весь періодъ измѣненія скорости нижняго сѣченія тѣла отъ o до v и затѣмъ отъ v до o, работа нагрузки д. б. $=$ работѣ упругаго сопротивленія, т. е. площадь $ABEC$ д. б. $=$ площади $ADHC$, или

$$F . h_0 . k_1 = \frac{2}{3} . F . h_1 . k_1, \text{ откуда}$$

$$h_1 = 1{,}5 . h_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{29},$$

т. е. *величина максимальнаго напряженія, вызываемая въ поперечномъ сѣченіи тѣла во время передачи нагрузки отъ дѣйствія собственнаго вѣса его,* **въ полтора раза болѣе** *того напряженія, съ которымъ тѣло будетъ работать, когда передача нагрузки уже совершится.* Послѣ этого изъ чертежа (фиг. 17) можно опредѣлить и величину деформаціи k_1.

$$k_1 : k = (F . h_1)^2 : (F . h_0)^2, \text{ откуда}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{9}{4} k = 2{,}25 \; k \\ k_0 &= \frac{5}{4} k = 1{,}25 \; k \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{30}.$$

б. Случай, когда передъ началомъ деформаціи тѣла собственный вѣсъ его совершаетъ нѣкоторую работу. Мы предполагаемъ, что передъ началомъ деформаціи нижнее сѣченіе тѣла, подвѣшеннаго вертикально, перемѣстилось на величину f, совершивъ при этомъ работу (см. формулу **28,б**), равную $\frac{1}{3} q . l . f$. Послѣ того начинается удлиненіе тѣла и возникновеніе въ его поперечныхъ сѣченіямъ напряженій по закону, выражаемому параболою, подобно ADH на фиг. 17.

Пусть обозначаютъ (фиг. 18):

$z = AC_1$ — удлиненіе, получаемое тѣломъ въ этомъ случаѣ,

$y = F . h_2 = C_1 H_1$ — наибольшее значеніе силы упругости въ верхнемъ сѣченіи бруса, соотвѣтствующее напряженію h_2,

$q . l = F . h_0 = r$ — собственный вѣсъ тѣла.

Выразимъ, что работа внѣшней силы $=$ работѣ силы упругости, или площ. $A_1 B_1 E_1 C_1 =$ площ. $ADHH_1 C_1$, или

$$\frac{2}{3} . y . z = \left(z + \frac{1}{3} . f\right) . r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{31}.$$

Изъ чертежа (фиг. 18) имѣемъ:

$$\frac{z}{k}=\left(\frac{y}{r}\right)^2, \text{ или } \frac{y}{r}=\sqrt{\frac{z}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{32.}$$

Соединяя **31** и **32**, находимъ:

$$\frac{2}{3}\cdot z\cdot\sqrt{\frac{z}{k}}=z+\frac{1}{3}f, \text{ или}$$

$$\frac{4}{9}\,\frac{z^3}{k}=z^2+\frac{2}{3}f\cdot z+\frac{1}{9}\cdot f^2, \text{ или}$$

$$z^3-\frac{9}{4}k\cdot z^2-\frac{3}{2}f\cdot k\cdot z-\frac{k\cdot f^2}{4}=o \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{а.}$$

Въ общемъ видѣ это ур-іе 3-й степени можно написать такъ:

$$z^3+a\cdot z^2+b\cdot z+c=o \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{б.}$$

$$\left.\begin{aligned} a&=-\frac{9}{4}\cdot k\\ b&=-\frac{3}{2}\cdot f\cdot k\\ c&=-\frac{1}{4}\cdot k\cdot f^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{в.}$$

Чтобы упростить ур-іе б и привести его къ ф-лѣ *Кардана*, введемъ новое перемѣнное X, опредѣляемое равенствомъ,

$$X=z-e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{г.}$$

Тогда ф-ла б даетъ:

$$X^3+3X^2\cdot e+3X\cdot e^2+e^3+a(X^2+2Xe+e^2)+b(X+e)+c=o.$$

Выберемъ величину e так. обр., чтобы можно было это ур-іе привести къ виду

$$X^3+m\cdot X+n=o \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{д.}$$

Для этого нужно прежде всего имѣть:

$$a+3\ e=o, \text{ т. е.}$$

$$e=-\frac{a}{3}=\frac{3}{4}k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{ж.}$$

Затѣмъ надо имѣть:

$$m=3e^2+2a\cdot e+b=b-\frac{a^2}{3}, \text{ или}$$

$$m=-\frac{3}{2}\cdot k\left(f+\frac{9}{8}\cdot k\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{з.}$$

И наконецъ необходимо имѣть еще слѣд. равенство:

$$n=e^3+a\cdot e^2+b\cdot e+c=c-\frac{a\cdot b}{3}+\frac{2}{27}\cdot a^3,$$

$$n=-\frac{k\cdot f^2}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}k\cdot\frac{3}{2}f\cdot k-\frac{2}{27}\cdot\left(\frac{9}{4}k\right)^3, \text{ откуда}$$

$$n=-\frac{k}{4}\left[f^2+\frac{9}{2}\cdot f\cdot k+\frac{27}{8}k^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{i.}$$

Подсчитавши величины коэф. m и n, найдемъ выраженіе

$$\Phi^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$$

Послѣ этого рѣшеніе ур-ія **д** по общей ф-лѣ представится въ слѣд. видѣ:

$$X = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \Phi} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \Phi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{33}.$$

По ур-ію **г** имѣемъ:

$$z = e + X = X + \frac{3}{4}k \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{34}.$$

Послѣ этого по ур-ію **32** находимъ y, а по нему и напряженіе h_2 въ верхнемъ сѣченіи бруса.

$$\frac{y}{r} = \frac{h_2}{h_0} = \sqrt{\frac{z}{k}} = \sqrt{\frac{X}{k} + \frac{3}{4}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{35}.$$

Если сдѣлаемъ $f = o$, тогда

$$\text{по ф-лѣ } \mathbf{i} \;.\;.\;.\;.\;.\; \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{27}{64}k^3\right)^2 = \left(\frac{3}{4}k\right)^6,$$

$$\text{„} \quad \mathbf{з} \;.\;.\;.\;.\;.\; \left(\frac{m}{3}\right)^3 = -\left(\frac{9}{16}k^2\right)^3 = -\left(\frac{3}{4}k\right)^6,$$

поэтому $\Phi = o$, а ст. б. изъ **33** получимъ:

$$X = 2\sqrt[3]{-\frac{n}{2}} = 2\sqrt[3]{\frac{27}{64}k^3} = \frac{3}{2}k$$

Затѣмъ изъ **34**

$$z = \frac{3}{4}k + \frac{3}{2}k = \frac{9}{4}k,$$

что вполнѣ согласно съ ф-лой **30.** И наконецъ изъ **35** найдемъ:

$$\frac{h_2}{h_0} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2},$$

т. е. h_2 будетъ въ этомъ случаѣ, какъ и слѣдовало ожидать, одинаково съ h_1.

в. Общій случай воздѣйствія нагрузки и собственнаго вѣса. Когда равновѣсіе между внѣшними силами и внутренними уже установилось, то удлиненіе тѣла вычисляется по совокупности ф-лъ **11** и **26:**

$$\Theta_0 = \lambda + k = \frac{l}{F.E}\left(P + \frac{q.l}{2}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{36},$$

и соотвѣтственное напряженіе матеріала будетъ

$$H + h_0 = \frac{P + q.l}{F} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{37}.$$

При спокойной передачѣ на тѣло нагрузки и собственнаго вѣса получается удлиненіе, которое вычислится, соединяя ф-лы **16a** и **30**:

$$л + л_1 + k_1 = 2\,л + 2{,}25\,k = \Theta_1$$

$$\Theta_1 = \frac{l}{E.F}\left(2P + \frac{9}{8}.q.l\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{38.}$$

Соотвѣтственное этому напряженіе будетъ (ф-лы **16** и **29**).

$$H_1 + h_1 = 2H + \frac{3}{2}h_0 = \frac{2P + 1{,}5\,.q.l}{F} \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{39.}$$

Когда нижнее сѣченіе вертикальнаго бруса, гдѣ приложена нагрузка, до ея передачи на тѣло перемѣстится на высоту f, тогда тѣло получитъ удлиненіе Θ_2 (форм. **20** и **34**):

$$\Theta_2 = X + \frac{3}{4}k + л\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{л}}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{40.}$$

Соотвѣтственная этому величина напряженія будетъ (ф-лы **20** и **35**):

$$H_2 + h_2 = \frac{P}{F}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{л}}\right) + \frac{q.l}{F}\sqrt{\frac{X}{k} + \frac{3}{4}} \; . \; . \; . \; \mathbf{41.}$$

26. **Задачи. № 17.** Стальной шахтный канатъ съ прямоугольнымъ сѣченіемъ $22 \times 90^m/_m$ состоитъ изъ 168 стальныхъ проволокъ и употребляется при глубинѣ шахты въ 700 *mt.* При спокойно висящей нагрузкѣ $P = 3000$ *кг.* канатъ работаетъ по даннымъ завода, изготовлявшаго канатъ, съ 10-кратной надежностью. Выяснить удлиненія и напряженія въ этомъ канатѣ при различныхъ условіяхъ его работы.

Рабочая площадь сѣченія каната $F = 528$ кв. *мм.*

Вѣсъ погоннаго *mt* длины каната $q = 5{,}5$ *кг.*

Разрывающая погрузка для этого каната дана заводомъ въ 63300 *кг.*, поэтому разрывающее напряженіе будетъ

$$Z_0 = \frac{63300}{528} = 120 \text{ кг. на кв } ^m/_m.$$

По **37**:

$$H + h_0 = \frac{3000 + 5{,}5\,.\,700}{528} = 12{,}973 \text{ кг. на кв. } ^m/_m.$$

$$H = \frac{3000}{528} = 5{,}681 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{а}$$

$$h_0 = \frac{5{,}5\,.\,700}{528} = 7{,}292 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{б.}$$

Когда грузъ виситъ спокойно, степень надежности каната будетъ

$$\frac{Z_0}{H + h_0} = \frac{63300}{6850} = 9{,}24. = \frac{120}{12{,}973}$$

При спокойной передачѣ нагрузки возбудится напряженіе (см. ф-лу 39):

$$H_1 + h_1 = \frac{2\,.\,3000 + 1{,}5\,.\,5{,}5\,.\,700}{528} = 22{,}3 \text{ кг. на кв. } ^m/_m$$

Въ этомъ случаѣ степень надежности будетъ уже всего только

$$\frac{120}{22,3}=5,4$$

Дальнѣйшее уменьшеніе степени надежности идетъ весьма быстро съ увеличеніемъ высоты f, т. е. предварительной работы, съ которою воздѣйствуетъ грузъ и собственный вѣсъ въ началѣ вытяжки. Пусть $f=20\ ^m/_m$ и остается одинаковымъ по мѣрѣ навиванія каната на барабанъ. Въ таблицѣ **8-й** приведины величины удлиненій и напряженій въ верхнемъ сѣченіи каната при перемѣнной величинѣ l, которая пусть измѣняется въ предѣлахъ отъ 10 до 700 *mt*.

Таблица 8-я.

l	Удлиненія въ мм.			Напряженія въ кг. на кв. мм.		По формулѣ **20**.	
mt	X ф-ла 33.	k ф-ла 26	z ф-ла 34.	$q\cdot l:F$	h_2 ф-ла 35.	удл. λ_2 въ *мм.*	напряж. H_2 въ *кг.* на кв. *мм.*
	отъ собственнаго вѣса.					отъ нагрузки.	
10	1,57	0,03	1,59	0,10	0,81	13,96	27,92
50	5,76	0,65	6,25	0,52	1,61	41,95	16,78
100	11,29	2,60	13,25	1,04	2,35	72,50	14,50
200	25,82	10,42	33,63	2,08	3,74	131,00	13,10
500	100,20	65,11	149,33	5,21	7,88	302,75	12,11
700	204,30	127,60	300,00	7,29	11,17	416,50	11,91

Когда грузъ виситъ спокойно, напряженіе h_0 отъ собственнаго вѣса превышаетъ напряженіе H отъ нагрузки, а при ударномъ дѣйствіи, наоборотъ, вліяніе нагрузки сказывается сильнѣе, какъ показываютъ данныя табл. 8-й. Когда канатъ свился съ барабана вполнѣ, т. е. $l=700$ *mt*, то

$$H_2+h_2=11,91+11,17=23,08,$$

а когда свободный конецъ каната подъ шахтою $=10$ *mt*, то

$$H_2+h_2=27,92+0,81=28,73$$

Если бы свободную длину каната надъ шахтою оставить всего только 1 *mt* и передать на канатъ ту же величину живой силы, что и ранѣе, то по ф-лѣ **20** нашли бы

$$H_2=73,3 \text{ кг. на кв. } ^m/_m.$$

Эти данныя указываютъ, насколько чувствительно отзывается на повышеніи напряженія ударное дѣйствіе нагрузки при уменьшеніи свободной длины каната, не навитой еще на барабанъ, и насколько существенно важно имѣть эту минимальную свободную длину все еще довольно большою.

27. **Тѣло равнаго сопротивленія при растяженіи.** Ф-ла **21** показываетъ, что въ различныхъ сѣченіяхъ призматическаго вертикально подвѣшеннаго тѣла напряженія матеріала имѣютъ различную величину; а изъ ф-лы **22 а** видно, что тѣло получаетъ свои размѣры большими, чѣмъ даетъ ф-ла **7 а** изъ за одного только сѣченія, опаснаго, а въ остальныхъ сѣченіяхъ размѣры ихъ можно было бы имѣть и менѣе, сообразно съ величиною существующаго въ нихъ напряженія.

Отсюда возникаетъ мысль о построеніи тѣла такой формы, при существованіи которой у него во всѣхъ поперечныхъ сѣченіяхъ напряженія были бы *одинаковы*. Такое тѣло наз. *тѣломъ равнаго сопротивленія*. Очевидно, что, при одинаковой крѣпости съ тѣломъ призматическимъ, тѣло равнаго сопротивленія будетъ отвѣчать условію наименьшаго вѣса.

Пусть AB (фиг. 19) будетъ ось такого тѣла. Возьмемъ у него произвольное сѣченіе C на разстояніи x отъ нижняго основанія и напишемъ условіе равновѣсія нагрузки съ внутренними силами въ этомъ сѣченіи. Нагрузка состоитъ изъ двухъ частей—внѣшней нагрузки P, приложенной къ нижнему основанію тѣла и собственнаго вѣса части AC тѣла. Эта послѣдняя величина будетъ:

$$Q_x = \int_0^x F \cdot \gamma \cdot dx \qquad \text{в.}$$

Условіе равновѣсія силъ въ сѣченіи C напишется такъ:

$$P + Q_x = F \cdot H \qquad \text{а.}$$

Въ этой ф-лѣ постоянныя величины суть P и H, а остальныя величины—функціи x. Дифференцируя ур-іе a по перемѣнному x, получимъ:

$$F \cdot \gamma\, dx = H \cdot dF, \text{ или}$$

$$\frac{\gamma}{H} \cdot dx = \frac{dF}{F} \qquad \text{б.}$$

Введемъ обозначеніе

$$\frac{\gamma}{H} = u \qquad \mathbf{42.}$$

Пусть F_1 будетъ площадь верхняго основанія тѣла,

$F_0 = P : H$ — площ. нижняго основанія его.

Интегрируемъ ур-іе **б** въ предѣлахъ измѣненія перемѣннаго x отъ O до x, а перемѣннаго F—отъ O до F, тогда:

$$u \cdot x = ln \frac{F}{F_0}, \text{ или}$$

$$\frac{F}{F_0} = e^{u \cdot x} \qquad \mathbf{43.}$$

гдѣ e—основаніе логариѳмовъ *Непера*. Ф-ла **43** и есть ур-іе поверхности, ограничивающей тѣло равнаго сопротивленія. Для опредѣленія величины площади верхняго сѣченія получимъ ф-лу:

$$F_1 = \frac{P}{H} \cdot e^{u \cdot l} \qquad \mathbf{44}, \text{ или}$$

$$\log F_1 = \log \frac{P}{H} + \frac{\gamma}{H} \cdot l \cdot 0{,}434 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{45.}$$

Собственный вѣсъ Q всего тѣла равнаго сопротивленія найдется по ф-лѣ **в** путемъ интегрированія при верхнемъ предѣлѣ $x = l$:

$$Q = \int_0^l \gamma . F_0 . e^{u . x} dx = P . (e^{u . l} - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{46.}$$

Тотъ же самый результатъ можно получить и безъ интеграціи, написавши равновѣсіе силъ въ сѣченіи B (фиг. 19):

$$P + Q = H . F_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{46,a.}$$

$$Q = H . F_1 - P = P \quad (e^{u . l} - 1).$$

Кривою напряженій для этого тѣла будетъ прямая EF, параллельная оси бруса.

Для выясненія вида кривой удлиненій напишемъ законъ *Гука* въ примѣненіи къ элементу объема тѣла съ безконечно малой высотой dx, взявши этотъ элементъ на произвольномъ разстояніи x отъ нижняго сѣченія:

$$H : i = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{г.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что вытяжка произвольно взятаго элемента постоянна и не зависитъ отъ его положенія по высотѣ тѣла; слѣд., здѣсь всѣ элементы съ одинаковой высотой будутъ давать одну и ту же вытяжку. Если удлиненіе на длинѣ x будетъ λ, то

$$\lambda = \frac{H}{E} . x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{д.}$$

Мы видимъ изъ этого ур-ія, что кривая удлиненій будетъ въ этомъ случаѣ прямою линіею AM. Опредѣлимъ длину BM, т. е. удлиненіе всей длины бруса:

$$BM = \lambda_1 = \frac{P . l}{E . F_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{е,}$$

т. е. *тѣло равнаго сопротивленія даетъ такое же удлиненіе, какое получилось бы у тѣла съ горизонтальной осью, разсчитаннаго по той же нагрузкѣ и съ одинаковою надежностью въ обоихъ случаяхъ.*

Ф-ла **44** показываетъ, что, какова бы ни была длина тѣла, рѣшеніе вопроса объ опредѣленіи размѣровъ тѣла равной крѣпости будетъ вполнѣ опредѣленнымъ. Нельзя того же сказать относительно призматическаго тѣла (см. ф-лу **22 а**). Когда длина тѣла достигаетъ *предѣльной* для даннаго матеріала (см. зад. *№ 12*), рѣшеніе вопроса при этомъ матеріалѣ дѣлается невозможнымъ; тогда приходится обращаться къ матеріалу болѣе крѣпкому, обладающему бо́льшей величиной Z, — отъ желѣзныхъ канатовъ и штангъ приходится переходить въ шахтномъ дѣлѣ къ стальнымъ канатамъ и штангамъ. Но при весьма глубокихъ шахтахъ (болѣе 1000 mt) и при употребленіи стали встрѣчаются уже затрудненія при выполненіи призматической формы. Въ

такомъ случаѣ неоцѣнимую услугу оказываетъ примѣненіе формы тѣла равнаго сопротивленія. Но точное практическое выполненіе ея оказывается въ высшей степени затруднительнымъ. Довольствуются поэтому болѣе или менѣе близкимъ приближеніемъ къ этой идеальной формѣ, осуществляя тѣло *ступеньчатымъ*, состоящимъ изъ цѣлаго ряда отдѣльныхъ призматическихъ тѣлъ.

28. **Ступеньчатое тѣло съ нѣсколькими сѣченіями равной крѣпости.** Пусть имѣемъ ступеньчатое тѣло, состоящее изъ n призматическихъ элементовъ, верхнія основанія которыхъ мы желаемъ осуществить всѣ съ одинаковой крѣпостью. Введемъ обозначенія:

F_1 F_2 $F_3 \ldots F_n$ — площади сѣченія призматическихъ элементовъ ступеньчатаго тѣла,

l_1 l_2 l_3 $\ldots$ l_n—длина отдѣльныхъ элементовъ,

L — вся длина тѣла,

Q_1 Q_2 Q_3 $\ldots$ Q_n — вѣсъ отдѣльныхъ элементовъ,

Q — вѣсъ всего тѣла,

P — внѣшняя нагрузка, приложенная къ нижнему основанію тѣла,

Z — допускаемое напряженіе матеріала, одинаковое во всѣхъ опасныхъ сѣченіяхъ тѣла (B, C, D ... на фиг. 20),

γ — вѣсъ кубич. единицы матеріала,

Условіе равновѣсія внѣшнихъ и внутреннихъ силъ въ сѣченіи B для 1-го снизу элемента напишется такъ:

$$P + Q_1 = P + F_1 \,.\, l_1 \,.\, \gamma = F_1 \,.\, Z \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{а}$$

$$F_1 = \frac{P}{Z - l_1 \,.\, \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{б.}$$

Для 2-го элемента въ сѣченіи C получимъ:

$$P + Q_1 + Q_2 = P + F_1 \,.\, l_1 \,.\, \gamma + F_2 \,.\, l_2 \,.\, \gamma = F_2 \,.\, Z \quad \ldots \quad \textbf{в.}$$

Пользуясь ф-лой **а**, напишемъ:

$$F_1 \,.\, Z = F_2 \,.\, (Z - l_2 \,.\, \gamma), \text{ откуда}$$

$$F_2 = \frac{P \,.\, Z}{(Z - l_1 \,.\, \gamma)\,(Z - l_2 \,.\, \gamma)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{г}$$

Такимъ же образомъ для 3-го элемента въ сѣченіи D должны имѣть:

$$P + Q_1 + Q_2 + Q_3 = F_3 \,.\, Z, \text{ или}$$

$$P + F_1 \,.\, l_1 \,.\, \gamma + F_2 \,.\, l_2 \,.\, \gamma + F_3 \,.\, l_3 \,.\, \gamma = F_3 \,.\, Z.$$

Пользуясь ф-лой **в**, напишемъ:

$$F_2 \,.\, Z = F_3 \,.\, (Z - l_3 \,.\, \gamma),$$

откуда при помощи ф-лы **г** получимъ:

$$F_3 = \frac{P \,.\, Z^2}{(Z - l_1 \,.\, \gamma)(Z - l_2 \,.\, \gamma)(Z - l_3 \,.\, \gamma)} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{д.}$$

Совершенно аналогично съ предыдущимъ для n-го элемента тѣла, т. е. для самаго верхняго сѣченія его можно написать:

$$F_n = \frac{P \cdot Z^{n-1}}{(Z - l_1 \cdot \gamma)(Z - l_2 \cdot \gamma) \ldots (Z - l_n \cdot \gamma)} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{47.}$$

Если дано, что

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l = \frac{L}{n}, \text{ тогда}$$

$$F_n = \frac{P \cdot Z^{n-1}}{(Z - l \cdot \gamma)^n} = \frac{P}{Z} \cdot \left(\frac{Z}{Z - l \cdot \gamma}\right)^n \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{48.}$$

Это есть выраженіе площади самаго верхняго сѣченія ступеньчатаго тѣла, но тою же ф-лой **48** можно пользоваться для опредѣленія размѣровъ и всѣхъ остальныхъ сѣченій. Для этого стоитъ только вмѣсто n вносить въ нее 1, 2, 3.....

Собственный вѣсъ тѣла найдется по ф-лѣ

$$Q = \gamma \cdot (F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + \ldots + F_n \cdot l_n)$$

Еще проще находится собственный вѣсъ тѣла, написавши условіе равновѣсія нагрузки и внутреннихъ силъ въ самомъ верхнемъ сѣченіи тѣла:

$$P + Q = F_n \cdot Z = P \cdot \left(\frac{Z}{Z - l \cdot \gamma}\right)^n \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{49.}$$

Удлиненіе тѣла найдется, опредѣляя на общихъ основаніяхъ удлиненія его элементовъ и складывая ихъ.

Обозначимъ въ ф-лѣ **48** коэф. при $P : Z$ чрезъ A и внесемъ въ него

$$l = L : n.$$

Тогда

$$A = \left(\frac{Z}{Z - \frac{L \cdot \gamma}{n}}\right)^n \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{50.}$$

Сдѣлавши $n = \infty$, получимъ

$$A = 1^{\infty}.$$

Обозначимъ

$$L \cdot \gamma : Z = b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{е.}$$

Тогда

$$A = \left(\frac{1}{1 - \frac{b}{n}}\right)^n \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{ж.}$$

Вводя обозначеніе

$$\frac{1}{1 - \frac{b}{n}} = y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{з.}$$

напишемъ, что

$$A = y^n.$$

Возьмемъ *Неперовъ* логариѳмъ этого выраженія.

$$ln\ A = n . ln\ y = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{h.}$$

Откуда

$$A = e^z \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{i.}$$

Опредѣлимъ величину z:

$$z = n . ln\ y = n . ln \frac{1}{1 - \frac{b}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{k.}$$

Если сдѣлать въ этомъ выраженіи $n = \infty$, то получимъ

$$z = \infty\ .\ o.$$

Выраженіе k можно написать иначе:

$$z = \frac{ln \frac{1}{1 - \frac{b}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

Чтобы избавиться неопредѣленности въ этомъ выраженіи, беремъ производную отъ числителя его и дѣлимъ ее на производную отъ знаменателя:

$$z = \frac{\left(1 - \frac{b}{n}\right) . \left(-\frac{b}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{b}{n}\right)^2} : \left(-\frac{1}{n^2}\right), \text{ или}$$

$$z = \frac{b}{1 - \frac{b}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{m.}$$

Сдѣлавши въ этой ф-лѣ $n = \infty$, получимъ

$$z = b = \frac{L . \gamma}{Z} = u . L. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{n.}$$

Внося это выраженіе въ ф-лу i, а затѣмъ и въ ф-лу **48**, получимъ:

$$F_n = \frac{P}{Z} . e^{u . L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{51.}$$

Откуда видимъ, что эта ф-ла вполнѣ согласна съ ф-лой **44**, т. е. въ предѣлѣ, при безконечномъ числѣ элементовъ ступеньчатаго тѣла, его форма обращается въ форму тѣла равнаго сопротивленія.

Случалось слышать отвѣтъ, что ступеньчатое тѣло, о которомъ говорилось въ этомъ §, верхними основаніями своихъ элементовъ будетъ касаться поверхности тѣла равнаго сопротивленія. Это невѣрно. Тогда получимъ ступеньчатое тѣло, у котораго во всѣхъ верхнихъ основаніяхъ элементовъ будетъ существовать *различное* напряженіе, а не одинаковое.

29. **Задачи. № 18.** Длина шахтнаго каната $L = 1200$ *mt* *). Нагрузка на нижнемъ концѣ его $P = 1750$ *кг.* На изготовленіе каната употреблена проволока изъ тигельной стали съ разрушающимъ напряженіемъ 120 *кг.* на кв. *мм.*; допускаемое напряженіе считается возможнымъ взять $Z = 16{,}5$ *кг.* на кв. *мм.* Найти размѣры и вѣсъ каната, когда онъ будетъ выполненъ:

а) цилиндрическимъ,

б) ступеньчатымъ съ 6-ю сѣченіями равной крѣпости,

в) въ видѣ тѣла равнаго сопротивленія.

Приведенный уд. вѣсъ каната, принимая во вниманіе существованіе пеньковой прокладки между проволоками, осмолку и проч., возьмемъ $\gamma = 9$.

Степень надежности каната будетъ:

$$\phi = \frac{120}{16{,}5} = 7{,}3.$$

Случай а — канатъ цилиндрическій. По ф-лѣ **22 а**:

$$F = \frac{P}{Z - L.\gamma}$$

$$\text{Величина } L.\gamma = 1200000 \cdot \frac{9}{1000000} = 10{,}8$$

$$F = \frac{1750}{16{,}5 - 10{,}8} = \mathbf{307} \text{ кв. } мм.$$

Собственный вѣсъ каната

$$Q = F.L.\gamma = 307 . 10{,}8 = \mathbf{3316} \text{ кг.}$$

Случай б—канатъ изъ 6 элементовъ равной крѣпости; длина каждаго элемента $l = 200$ *mt.* Величина

$$l.\gamma = \frac{L.\gamma}{6} = \frac{10{,}8}{6} = 1{,}8$$

По ф-лѣ **48**—для перваго элемента снизу:

$$F_1 = \frac{1750}{16{,}5}\left(\frac{16{,}5}{16{,}5 - 1{,}8}\right)^1 = \mathbf{120} \text{ кв. } мм.$$

$$\frac{Z}{Z - l.\gamma} = \frac{16{,}5}{14{,}7} = 1{,}122\,; \quad \frac{1750}{16{,}5} = 106.$$

Для 2-го элемента снизу (ф-ла **48**):

$$F_2 = 106 . (1{,}122)^2 = \mathbf{134} \text{ кв. } мм.$$

Для 3-го элемента снизу (ф-ла **48**):

$$F_3 = 106 . (1{,}122)^3 = \mathbf{151} \text{ кв. } мм.$$

---

*) Глубина одной изъ богемскихъ шахтъ (шахта *Adalbert* въ Пшибрамѣ).

Для 4-го элемента снизу (ф-ла **48**):

$$F_4 = 106 . (1{,}122)^4 = \mathbf{169} \text{ кв. } мм.$$

Для 5-го элемента снизу (ф-ла **48**):

$$F_5 = 106 . (1{,}122)^5 = \mathbf{189} \text{ кв. } мм.$$

Для верхняго сѣченія каната (ф-ла **48**):

$$F_6 = 106 \ . \ (1{,}122)^6 = \mathbf{212} \text{ кв. } мм.$$

Собственный вѣсъ каната (на ф-лѣ **49**):

$$P + Q = 212 . 16{,}5 = 3498$$

$$Q = 3498 - 1750 = \mathbf{1748} \text{ } кг.$$

Случай в — тѣло равнаго сопротивленія. Нижнее основаніе этого тѣла будетъ имѣть площадь

$$F_0 = 106 \text{ кв. } мм. = \frac{1750}{16{,}5}.$$

Площадь верхняго основанія получимъ на ф-лѣ **44**, въ которой показатель $u \ . \ l$ надо будетъ замѣнить величиною

$$\frac{\gamma}{H} \cdot L = \frac{10.8}{16{,}5} = 0{,}654.$$

Тогда

$$F_1 = \frac{1750}{16{,}5} (2{,}71828)^{0{,}654} = \mathbf{200} \text{ кв. } мм.$$

Собственный вѣсъ тѣла найдемъ по ф-лѣ **46,а**:

$$Q = 200 \ . \ 16{,}5 - 1750 = \mathbf{1550} \text{ } кг.$$

Отношеніе вѣсовъ во всѣхъ трехъ случаяхъ *а*, *б*, *в* представится въ слѣдующемъ видѣ

3316 : 1748 : 1550, или иначе

2,*133* : 1,*128* : 1.

Эти цифры показываютъ, что *выполняя ступеньчатое тѣло изъ призматическихъ элементовъ, мы весьма близко подходимъ къ идеальному рѣшенію вопроса,* доводя вѣсъ тѣла почти до минимальнаго возможнаго и сводя стоимость издержекъ по изготовленію тѣла къ *min.*

На этомъ основаніи длинные шахтные стержни и канаты и выполняются всегда, какъ ступеньчатыя тѣла.

30. **Разсчетъ длинныхъ шахтныхъ штангъ.** Длинные шахтные стержни, испытывающіе одно растягивающее дѣйствіе нагрузки, можно разсчитывать по общей ф-лѣ **48**; но можно для этого вывести и другую ф-лу, связывающую между собою размѣры двухъ *смежныхъ* ступеней.

Пусть обозначаютъ:

n — число ступеней или элементовъ тѣла,

m — произвольное число между 1 и n,

$F_1\ F_2 \ldots F_m\ F_{m+1} \ldots F_n$ — площади поперечныхъ сѣченій различныхъ ступеней,

$l_1\ l_2 \ldots l_m\ l_{m+1} \ldots l_n$ — длины ступеней,

$Q_1\ Q_2 \ldots Q_n$ — вѣсъ элементовъ ступеньчатаго тѣла,

γ — *приведенный* вѣсъ единицы объема штангъ, увеличенный противъ дѣйствительнаго вѣса ед. об. на 25—30%, вслѣдствіе существованія соединительныхъ муфтъ съ ихъ принадлежностями,

l_0 — *предѣльная* длина для даннаго матеріала, приведенная къ данной здѣсь величинѣ γ,

$Z = l_0 . \gamma$ — допускаемое напряженіе матеріала.

Разсчитывая $(m+1)$-ю ступень штанги, мы даемъ ей площадь сѣченія F_{m+1} вмѣсто F_m, которая была у предыдущей ступени, потому только, что на протяженіи между разсчетными сѣченіями m-й и $(m+1)$-й ступени является новая нагрузка Q_{m+1}, т. е. собственный вѣсъ разсчитываемой ступени. Разность площадей двухъ смежныхъ разсчетныхъ сѣченій и д. б. достаточна, чтобы выносить на себѣ дѣйствіе нагрузки отъ собственнаго вѣса $(m+1)$-й ступени. Выражая эту мысль, получимъ слѣдующее ур-іе:

$$(F_{m+1} - F_m) . Z = Q_{m+1} = F_{m+1} \cdot l_{m+1} \cdot \gamma \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{52.}$$

При разсчетѣ этой ф-лой можно распорядиться двояко: *а*) задаваясь длинами ступеней, можно опредѣлять величины площадей, или *б*) выбирая площади ступеней, удобныя для исполненія, можно опредѣлять длины ступеней.

Случай а. Выбираются длины ступеней. Обыкновенно берутъ

$$l_1 = l_2 = \ldots\ldots = l_n = l = \frac{L}{n},$$

тогда

$$F_{m+1} = F_m \cdot \frac{Z}{Z - l . \gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{53.}$$

Это и есть общее ур-іе для рѣшенія вопроса въ этомъ случаѣ. Величина

$$\frac{Z}{Z - l . \gamma} = k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{a.}$$

представляетъ собою постоянный коэф., на который помножается площадь предыдущей ступени, чтобы получить площадь послѣдующей, при этомъ вмѣсто m вносятъ всѣ значенія, начиная съ $m = o$ и кончая $m = n - 1$. Когда сдѣлаемъ $m = o$ мы получимъ площадь F_0, которая будетъ достаточна, чтобы вынести на себѣ дѣйствіе нагрузки безъ собственнаго вѣса, т.-е.

нижнее основание $F_0 = P : Z$ . . . . **б.**

Тогда при $m=o$, получимъ

$$F_1 = \frac{P}{Z} \cdot k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{в},$$

что вполнѣ согласно съ ф-лой **22 а**.

Внѣ всякаго сомнѣнія, что, разсчитывая ступеньчатое тѣло этимъ пріемомъ, мы получимъ для него тѣ же самые размѣры, что и ранѣе съ помощію ф-лы **48**. Но этотъ пріемъ является нѣсколько болѣе общимъ, такъ какъ онъ позволяетъ въ столь же простой формѣ вести разсчетъ и при различной длинѣ ступеней.

Случай б. Выбираются площади сѣченій ступеней штанги, не назначая заранѣе числа ступеней. Выборъ площадей дѣлается, соображаясь съ мѣстными условіями, съ сортами матеріала, который можно пустить въ дѣло. Для этого прежде всего опредѣляютъ по ф-лѣ **б** этого § величину F_0. Съ такою площадью не будетъ выполнена ни одна изъ ступеней, но эта величина позволяетъ оріентироваться при выборѣ величины площадей F_1 F_2 F_3.... Пусть, напр., площади F_0 соотвѣтствуетъ діам. въ 75,3 *мм*. Тогда можно назначить, что будутъ сдѣланы ступени съ діам. въ 80, 85, 90 мм. и т. д., а опредѣлять нужно будетъ длину ступеней по общей ф-лѣ, которую получимъ изъ **52**:

$$l_{m+1} = \frac{F_{m+1} - F_m}{F_{m+1}} \cdot l_0 \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{54}.$$

Давая m въ этой ф-лѣ всѣ значенія отъ O до $(n-1)$, мы получимъ длину всѣхъ ступеней. Длину каждой изъ ступеней въ окончательномъ исполненіи можно сдѣлать или равною вычисленной или менѣе ея, соображаясь съ выбранною нормальною длиною отдѣльныхъ частей, изъ которыхъ будетъ сдѣлана каждая ступень.

При разсчетѣ шахтныхъ стержней этотъ 2-й способъ рѣшенія вопроса часто предпочитаютъ, такъ какъ онъ приводитъ къ такимъ результатамъ, отъ которыхъ менѣе всего приходится отступать при практическомъ выполненіи отдѣльныхъ ступеней штанги.

Если никакихъ отступленій отъ вычисленныхъ величинъ для площади сѣченій и длины ступеней не сдѣлано при исполненіи штанги, то собственный вѣсъ ея, пользуясь ф-лой **52**, напишется такъ:

$$Q = Q_1 + Q_2 \ldots Q_n = (F_n - F_0) \cdot Z \quad \ldots\ldots \mathbf{55}.$$

Если же исполняемые размѣры взяты нѣсколько иными, чѣмъ вычисленные (разумѣется, не въ ущербъ прочности), тогда ф-ла **55** можетъ служить только для приблизительнаго подсчета вѣса, а точное его выраженіе должно быть получено, точнымъ образомъ высчитывая вѣсъ каждаго изъ исполняемыхъ элементовъ. Сравненіе истиннаго вѣса съ теоретическимъ покажетъ, насколько неблагопріятно повліяли на результатъ сдѣланныя измѣненія.

31. **Разсчетъ шахтныхъ канатовъ.** Такіе канаты выполняются изъ проволоки съ толщиною въ $^m/_m$

2,8; 2,65; 2,50; 2,35; 2,20; 2,05 и т. д. до 1 *мм.*

Матеріаломъ для изготовленія проволоки въ такихъ канатахъ служатъ— желѣзо ($Z_0 = 40 - 55$ *кг.* на кв. *мм*), фосфористая бронза ($Z_0 = 55$), мартэновская сталь ($Z_0 = 65—75$) и тигельная сталь ($Z_0 = 110 - 180$).

Отдѣльныя проволоки свиваются въ *стренги*; изъ стренгъ составляется *канатъ*. Сѣченія отдѣльныхъ стренгъ могутъ быть сгруппированы или около одного центра,—тогда получается *круглый* канатъ, или вдоль прямой линіи, перпендикулярной къ оси каната, — тогда образуется *ленточный* канатъ.

Число проволокъ въ стренгѣ A бываетъ весьма различно. Если $A = 3$ или 4, то между отдѣльными проволоками никакой прокладки не дѣлается. При $A = 5$, 6, 7 и 8 между проволоками располагается *сердцевина*, или прокладка изъ просмоленнаго пеньковаго жгута; $A = 12$ составляется изъ $3 + 9$, причемъ 3 проволоки располагаются центрально, а 9—по периферіи; такимъ же образомъ составляются стренги при

$A = 14 = 4 + 10$ $\quad$ $A = 27 = 3 + 9 + 15$
$A = 16 = 5 + 11$ $\quad$ $A = 30 = 4 + 10 + 16$
$A = 18 = 6 + 12$ $\quad$ $A = 33 = 5 + 11 + 17$
$A = 20 = 7 + 13$ $\quad$ $A = 36 = 6 + 12 + 18$
$A = 22 = 8 + 14$ $\quad$ и т. д.

Число стренгъ B въ кругломъ канатѣ бываетъ обыкновенно $= 6$, такъ что число проволокъ въ канатѣ, равное произведенію $A \cdot B$, можетъ быть

30, 36, 42, 48, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 162, 180, 198, 216 и т. д.

Выполненіе ступеньчатыхъ канатовъ дѣлается так. обр., что измѣненіе діам. его происходитъ постепенно и незамѣтно для глаза, безъ всякихъ видимыхъ уступовъ, которые не позволяли бы производить *непрерывное* сохраненіе или непрерывное измѣненіе скорости при навиваніи каната на барабанъ и свиваніи его съ барабана. Поэтому число стренгъ B у каната остается на всемъ протяженіи одинаковымъ, а мѣняется или число и длина проволокъ въ каждой ступени, или діам. ихъ.

Пусть обозначаютъ:

$A_1\ A_2 \ldots\ A_m\ A_{m+1} \ldots\ A_n$ — число проволокъ въ стренгѣ каждой ступени,

$f_1\ f_2 \ldots\ f_n$ — площадь сѣченія одной проволоки въ каждой ступени,

γ — *приведенный* вѣсъ ед. объема каната, увеличенный противъ дѣйствительнаго вѣса ед. объема металла по крайней мѣрѣ на 25%, вслѣдствіе существованія пеньковой сердцевины въ стренгахъ и между

стренгами, вслѣдствіе осмолки каната. неизбѣжныхъ отступленій отъ теоретическихъ данныхъ въ пользу крѣпости и т. д.;

l_0 — *приведенная* предѣльная длина для каната,

$Z = l_0 \, . \, \gamma$ — допускаемое напряженіе матеріала.

Всѣ остальныя обозначенія относительно длины ступеней и ихъ вѣса оставляемъ тѣ же, что и въ предыдущемъ §.

Основное ур-іе крѣпости $(m+1)$-й ступени, данное въ предыдущемъ § въ видѣ ф-лы **52**, должно будетъ претерпѣть въ примѣненіи къ разсчету каната слѣдующія измѣненія:

$$F_m = B \, . \, A_m \, . \, f_m$$

$$F_{m+1} = B \, . \, A_{m+1} \, . \, f_{m+1}$$

$$(A_{m+1} . f_{m+1} - A_m . f_m) . B . Z = B . \gamma \, A_{m+1} . f_{m+1} . l_{m+1} \quad \ldots \quad \mathbf{56}.$$

Какъ видно изъ этого ур-ія, зависимость между площадями предыдущей и послѣдующей ступени можетъ вовсе не зависѣть отъ числа стренгъ B въ канатѣ.

Рѣшеніе вопроса о крѣпости ступеньчатаго каната при помощи ф-лы **56** *теоретически* могло бы быть сдѣлано 6-ю различными способами, т. к. здѣсь имѣемъ 3 величины A, f, l, изъ которыхъ одну можно оставлять постоянною, а двѣ другія—дѣлать перемѣнными. Но изъ всѣхъ этихъ 6 способовъ даютъ наиболѣе простое и практически удобоосуществимое рѣшеніе только 2 способа—или *а*) *съ постоянной толщиной проволоки* на всемъ протяженіи каната и съ перемѣннымъ числомъ проволокъ въ стренгѣ, или, наоборотъ, *б*) *съ постояннымъ числомъ проволокъ въ стренгахъ* на всемъ протяженіи каната и перемѣннымъ діам. проволокъ при переходѣ изъ одной ступени въ другую; въ обоихъ случаяхъ длина ступеней выходитъ перемѣнной, но ради упрощенія фабрикаціи ничто не мѣшаетъ установить мѣстами длину ступеней и постоянною, не нарушая условій крѣпости.

Способъ а. Толщина проволоки для изготовленія всего каната — одна и та же, съ однимъ и тѣмъ же разрывающимъ напряженіемъ, а измѣняется число проволокъ въ стренгахъ то въ одной, то въ другой, то въ третьей. Здѣсь

$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_m = f_{m+1} = \ldots = f_n$$

поэтому ур-іе **56** принимаетъ видъ:

$$(A_{m+1} - A_m) . Z = \gamma . A_{m+1} . l_{m+1}$$

$$l_{m+1} = \frac{A_{m+1} - A_m}{A_{m+1}} . l_0 \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{57}.$$

По этой ф-лѣ опредѣляютъ длину всѣхъ ступеней каната, внося въ нее вмѣсто m всѣ значенія отъ O до $n-1$, пока не будетъ получена полная длина каната

$$L = l_1 + l_2 + \ldots \ldots + l_n .$$

При этомъ выбирается разъ навсегда діам. проволоки и каждый разъ мѣняется число проволокъ въ стренгѣ. Разсчетъ начинается съ самаго нижняго *теоретическаго* сѣченія каната, выдерживающаго на себѣ дѣйствіе одной только нагрузки P. Пусть въ этомъ сѣченіи число стренгъ будетъ A_0, тогда

$$B.A_0.f_0.Z = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{58}.$$

Съ числомъ ~~стренгъ~~ проволокъ A_0 не будетъ выполнена ни одна изъ ступеней каната, но эта ф-ла позволяетъ остановиться на той или другой величинѣ f_0, предвидя дальнѣйшій ходъ измѣненій величинъ A.

Пусть нагрузка на канатъ $P = 1800$ *кг.*; рѣшено исполнять канатъ круглымъ изъ проволоки въ 1,6 *мм.* діам., въ 6 стренгъ, заставляя его работать съ напряженіемъ матеріала въ 15 *кг.* Тогда **58** даетъ

$$6.A_0.2.15 = 1800, \text{ гдѣ}$$

2 есть площадь сѣченія проволоки въ кв. мм. Отсюда $A_0 = 10$.

Пусть самое тонкое мѣсто каната будетъ имѣть въ каждой стренгѣ по 12 проволокъ, т. е. $A_1 = 12$. При опредѣленіи *предѣльной* длины каната примемъ *приведенный* уд. вѣсъ его $\delta = 10$, тогда

$$l_0 = \frac{Z}{\gamma} = 15 : \frac{10}{1000\,000} \text{ мм., или}$$

$$l_0 = 1500 \text{ мт.}$$

Длину 1-й ступени, на протяженіи которой будутъ итти 6 стренгъ по 12 проволокъ, опредѣлимъ по ф-лѣ **57**:

$$l_1 = \frac{6.12 - 6.10}{6.12}.1500 = 250 \text{ мт.}$$

Во 2-й ступени 5 стренгъ будутъ сдѣланы по 12 проволокъ, а 6-я изъ 14 проволокъ, и длина 2-й ступени будетъ

$$l_2 = \frac{(5.12 + 14) - 72}{5.12 + 14}.1500 = 40{,}5 \text{ мт.}$$

Въ 3-й ступени останутся 4 стренги по 12 проволокъ, а по 14 проволокъ будутъ двѣ; новое число проволокъ—76, предыдущее—74, поэтому

$$l_3 = \frac{76 - 74}{76}.1500 = 39{,}4 \text{ мт.}$$

Прибавляя так. обр. по 2 проволоки къ каждой стренгѣ, дойдемъ до такой ступени, гдѣ всѣ стренги будутъ состоять изъ 14 проволокъ; затѣмъ начнется постепенно переходъ къ 16 проволокамъ въ стренгѣ, къ 18 и т. д., пока вся требуемая длина каната не будетъ исполнена.

Отсюда понятно, что ступеньчатый, правильно разсчитанный канатъ можетъ быть исполняемъ каждый разъ только на заказъ, сообразно съ условіями работы каната (его нагрузкою, глубиною шахты, качествами матеріала, степенью надежности постройки и т. д.).

Остается добавить, что вычисленную теоретическую длину ступеней приходится при исполненіи дѣлать нѣсколько короче, т. е. начинать новую проволоку нужно ниже того сѣченія, которое указано въ разсчетѣ, чтобы въ этомъ разсчетномъ сѣченіи она могла уже работать, т. е. оказывать требующееся отъ нея сопротивленіе.

Способъ б. Число проволокъ въ стренгахъ остается постояннымъ на всемъ протяженіи каната, а мѣняется діаметръ отдѣльныхъ проволокъ въ стренгахъ. Здѣсь

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_m = \ldots\ldots = A_n.$$

Поэтому уравненіе **56** принимаетъ здѣсь видъ:

$$(f_{m+1} - f_m) \,.\, Z = \gamma \,.\, f_{m+1} \,.\, l_{m+1}, \text{ откуда}$$

$$l_{m+1} = \frac{f_{m+1} - f_m}{f_{m+1}} \,.\, l_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{59.}$$

Этимъ уравненіемъ опредѣляется послѣдовательно длина всѣхъ ступеней при измѣненіи діаметра проволоки. Работая этимъ способомъ, представляется возможнымъ подойти къ формѣ тѣла равнаго сопротивленія еще ближе, чѣмъ при работѣ предыдущимъ способомъ, потому что здѣсь ступень можно получить при измѣненіи площади сѣченія каждой проволоки, а не двухъ или трехъ, какъ въ предыдущемъ способѣ; а затѣмъ ступень здѣсь получается при измѣненіи рабочей площади сѣченія каната не на величину цѣлой площади сѣченія проволоки, а на величину разности площадей у проволоки послѣдующей и предыдущей.

Поэтому въ способѣ *a* длина ступеней измѣряется десятками *mt*, а въ способѣ *b*—единицами *mt*.

И здѣсь точно также разсчетъ начинается съ самаго нижняго *теоретическаго* сѣченія каната, выдерживающаго на себѣ дѣйствіе одной только нагрузки:

$$B \,.\, A \,.\, f_0 \,.\, Z = P.$$

Выбравши для B и A числа, удобныя для фабрикаціи, находятъ f_0. Пусть f_1 будетъ наименьшая площадь сѣченія проволоки, изъ которой будетъ начата выработка нижней части каната, тогда длина 1-й ступени будетъ:

$$l_1 = \frac{f_1 - f_0}{f_1} \,.\, l_0.$$

Затѣмъ начнется измѣненіе діаметра каждой изъ проволокъ и опредѣленіе длины ступеней, пока общая ихъ длина не получится равною или большею глубины шахты.

Разсмотримъ примѣръ предыдущаго способа разсчета. Возьмемъ

$P = 1800$ *кг.*	$A = 12$
$l_0 = 1500$ *мт.*	$B = 6.$

Находимъ f_0 изъ ф-лы:

$$6.12.f_0.15 = 1800, \text{ откуда}$$

$$f_0 = 1{,}515 \text{ кв. } мм.$$

Если въ 1-й ступени будутъ употреблены проволоки діам. 1,5 $^m/_m$, у которыхъ площадь $= 1{,}767$ кв. *мм.*, то

$$l_1 = \frac{1{,}767 - 1{,}515}{1{,}767}.1500 = 196{,}2 \ mt.$$

Предположимъ, что въ слѣдующихъ ступеняхъ каждая изъ 72 проволокъ діам. 1,5 $^m/_m$ будетъ замѣняться проволокой въ 1,6 $^m/_m$, у которой площадь $= 2$ кв. *мм.* Тогда въ ф-лу **59** нужно вносить послѣдовательно

$$f_1 = 72.1{,}767$$
$$f_2 = 71.1{,}767 + 1.2$$
$$f_3 = 70.1{,}767 + 2.2$$
$$f_4 = 69.1{,}767 + 3.2$$
. . . .

$$f_{36} = 37.1{,}767 + 35.2$$
$$f_{37} = 36.1{,}767 + 36.2$$
. . . .
. . . .
$$f_{72} = 1{,}767 + 71.2$$

$$l_2 = \frac{f_2 - f_1}{f_2}.\, l_0 = \frac{2 - 1{,}767}{f_2}.1500$$

$$l_3 = \frac{2 - 1{,}767}{f_3}.1500$$

. . . .

$$l_{37} = \frac{2 - 1{,}767}{36\ (1{,}767 + 2)}.1500 = 2{,}6 \ mt.$$

Всѣ эти величины $l_2\ l_3 \ldots\ l_{36}\ l_{37}$ весьма близки одна къ другой и могутъ быть, для упрощенія процесса выработки каната, замѣнены одною, а именно $l_{37} = 2{,}6\ mt$. Такимъ же образомъ можетъ быть образована 2-я серія ступеней съ одинаковою выполняемою длиною и т. д. Когда во всѣхъ 72 проволокахъ діам. будетъ 1,6 $^m/_m$, тогда начнется послѣдовательная замѣна ихъ проволоками, напр., въ 1,75 $^m/_m$ діам. и т. д.

32. Вопросы для повторенія главы о растяженіи.

1. На основаніи какихъ опытныхъ данныхъ построена теорія растяженія призматическаго тѣла? Въ какихъ единицахъ мѣры выражается вытяжка, коэф. упругости, напряженіе, временное сопротивленіе?

2. Въ пяти основныхъ случаяхъ (для бруса съ горизонтальной осью, для бруса съ вертикальной осью при дѣйствіи только собственнаго вѣса, а также нагрузки и собственнаго вѣса, для ступеньчатаго бруса и тѣла равнаго сопротивленія) дать отвѣтъ на слѣдующіе вопросы: *а*) гдѣ находится опасное сѣченіе бруса, *б*) какъ пишется разсчетное ур-іе, *в*) какой видъ имѣютъ кривая напряженій и кривая удлиненій, *г*) какъ опредѣлить собственный вѣсъ тѣла по данной величинѣ нагрузки, размѣрамъ наибольшаго сѣченія и допускаемому напряженію?

3. Какой изъ двухъ брусьевъ даетъ бо́льшее удлиненіе — призматическій или брусъ равнаго сопротивленія, если они оба построены для однихъ условій работы и изъ одинаковаго матеріала?

4. Построенъ брусъ равнаго сопротивленія для нагрузки P; затѣмъ внѣшняя нагрузка на тѣло уменьшилась вдвое, а напряженіе въ верхнемъ сѣченіи понизилось только на 25%. При какихъ условіяхъ это можетъ быть?

5. Въ какомъ тѣлѣ равнаго сопротивленія при уменьшеніи внѣшней нагрузки вдвое и напряженіе матеріала во всѣхъ сѣченіяхъ уменьшается также ровно вдвое?

6 Опредѣлить длину тѣла равнаго сопротивленія изъ даннаго матеріала, при которой собственный вѣсъ его будетъ равенъ внѣшней нагрузкѣ.

7 Во сколько разъ надо уменьшить напряженіе матеріала во всѣхъ пяти основныхъ случаяхъ (см. вопросъ 2-й), чтобы вѣсъ тѣла увеличился вдвое?

8 Тѣло равн. сопротивл. по удаленіи внѣшней нагрузки повѣшено широкимъ концомъ внизъ; въ какомъ случаѣ при этихъ условіяхъ въ наименьшемъ сѣченіи этого тѣла возбудится напряженіе матеріала, равное разсчетному? Какая длина тѣла необходима для этого?

9 Во сколько разъ большій вѣсъ матеріала идетъ на постройку ступеньчатаго вертикальнаго тѣла сравнительно съ призматическимъ горизонтальнымъ при одной и той же нагрузкѣ?

10 Тѣло равнаго сопротивленія, разсчитанное по нагрузкѣ P, разрѣзано на 2 части равной длины и каждая изъ нихъ употреблена для подвѣшиванія нагрузки. На сколько новая нагрузка м. б. увеличена противъ первоначальной?

11. Въ какомъ случаѣ желѣзная и стальная часть, разсчитанныя по нѣкоторой заданной нагрузкѣ, д. б. исполнены съ однимъ и тѣмъ же поперечнымъ сѣченіемъ?

12 Чугунная растягиваемая часть замѣнена желѣзной съ тѣми же самыми размѣрами; во сколько разъ увеличилась крѣпость этой части?

13. Что такое „приведенная безопасная нагрузка", „предѣльная длина тѣла", „критическая длина его"?

14. Чему равно отношеніе критической длины тѣла къ предѣльной?

15 Приготовлены 2 бруска совершенно одинаковыхъ размѣровъ, одинъ чугунный, другой желѣзный; что нужно сдѣлать, чтобы оба бруска дали одинаковое удлиненіе?

16. Брусокъ разсчитанъ съ 8-кратной надежностью для нагрузки P; что нужно сдѣлать, чтобы та же нагрузка его оборвала?

17. Вычисленная площадь бруска съ горизонтальной осью увеличена при исполненіи на 20%; во сколько разъ уменьшится удлиненіе такого бруска?

18 Горизонтальный брусъ былъ разсчитанъ для нагрузки P съ 8-кратной надежностью; для какой нагрузки годится такой брусъ при вертикальномъ расположеніи и работѣ съ 6-кратной надежностью?

19 Горизонтальный брусъ былъ разсчитанъ для нагрузки P; прежде чѣмъ подвергать его дѣйствію нагрузки въ вертикальномъ положеніи площадь верхней половины его длины усилили на 25%; какую новую нагрузку онъ можетъ вынести на себѣ, работая съ прежней степенью надежности? При какихъ условіяхъ эта нагрузка будетъ больше прежней, и когда меньше?

20 На сколько уменьшилась бы величина безопасной нагрузки, если бы въ послѣднемъ случаѣ ошибочно усилили размѣры нижней половины бруса, а не верхней?

СВОДЪ

главныхъ формулъ и данныхъ изъ главы о растяженіи.

При равномѣрномъ распредѣленіи напряженія матеріала между всѣми элементами площади:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Напряженіе матеріала въ } \textit{кг.} \text{ на кв. } \textit{мм.} = \dfrac{\text{Нагрузка въ } \textit{кг.}}{\text{Площадь въ кв. } \textit{мм.}} \\ H = P : F\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ \mathbf{3.}\ \S\ 7.$$

Формула **3** читается такъ: *напряженіе матеріала въ* **кг.** *на кв.* **мм.** = *дроби, у которой числитель есть нагрузка въ* **кг.**, *а знаменатель — соотвѣтственная площадь въ кв.* **мм.**

Способъ чтенія такихъ ф-лъ понятенъ самъ собою и при дальнѣйшихъ ф-лахъ мы его уже не приводимъ, тѣмъ болѣе, что послѣ каждой ф-лы, пересказанной словами, сейчасъ же слѣдуетъ ф-ла въ обычномъ ея алгебраическомъ видѣ и, кромѣ того, дается текущій № ф-лы, приданный ей въ текстѣ.

1 *кг.* на кв. *мм.* = $39{,}_{384}$ *пуд.* на кв. *дм.*

1 „ „ „ „ около 40 „ „ „ „

1 *пуд.* на кв. *дм.* = $36{,}_{113}$ *lbs* на кв. *дм.*

1 „ „ „ „ . около 36 „ „ „ „

Разсчетное уравненіе на растяженіе призмы, не принимая во вниманіе ея собственнаго вѣса:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Допускаемое напряженіе въ } \textit{кг.} \text{ на кв. мм.} = \text{или болѣе} \dfrac{\text{Безопасная нагрузка въ } \textit{кг.}}{\text{Безопасная площадь въ кв. } \textit{мм.}} \\ Z = \text{или болѣе } \dfrac{P}{F}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ \mathbf{7.}\ \S\ 8.$$

Допускаемыя величины Z.... въ § 9.

Высшія цифры Z, возможныя при спокойной передачѣ нагрузки:

Дерево.	Чугунъ.	Желѣзо.	Сталь.
1,25	2,5	7,5	10
1	**2**	**6**	**8**

Вытяжка (отвлечен. число). $= \dfrac{\text{Удлиненіе въ } \textit{мм.}}{\text{Соотвѣт. длина въ } \textit{мм.}}$

$i = \dfrac{\lambda}{l}$ . . . . § 11.

Коэф. упругости въ *кг.* на кв. *мм.* $= \dfrac{\text{Напряженіе въ } \textit{кг.} \text{ на кв. } \textit{мм.}\text{, вызывающее упругую деформацію}}{\text{Вытяжка (отвлеч. число)}}$

$E = \dfrac{H}{i}$ . . . . **10.** § 11.

Величины E.... въ § 12.

Среднія характерныя цифры для E:

Дерево.	Чугунъ.	Желѣзо.	Сталь.
1000	10000	20000	22000.

Усадка (отвлечен. число). $= \dfrac{\text{Укороченіе поперечнаго ребра въ } \textit{мм.}}{\text{Длина поперечнаго ребра въ } \textit{мм.}}$

$i_1 = \dfrac{\lambda_1}{l_1}$ . . . . § 15.

Усадка $= \dfrac{\text{Вытяжка}}{\text{Отъ } ^{10}/_3 \text{ до } 4}$

$i_1 = \dfrac{i}{m}$ . . . . **12.** § 15.

Max. напряженія, возбуждаемаго при спокойной передачѣ нагрузки на тѣло съ гориз. осью. $= 2 \times$ {Напряженіе, съ которымъ тѣло работаетъ послѣ передачи.}

$H_1 = 2 \,.\, H$ . . . . **16** § 16

$$\left.\begin{array}{c}\text{Разрушающее напря-}\\\text{женіе, или коэффиц.}\\\text{крѣпости, въ кг. на}\\\text{кв. мм.}\end{array}\right\} = \frac{\text{Разрушающая нагрузка въ кг.}}{\text{Площадь первоначальнаго сѣченія въ кв. мм.}}$$

$$Z_0 = \frac{P_0}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad § 17.$$

Величины Z_0 ... въ § 18.

Характерныя среднія цифры для Z_0:

Дерево.	Чугунъ.	Желѣзо.	Литое желѣзо.
10	15	35	40

Разсчетное ур-ніе тѣла, принимая во вниманіе собственный вѣсъ:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Допускаемое напря-}\\\text{женіе въ кг. на кв.}\\\text{мм.}\end{array}\right\} \begin{array}{c}=\\>\end{array} \frac{\text{Возможная нагрузка въ кг.} + \text{Собственный вѣсъ тѣла въ кг.}}{\text{Площадь въ кв. мм.}}$$

$$Z = \text{или болѣе } \frac{P+Q}{F} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{22.}\ § 21.$$

Опасное сѣченіе—самое верхнее.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Степень надежности}\\\text{постройки (отвлечен.}\\\text{число).}\end{array}\right\} = \left.\frac{\text{Разрушающее.}}{\text{Допускаемое.}}\right\} \text{напряженіе въ кг. на кв. мм.}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{Z_0}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Введеніе.}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Вытяжка (отвлечен.}\\\text{число).}\end{array}\right\} = \frac{\text{Нагрузка въ кг.} + {}^1/_2 \text{ собствен. вѣса въ кг.}}{\text{Коэф. упруг. въ кг. на кв. мм.} \times \text{Площадь въ кв. мм.}}$$

$$i = \frac{\lambda_1}{l} = \frac{P + \frac{Q}{2}}{E.F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{25\ a.}\ § 23.$$

Сопротивленіе тѣлъ сжатію.

А. Общія данныя.

33. **Деформированіе сжатаго короткаго призматическаго тѣла.** Если *короткое* призматическое тѣло нижнимъ своимъ основаніемъ A (фиг. 21) опирается на неподвижную плоскость, а на верхнее его основаніе B дѣйствуетъ внизъ нагрузка P, равномѣрно распредѣленная по всей площади B, въ такомъ случаѣ наблюдается явленіе сжатія тѣла, совершенно обратное явленію растяженія, т.-е. всѣ плоскости поперечныхъ сѣченій тѣла перемѣщаются параллельно самимъ себѣ по направленію сверху внизъ, продольныя ребра тѣла испытываютъ укороченіе, а въ поперечномъ направленіи тѣло слегка раздается.

Сущность явленія сжатія нисколько не измѣняется, если ось AB *короткаго* призматическаго бруска будетъ горизонтальна (фиг. 22) и на его основанія будетъ дѣйствовать встрѣчная *центральная* нагрузка.

Законъ *Гука*, выражаемый ф-лами **2** и **10**, и здѣсь также вполнѣ подтверждается опытомъ, пока тѣло получаетъ упругія укороченія, исчезающія по удаленіи нагрузки:

$$\lambda = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{E_1} \qquad \textbf{60.}$$

Только здѣсь λ будетъ не удлиненіе продольнаго ребра, а его *укороченіе*. Величина E_1 наз. *коэф. упругости при сжатіи*. Опытомъ обнаружено, что для металловъ и дерева величины E и E_1 коэффиціентовъ упругости при растяженіи и сжатіи такъ мало разнятся одна отъ другой, что для цѣлей практики эта разница не имѣетъ никакого значенія, и принято считать ихъ одинаковыми, т.-е. $E = E_1$.

Если это такъ, то это значитъ, что нагрузка, которая сначала сжимаетъ короткое призматическое тѣло, а затѣмъ растягиваетъ его, производитъ въ обоихъ случаяхъ одинаковыя по величинѣ деформаціи. Отношеніе $\lambda : l$ здѣсь наз. *усадкою*.

34. **Ур-іе напряженій и разсчетное ур-іе.** Такъ какъ рѣчь идетъ о сжатіи *короткаго* призматическаго тѣла, поэтому безразлично будетъ ли ось этого тѣла горизонтальна или вертикальна, ур-іе напряженій можно представить въ видѣ ф-лы **3** (см. § 7), т.-е., не обращая вни-

манія на собственный вѣсъ тѣла (фиг. 21), можно считать, что всѣ его сѣченія одинаково напряжены и *одинаково опасны*. Поэтому и разсчетное ур-іе получится изъ предыдущаго, замѣняя въ нихъ величину H допускаемымъ напряженіемъ при сжатіи.

Пусть обозначаютъ:

D—допускаемое напряженіе при сжатіи въ кг. на кв. мм.,

D_0—разрушающее напряженіе при сжатіи въ кг. на кв. мм.

Тогда разсчетное ур-іе при сжатіи будетъ

$$D = \text{или болѣе } \frac{P}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{61.}$$

Степень надежности постройки

$$ф = D_0 : D$$

Величина *безопасной площади* поперечнаго сѣченія будетъ:

$$F = \text{или болѣе } \frac{P}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{61,а.}$$

Величина *безопасной нагрузки*

$$P = \text{или менѣе } D \cdot F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{61,б.}$$

35. **Величины напряженій, допускаемыхъ при сжатіи и разрушающихъ тѣло при сжатіи.** Величина напряженія, при которомъ короткое тѣло разрушается путемъ сжатія, сдавливанія или раздробленія при давленіи на тѣло, наз. *разрушающимъ напряженіемъ матеріала при сжатіи*, или *коэф. крѣпости*, или *временнымъ сопротивленіемъ матеріала*. Называютъ также иногда величину разрушающаго напряженія при растаженіи Z_0 *коэффиціентомъ абсолютной крѣпости*, а величину D_0—*коэф. обратной крѣпости*.

Разрушеніе кубовъ изъ металла и камня сопровождается обыкновенно появленіемъ въ тѣлѣ нѣсколькихъ наклонныхъ къ оси поверхностей, вдоль которыхъ образуются трещины въ матеріалѣ и начинается взаимное скольженіе прилегающихъ одинъ къ другому элементовъ. Выкрошившійся на бокахъ тѣла матеріалъ прикрываетъ внутри нѣкоторую массу его, которая держится сравнительно плотно и всегда имѣетъ видъ или одной пирамиды, или двухъ усѣченныхъ, соткнутыхъ своими малыми основаніями, съ осью, направленною приблизительно по направленію дѣйствія нагрузки. Короткіе цилиндры и призмы изъ дерева разрушаются путемъ разслоенія ихъ на продольные тонкіе элементы, которые выгибаются въ сторону и переламываются.

Величины напряженій допускаемыхъ и разрушающихъ приведены въ табл. 9-й.

Таблица 9-я.

НАЗВАНІЕ МАТЕРІАЛОВЪ.	Въ кг. на квадрат. мм. Допускаемое напряженіе.	Въ кг. на квадрат. мм. Рузрушающее напряженіе.
Желѣзо сварочное	9—6	35—55
„ литое (Flusseisen)	12—6	35—55
Сталь литая	15—8	70—150
Стальное литье	12—6	28—50
Чугунъ	9—6	60—80
Свинецъ	—	0,5—1,25*)
Латунь	0,75	7,5
Бронза пушечная	—	100
Красная мѣдь кован.	9—6	40—70
Дубъ ‖ волок.	0,65—0,7	6,6
„ ⊥ „	0,35—0,4	3,5
Сосна ‖ „	0,45—0,5	5
„ ⊥ „	0,22—0,25	2,2
Базальтъ	0,75—1,0	10—32
Гранитъ	0,45	8—20**)
Известнякъ	0,25	4—20
Песчаникъ	0,15—0,30	2,5—18
Мраморъ	0,25	—
Кирпичная кладка на извести	0,07	0,3 0,4
„ „ „ портланд. цементѣ.	0,12—0,14	1,6—3,2
„ „ „ романск. „	0,08—0,12	0,8—2,0
Твердый грунтъ	0,025—0,05	—

Сравнивая цифры табл. *7* и *9*, видимъ, что желѣзо и сталь сопротивляются сжатію почти такъ же, какъ и растяженію, или иногда только немного лучше, а дерево — много хуже. Совершенно иначе обстоитъ дѣло съ красной мѣдью, бронзой и чугуномъ. Эти матеріалы сопротивляются сжатію гораздо лучше, чѣмъ растяженію. Въ особенности рѣзкая разница выходитъ для чугуна, который сжатію сопротивляется въ *4—5* разъ болѣе, чѣмъ растяженію. Подобное же явленіе замѣчается и по отношенію къ различнаго рода камнямъ, естественнымъ и искусственнымъ.

*) Эта цифра м б повышена вдвое, если будетъ существовать препятствіе расползанію свинца въ стороны.

) Финляндскій гранитъ, доставленный въ Парижъ на постройку моста **Императора Александра III-го, оказалъ слѣдующія величины D_0:

красный гранитъ 28,77
сѣрый „ 26,72

Изъ такого же краснаго гранита выполнены всѣ гранитныя части памятника **Императору Александру II-му** въ Москвѣ.

Другая особенность явленія заключается въ томъ, что почти у всѣхъ матеріаловъ съ уменьшеніемъ заданной высоты тѣла повышается его крѣпость. Испытывая круглые чугунные бруски діам. 20 $^m/_m$ съ различной высотой, проф. *Бахъ* нашелъ слѣдующія величины разрушающихъ напряженій для нихъ: при $Z_0 = 18,6$ *кг.* и

при высотѣ бруска въ 40 $^m/_m$. . . . $D_0 = 72,3$

" " " " 10 $^m/_m$. . . . $D_0 = 85,8$

Еще болѣе рѣзкая разница между величинами D_0 для одного и того же матеріала, но при разной высотѣ бруска, была найдена для свинца. Кромѣ того, при работахъ съ нимъ легче, чѣмъ съ другими матеріалами, подмѣчается третья особенность явленія сжатія, которая состоитъ въ томъ, что подъ большимъ давленіемъ всѣ матеріалы приходятъ въ особое состояніе *размягченія* и начинаютъ усиленно деформироваться, выказывая сильную наклонность къ распространенію въ поперечномъ направленіи относительно дѣйствующей силы, или, какъ говорятъ, къ *текучести*. Усиленію этого свойства способствуетъ нагрѣваніе матеріала передъ его сдавливаніемъ.

Въ практикѣ пользуются этимъ свойствомъ матеріаловъ въ весьма широкихъ размѣрахъ — при заготовкѣ пуль и дроби, при чеканкѣ монетъ и медалей, для прессованія различныхъ деталей изъ раскаленнаго желѣза (способъ *Haswell*), для прессованія только что отлитой стали (способъ *Whitworth*) при выдѣлкѣ изъ нея пушекъ, валовъ и т. п.

Для полученія отчетливаго изображенія на медали различные матеріалы требуютъ неодинаковаго давленія. Если желаютъ выбить изображеніе съ одного удара, для этого требуется измѣненіе напряженія на поверхности матеріала въ такой послѣдовательности *):

свинецъ	1600 *atm.*	алюминій	11000 *atm.*
олово	1900 "	красн. мѣдь, латунь	12000 "
мраморъ	4100 "	бронза, желѣзо, слоновая кость . .	13000 "
цинкъ	7000 "		

Если изображеніе на слоновой кости нужно получить не съ одного, а съ трехъ разъ, и послѣ каждаго удара обработывать слоновую кость горячей водой въ теченіе получаса, тогда давленіе можетъ быть понижено при прессованіи до 4100 *atm.*; при прессованіи бронзы подобную же роль играетъ отжигъ ея.

Явленіе текучести подъ высокимъ давленіемъ весьма рельефно было обнаружено опытомъ и надъ такими матеріалами, какъ мраморъ, каменная соль и т. п. Все это заставляетъ думать, что и при напластованіи различныхъ породъ, входящихъ въ составъ земной коры, явленіе текучести должно было играть весьма видную роль.

Хотя многіе матеріалы и оказываются весьма стойкими по отношенію къ сжатію, тѣмъ не менѣе возбуждать и передавать сжимающую

*) *Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing.*, 1892, № 32.

нагрузку на части машинъ и сооруженій, гдѣ только возможно, избѣгаютъ, въ особенности при болѣе или менѣе значительной длинѣ сжимаемой части, такъ какъ явленіе сжатія при этомъ весьма легко переходитъ въ явленіе поперечнаго *выгибанія,* сопровождающагося переломомъ излишне нагруженной части. Длинное растянутое, прочно разсчитанное тѣло всегда находится *въ устойчивомъ положеніи равновѣсія,* тогда какъ по отношенію къ болѣе или менѣе длинному сжатому тѣлу никогда этого сказать нельзя: его легко можетъ вывести изъ равновѣсія и выгнуть въ сторону даже и небольшая случайная поперечная нагрузка.

Б. Равномѣрное распредѣленіе напряженій сжатія на поверхности соприкосновенія двухъ тѣлъ.

36. **Поверхность стыка плоская.** Поверхность соприкосновенія двухъ тѣлъ называютъ ихъ *стыкомъ.* Если стыкъ плоскій, то равномѣрное распредѣленіе на немъ напряженій сжатія возможно только въ такомъ случаѣ, когда тѣло, передающее нагрузку на стыкъ, имѣетъ форму призмы, всѣ поперечныя сѣченія которой нагружены равномѣрно, и когда въ то же время тѣло, воспринимающее нагрузку, способно оказать воспроизводимому на него давленію во всѣхъ точкахъ поверхности одинаковое сопротивленіе. Для этого недостаточно выполненія одного только условія, чтобы составная изъ всей нагрузки проходила чрезъ центръ тяжести стыка. Это послѣднее условіе всегда должно быть выполнено, но не одно оно, а въ соединеніи съ двумя первыми условіями — равномѣрности непосредственной отдачи давленія на стыкъ и равномѣрности воспріятія его стыковъ.

Для примѣра пусть имѣемъ подвѣску для приводнаго вала, представленную въ эскизѣ на фиг. 23. Натяженіе отъ ремней идетъ въ верхній этажъ, и поэтому нагрузка P направлена кверху. Предположимъ, что направленіе ея проходитъ чрезъ центръ тяжести плоской сверху опорной плиты B. Если тѣло C подвѣски расположено не центрально относительно нагрузки, то и равномѣрности распредѣленія давленій на стыкѣ ожидать нельзя. Къ этому возможно болѣе или менѣе приблизиться только слѣдующимъ образомъ: 1) располагая тѣло C (фиг. 24 и 25), передающее нагрузку отъ вкладышей къ плитѣ, центрально относительно нагрузки, 2) передавая давленіе отъ плиты на опору не всей поверхностью, а двумя или четырьмя элементами ея, *рабочими поверхностями E, E,* расположенными симметрично относительно главныхъ геометрическихъ осей плиты и центрально относительно дѣйствія нагрузки; 3) вызывая на стыкѣ посредствомъ затяжки болтовъ, прикрѣпляющихъ подвѣску, *предварительное давленіе,* значительно превышающее величину нагрузки.

Въ этихъ трехъ условіяхъ и заключаются общія руководящія начала для передачи давленій на стыкъ вообще всякихъ двухъ тѣлъ при

обстоятельствахъ, наиболѣе близко подходящихъ къ равномѣрному распредѣленію давленій на поверхности стыка.

37. **Поверхность стыка цилиндрическая.** Пусть имѣемъ цилиндрическое тѣло A (фиг. 26), обвитое на внѣшней его поверхности тонкою лентой B, одинаковой ширины l; лента охватываетъ полную окружность и разрѣзана въ мѣстѣ C на горизонтальномъ діаметрѣ. Если концы ленты будемъ стягивать двумя встрѣчными, одинаковыми по величинѣ силами, тогда на поверхности стыка ленты съ цилиндромъ розовьются нормальныя давленія и силы сопротивленія, равныя имъ и прямо противоположныя. Внѣшнія силы P,P взаимно уравновѣшиваются между собою и даютъ алгебраическую сумму проекцій на оси координатъ и алгебраическую сумму моментовъ равными нулю при всякомъ расположеніи осей координатъ; тѣ же условія д. б. соблюдены и относительно силъ упругости, возбужденныхъ на цилиндрическомъ стыкѣ, и д. б. соблюдены тоже при всякомъ расположеніи осей координатъ, а это возможно только при одномъ условіи, когда силы упругости равномѣрно распредѣлены по поверхности стыка.

Допустимъ на время, что силы упругости на стыкѣ не даютъ одинаковаго распредѣленія напряженія, а измѣняются по какому-либо закону. Возьмемъ *произвольный* діам. ab (фиг. 27) и подъ угломъ β къ нему два радіальныхъ направленія oc и od; къ точкамъ c и d пусть прилегаютъ два симметрично расположенныхъ элемента площади $l.r.d\beta$ въ видѣ двухъ элементарныхъ прямоугольниковъ, у которыхъ длина $=$ ширинѣ ленты l, а ширина, считаемая по окружности стыка, соотвѣтствуетъ безконечно малому центральному углу $d\beta$. На протяженіи $r\,.\,d\beta$ по окружности стыка величину напряженія можно считать постоянною; пусть въ точкѣ d она будетъ H_1, а въ точкѣ c — H_2. Тогда величины элементарныхъ силъ при этихъ точкахъ R_1 и R_2 могутъ быть написаны такъ:

$$R_1 = l\,.\,r\,.\,d\beta\,.\,H_1$$

$$R_2 = l\,.\,r\,.\,d\beta\,.\,H_2$$

Лента подъ дѣйствіемъ силъ упругости находится въ равновѣсіи, слѣд., проекціи силъ R_1 и R_2 на діаметръ ab д. б. равны между собою; но т. к. точки c и d взяты подъ одинаковымъ угломъ къ произвольному діам. ab, поэтому необходимо, чтобы R_1 было $= R_2$, а для этого нужно, чтобы въ двухъ произвольно взятыхъ точкахъ стыка существовало равенство $H_1 = H_2$, т. е. чтобы всѣ напряженія отъ силъ упругости были $=$ между собою и $= H$.

Найдемъ теперь ур-іе крѣпости для стыка и для ленты. Выдѣлимъ кусокъ ленты CD, опредѣляемый центральнымъ угломъ δ, и разсмотримъ равновѣсіе этой части ленты послѣ того, какъ упругое противодѣйствіе нагрузкѣ P,P уже возбуждено. Для этого въ сѣченіи D приложимъ силу Q, замѣняющую собою дѣйствіе части DE на CD. Тогда на часть CD ленты, находящейся въ равновѣсіи, будутъ дѣйство-

вать: вертикальная сила P сверху внизъ, наклонная сила Q снизу вверхъ и силы упругости на части CD по направленію отъ центра къ окружности. Проектируя всѣ эти силы на горизонтальный діаметръ и на вертикальный, получимъ 2 условія равновѣсія. Если R будетъ сила упругости, дѣйствующая подъ угломъ β къ горизонтали, то мы будемъ имѣть:

сумму проекцій всѣхъ силъ на горизонталь:

$$Q \cdot Sin\ \delta = \sum_0^\delta R \cdot Cos\ \beta \quad \ldots \ldots \ldots \text{a.}$$

а на вертикаль:

$$Q \cdot Cos\ \delta + \sum_0^\delta R \cdot Sin\ \beta = P \quad \ldots \ldots \text{в.}$$

Выраженіе элементарной силы мы имѣли въ такомъ видѣ:

$$R = l \cdot r \cdot d\beta \cdot H,$$

поэтому ур-іе **a** приметъ видъ:

$$Q \cdot Sin\ \delta = l \cdot r \cdot H \cdot \int_0^\delta Cos\ \beta \cdot d\beta = l \cdot r \cdot H \cdot Sin\ \delta,$$

или

$$Q = l \cdot r \cdot H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{c.}$$

Точно также вмѣсто ур-ія **в** получимъ:

$$Q \cdot Cos\ \delta + r \cdot l \cdot H \cdot \int_0^\delta Sin\ \beta \cdot d\beta = P, \text{ или}$$

$$Q \cdot Cos\ \delta - r \cdot l \cdot H(Cos\ \delta - 1) = P \quad \ldots \ldots \text{д.}$$

Соединяя ф-лы **c** и **д** въ одну, находимъ:

$$P = Q = r \cdot l \cdot H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{e.}$$

Формула **e** показываетъ намъ слѣдующее:

1) *Всѣ сѣченія ленты равноопасны.*

2) *Каждое изъ сѣченій ленты натянуто съ тою же силою, какъ и свободный конецъ ея.*

3) *Напряженіе на стыкѣ ленты съ цилиндромъ одинаково съ тѣмъ, которое получилось бы, если бы заданную нагрузку распредѣлить равномѣрно на вытянутой полоскѣ той же ленты съ длиною, равной радіусу цилиндра.*

Если толщина ленты будетъ k, допускаемое напряженіе для матеріала ленты—Z, а допускаемое напряженіе на стыкѣ—D, тогда ур-іе крѣпости ленты будетъ:

$$Z = \text{или болѣе } \frac{P}{k \cdot l},$$

а ур-іе крѣпости стыка—

$$P = \text{или менѣе } r \cdot l \cdot D.$$

Сущность явленія не измѣнится, если мы представимъ себѣ цилиндръ вогнутымъ, а ленту—соприкасающеюся къ нему своей выпуклой стороной (фиг. 28).

Сущность явленія не измѣнится также и тогда, когда лента будетъ имѣть такія перемѣщенія относительно цилиндра, которыя не будутъ вліять на величину нагрузки, приложенной къ свободному концу ленты; а это возможно при перемѣщеніи ленты только *вдоль оси* цилиндра параллельно самой себѣ. Примѣръ ленты, заправленной внутрь цилиндра (фиг. 28), распираемой тангенціальными силами P, P и перемѣщаемой въ то же время вдоль оси цилиндра, находимъ въ чугунныхъ поршневыхъ пружинахъ.

Вопросы для лучшаго усвоенія этого §:

1. Къ двумъ ур-іямъ **а** и **б** добавить еще ур-іе моментовъ относительно точки O (фиг. 26).

2. Взять уголъ δ болѣе 90^0 и снова написать *3* ур-ія равновѣсія.

3. Выдѣлить произвольный кусокъ ленты MN и написать условія равновѣсія его.

4. Выдѣлить половину ленты CDE и написать ур-ніе моментовъ дѣйствующихъ на нее силъ относительно точки E.

B. Неравномѣрное распредѣленіе напряженій сжатія на поверхности соприкосновенія тѣлъ.

38. **Общій случай неравномѣрнаго распредѣленія напряженій сжатія на плоскомъ стыкѣ двухъ соприкасающихся тѣлъ.** Пусть имѣемъ два тѣла X и Y (фиг. 29), соприкасающихся между собою по плоскому стыку AB; изъ нихъ тѣло Y пусть будетъ неподвижнымъ, а тѣлу X сообщаются перемѣщенія вокругъ оси O, параллельной плоскости стыка и нормальной къ плоскости чертежа. Предположимъ, что тѣло X оказываетъ значительно большее сопротивленіе сжатію, чѣмъ тѣло Y, что деформаціи, испытывыемыя тѣломъ X подъ дѣйствіемъ вращательнаго момента весьма малы и можно ими пренебречь сравнительно съ деформаціями тѣла Y. Другими словами, мы предполагаемъ, что плоскость AB, принадлежащая тѣлу X, не измѣняя своей формы, перемѣщается въ пространствѣ и врѣзается въ тѣло Y; при этомъ каждая изъ точекъ плоскости AB описываетъ одинъ и тотъ же центральный уголъ e, а сама линія AB перемѣщается въ положеніе A_1B_1. Всѣ деформаціи, испытываемыя тѣломъ Y, упругія, такъ что по прекращеніи дѣйствія вращательнаго момента оба тѣла X и Y снова будутъ соприкасаться одно къ другому по плоскости стыка AB.

Разсмотримъ перемѣщеніе произвольной точки a, радіусъ векторъ которой $Oa = r$ и дѣлаетъ уголъ β съ вертикалью. При дѣйствіи вращательнаго момента M точка a перемѣщается въ b, причемъ

$$\text{дуга } ab = r \,.\, e.$$

Вслѣдствіе допущенія, что всѣ деформаціи тѣла Y упругія, незначительныя, мы можемъ принять длину дуги ab равной длинѣ стяги-

вающей ее хорды. Проектируя ab на поверхность стыка, проведемъ bc $\perp$ къ AB; тогда bc представитъ собою величину вдавливанія или смятія матеріала при точкѣ a. Опредѣлимъ эту величину

$$bc = ab \,.\, Sin \quad bac = r \,.\, e \,.\, Sin\, \beta.$$

Но $$r \,.\, Sn\beta = af, \text{ поэтому}$$

$$bc = e \,.\, af \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{а.}$$

Такимъ образомъ видно, что величина смятія въ произвольной точкѣ a пропорціональна угловому перемѣщенію e и длинѣ af, т. е. проекціи радіуса вектора точки на направленіе стыка. А такъ какъ при существованіи упругихъ перемѣщеній на поверхности стыка величины самыхъ перемѣщеній будутъ пропорціональны напряженіямъ матеріала, слѣдовательно, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ *нормальныя къ поверхности стыка напряженія матеріала будутъ пропорціональны проекціямъ радіусовъ векторовъ соотвѣтственныхъ точекъ на плоскость стыка.*

На этомъ основаніи *кривая напряженій* на поверхности AB (фиг. 29) будетъ прямою mn, проходящею чрезъ точку f. Ур-іе крѣпости стыка AB получится, написавши условіе равновѣсія силъ упругости, возбужденныхъ на стыкѣ, съ моментомъ M, вращающимъ тѣло X.

Пусть обозначаютъ:

D, H и d (фиг. 29) —напряженія сжатія на поверхности стыка въ точкахъ B, a и A;

$\left.\begin{array}{l} t = fB \\ x = fa \\ s = fA \end{array}\right\}$ — разстоянія соотвѣтственныхъ точекъ отъ ребра f, или иначе, плечи напряженій D, H и d относительно оси вращенія O;

l — длина плоскости стыка, т. е. размѣръ ея, параллельный оси вращенія O.

Изъ чертежа имѣемъ:

$$\frac{D}{t} = \frac{H}{x} = \frac{d}{s}, \text{ откуда}$$

$$\left.\begin{array}{l} H = D \,.\, \dfrac{x}{t} \\[2ex] d = D \,.\, \dfrac{s}{t} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{б.}$$

Если черезъ точку a въ плоскости стыка проведемъ прямую, параллельную оси O, тогда можно вообразить себѣ прилегающимъ къ этой прямой элементъ поверхности $l.dx$ и допустить, что во всѣхъ точкахъ этого элемента будетъ существовать одна и та же величина напряженія, равная H. Тогда сила упругаго сопротивленія этого элемента площади можетъ быть выражена такъ:

$$p = l.dx.H.$$

Моментъ этого сопротивленія относительно оси O будетъ $= p.x$, а при равновѣсіи силъ упругости, возбужденныхъ на стыкѣ AB, съ моментомъ M мы должны имѣть:

$$M = \sum p.x = \int_s^t D.\frac{l}{t}.x^2.dx$$

$$M = D.\frac{l}{3t}.(t^3 - s^3) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{62.}$$

Это и будетъ ур-іе крѣпости стыка AB, если сдѣлать въ немъ D равнымъ допускаемому напряженію смятія.

Ф-ла **62** показываетъ, что крѣпость стыка зависитъ не столько отъ длины его l, сколько отъ размѣровъ его въ ширину, т. е. по направленію $\perp$ къ оси вращенія O, и главнымъ образомъ отъ положенія точки B, наиболѣе удаленной отъ оси вращенія: чѣмъ она будетъ далѣе, тѣмъ стыкъ будетъ прочнѣе, тѣмъ меньшее напряженіе онъ будетъ испытывать. Если $s = 0$, то

$$M_1 = D.\frac{l.t^2}{3} = \frac{D.l.t}{2} \cdot \frac{2}{3}t \quad \dots\dots \quad \mathbf{62,a.}$$

Эта ф-ла говоритъ намъ, что *моментъ сопротивленія при напряженіяхъ, неодинаковыхъ между собою, но равномѣрно возрастающихъ отъ* **0** *до нѣкотораго напряженія* **D**, *берется такъ, какъ будто бы* **вся** *сила упругости на поверхности стыка была сосредоточена* **въ центрѣ давленія,** п. ч. $l.t$ есть величина поверхности стыка, $0{,}5.D.l.t$ представляетъ собою всю величину силы упругости, пропорціональной площади треугольника fnB, а множитель $2t:3$ есть разстояніе центра давленія отъ оси O, т. е. разстояніе центра тяжести треугольника fnB отъ точки f.

Пользуясь этимъ правиломъ можно и ф-лу **62** воспроизвести, какъ разность моментовъ силъ упругости на поверхности fB и fA. Моментъ, выдерживаемый поверхностью стыка fB, представляетъ ф-ла **62 а**; а для поверхности стыка fA этотъ моментъ былъ бы:

$$M_2 = \frac{d.l.s}{2} \cdot \frac{2}{3}s = D.\frac{s}{t} \cdot \frac{ls^2}{3}.$$

Взявши разность M_1 и M_2, мы и получимъ ф-лу **62**. Изъ нея видно также, что продолжать стыкъ двухъ тѣлъ лѣвѣе Of, т. е. лѣвѣе перпендикуляра къ поверхности стыка, безполезно, ибо та часть тѣла не будетъ помогать сопротивленію.

Изложенная здѣсь теорія неравномѣрнаго распредѣленія напряженій сжатія на плоскомъ стыкѣ находитъ себѣ примѣненіе въ машиностроеніи при разсчетѣ *шпонокъ*, посредствомъ которыхъ заклиниваются на валу вращающіяся части (шкивы, колеса, блоки, маховики, кривошипы и пр.), при разсчетѣ смятія на стыкѣ подвѣсокъ, кронштейновъ и проч.

39. **Сжатіе плоскаго стыка двухъ тѣлъ при эксцентричномъ ихъ нагруженіи.** *a*) *Прямоугольная форма сѣченія тѣла.* Пусть имѣемъ 2 тѣла A и B (фиг. 30) съ площадью основанія $2a \times в$ и высотою l_1 и l_2. Нижнее изъ нихъ покоится на основаніи, а верхнее воспринимаетъ нагрузку P, равномѣрно распредѣленную въ планѣ тѣла вдоль линіи mn, отстоящей отъ оси тѣла на разстояніе f.

При такомъ эксцентричномъ нагруженіи тѣла A законъ распредѣленія напряженій сжатія на стыкѣ между A и B выразится какою либо прямою OS. Крайняя правая ордината ея будетъ выражать собою наибольшее напряженіе на стыкѣ D, которое можетъ быть = допускаемому. Если на произвольномъ разстояніи x отъ точки O напряженіе будетъ H, то

$$\frac{H}{D} = \frac{x}{2a - c}, \text{ откуда}$$

$$H = D \cdot \frac{x}{2a - c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ в.}$$

Такое напряженіе будетъ у всѣхъ точекъ элементарной площади $b.dx$, взятой на разстояніи x отъ ребра вращенія O. Величина элементарной силы будетъ

$$q = b.dx.H.$$

Первое условіе равновѣсія нагрузки P съ силами упругости, возбужденными на стыкѣ, будетъ заключаться въ томъ, что нагрузка P должна равняться алгебраической суммѣ всѣхъ силъ q, а 2-е —, что моменты ихъ д. б. = между собою. По 1-му условію:

$$P = \Sigma q = \int_0^{2a-c} b.dx.D.\frac{x}{2a - c}, \text{ или}$$

$$P = b.D.\frac{2a - c}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{63.}$$

По 2-му условію:

$$P\ (f + a - c) = \Sigma\ q.x = \int_0^{a-c} b.dx.x.D.\frac{x}{2a - c}$$

$$P\ (f + a - c) = \frac{b.D}{3}(2a - c)^2 \quad \ldots\ldots \mathbf{64.}$$

Получили 2 ур-ія, въ которыхъ содержатся двѣ неизвѣстныя величины — напряженіе D и разстояніе c точки O отъ крайняго лѣваго очертанія тѣла. Для нахожденія c раздѣлимъ ур-іе **64** на **63**:

$$f + a - c = 2 \cdot \frac{2a - c}{3} = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}c, \text{ или}$$

$$c = 3f - a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ e.}$$

Послѣ этого изъ ур-ія **63** или **64**, можетъ быть найдена величина D, или же размѣры a и b подъ условіемъ, чтобы D была допускаемая величина.

Формула **e** показываетъ, что *весь стыкъ между тѣлами A и B приметъ участіе въ сопротивленіи сжатію только тогда, когда эксцентриситетъ* **f** *нагрузки будетъ = или менѣе* $^1/_6$ *ширины тѣла 2a*, и что это соотношеніе вовсе не зависитъ отъ толщины тѣла *b*.

b) *Эллиптическая форма сѣченія тѣла.* Пусть имѣемъ 2 тѣла *A* и *B* (фиг. 31) съ эллиптическимъ основаніемъ, полуоси котораго *a* и *b* Допустимъ, что весь стыкъ участвуетъ въ сопротивленіи такимъ образомъ, что напряженіе въ точкѣ *O* есть нуль, а въ точкѣ *t*—*max*. Напряженіе *H* на разстояніи *x* отъ центра вычислится такъ:

$$\frac{H}{D} = \frac{a+x}{2a}, \text{ или}$$

$$H = D \cdot \frac{a+x}{2a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{f}.$$

Для полученія элементарной силы *q*—здѣсь также выдѣлимъ элементарную площадь $2y \cdot dx$, тогда

$$q = 2y \cdot dx \cdot H.$$

Затѣмъ выразимъ опять тѣ же два условія равновѣсія, что и въ предыдущемъ случаѣ. По 1-му изъ нихъ:

$$P = \Sigma q = \int_0^{2a} 2y \cdot dx \cdot D \cdot \frac{a+x}{2a}, \text{ или}$$

$$P = \frac{D}{2a} \int_0^{2a} 2y \cdot dx \cdot (a+x) = \frac{D}{2a} \cdot U.$$

Интегралъ, обозначенный буквой *U*, представляетъ собою алгебраическую сумму произведеній изъ элементарныхъ площадей $2y \cdot dx$ на разстоянія ихъ $a+x$ отъ оси OO_1. По теоремѣ о центрѣ тяжести эта алгебраическая сумма, распространенная на всю площадь сѣченія и называемая *статическимъ моментомъ площади*, будетъ равна всей площади, умноженной на разстояніе ея центра тяжести отъ той же оси OO_1, т. е.

$$U = \pi \cdot a \cdot b \cdot a.$$

Поэтому

$$P = \frac{D}{2} \cdot \pi \cdot a \cdot b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{65.}$$

По 2-му условію получимъ:

$$P(a+f) = \Sigma \cdot q \cdot (a+x) = \int_0^{2a} 2y \cdot dx \cdot D \cdot \frac{(a+x)^2}{2a}.$$

$$P(a+f) = \frac{D}{2a} \int_0^{2a} (a^2 + 2ax + x^2) \cdot 2y \cdot dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{h}.$$

Интегралъ равенства h распадается на три отдѣльныхъ. Изъ нихъ 1-й будетъ:

$$\frac{D}{2a}a^2 \cdot F = \frac{D}{2} \cdot a \cdot \int_0^{2a} 2y \cdot dx = \frac{D \cdot a'}{2} \cdot \pi \cdot a \cdot b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{i}.$$

Величина F представляетъ собою площадь сѣченія данныхъ тѣлъ A и B.

Второй интегралъ будетъ:

$$D \cdot U_0 = D \cdot \int_0^{2a} x \cdot 2y \cdot dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{j},$$

т. к. $U_0 = 0$, ибо это есть статическій моментъ всей площади сѣченія, взятый относительно линіи yy, проходящей чрезъ центръ тяжести сѣченія; по теоремѣ о центрѣ тяжести эта величина U_0 равна всей площади F, умноженной на координату x_0 ея ц. т. относительно оси yy, но здѣсь $x_0 = 0$.

Третій интегралъ равенства h будетъ:

$$\frac{D}{2a} \cdot \mathrm{I} = \frac{D}{2a} \cdot \int_0^{2a} x^2 \cdot 2y \cdot dx = \frac{D}{2a} \cdot \frac{\pi \cdot b \cdot a^3}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{k}.$$

Величина I, входящая въ это рав., есть выраженіе *момента инерціи эллиптическаго сѣченія* относительно его малой оси. Выводъ этого выраженія данъ въ теоріи сгибанія, а здѣсь приведенъ прямо окончательный результатъ. Теперь мы можемъ составить ф-лу h, внося въ нее всѣ ея составныя части:

$$P(a+f) = \frac{D}{2} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b + \frac{D}{8} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b = \frac{5}{8} \cdot D \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{66}.$$

Получили 2 ур-ія крѣпости — **65** и **66**. Изъ нихъ можно найти или a и b по даннымъ P, f и D — въ случаѣ разсчета тѣла строющагося, или же изъ нихъ находятъ f и D по даннымъ P, a и b — въ случаѣ тѣла, уже существующаго. Дѣля **66** на **65**, получаемъ:

$$f + a = \frac{5}{4} a, \text{ откуда}$$

$$f = \frac{a}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{m}.$$

Эта ф-ла показываетъ, что **весь** *стыкъ между тѣлами* **A** *и* **B** *эллиптическаго сѣченія приметъ участіе въ сопротивленіи сжатію тогда только, когда эксцентриситетъ* **f** *нагрузки будетъ = или менѣе четверти большой полуоси эллипса*, и что это соотношеніе вовсе не зависитъ отъ размѣра другой полуоси эллипса.

40. Напряженія сжатія на поверхности двухъ соприкасающихся цилиндровъ—выпуклаго и вогнутаго—при одинаковой величинѣ ихъ радіусовъ. Пусть имѣемъ 2 цилиндра—выпуклый и вогнутый, которые

имѣютъ общую ось O (фиг. 32) и одинаковый радіусъ r; соприкосновеніе ихъ происходитъ по дугѣ man, стягиваемой центральнымъ угломъ 2δ. Предположимъ, что нагрузка, передаваемая на верхній цилиндръ, по направленію центральной линіи Oa, равномѣрно распредѣлена по всей продольной площади, которая является проекціею цилиндра man, и нагрузка на единицу площади есть q. Если вся нагрузка будетъ P, длина соприкасающейся части цилиндровъ — l, тогда:

$$q = \frac{P}{l \,.\, 2r \,.\, Sin\, \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{а.}$$

Предположимъ, что выпуклый цилиндръ выполненъ изъ матеріала, весьма хорошо сопротивляющагося сжатію, а вогнутый—изъ матеріала сравнительно слабаго, и что выпуклый цилиндръ, не измѣняя своихъ размѣровъ, вдавливается въ вогнутый.

Если перемѣщеніе оси выпуклаго цилиндра будетъ:

$$\lambda = ab = cd,$$

тогда мы видимъ, что при какой-нибудь точкѣ c, положеніе которой относительно центральной линіи будетъ опредѣляться угломъ β, величина смятія, нормальная къ поверхности цилиндра, будетъ

$$ce = \lambda \,.\, Cos\, \beta.$$

Предполагая, что всѣ деформаціи — незначительны по величинѣ и упругія, мы можемъ сказать, что, если нормальное напряженіе въ точкѣ a будетъ H, въ точкѣ c оно должно быть $H \,.\, Cos\, \beta$. Выдѣлимъ при точкѣ c вдоль всей поверхности цилиндра элементарную площадь въ видѣ прямоугольника, у котораго длина $= l$, а другое измѣреніе $= r \,.\, d\beta$; тогда элементарная сила будетъ

$$p = l \,.\, r \,.\, d\beta \,.\, H \,.\, Cos\, \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{б.}$$

Напишемъ условія равновѣсія нагрузки съ возбужденными силами упругости. Эти условія будутъ:

$$P = \Sigma\, p \,.\, Cos\, \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{в.}$$

$$o = \Sigma\, p \,.\, Sin\, \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{г.}$$

Послѣднее условіе выражаетъ, что горизонтальныя слагающія элементарныхъ силъ упругости взаимно уравновѣшиваются. Преобразуя ур-іе **в**, получимъ:

$$P = l \,.\, r \,.\, H \,.\, \int_{-\delta}^{+\delta} Cos^2\beta \,.\, d\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{д.}$$

Замѣняя интегралъ съ предѣлами отъ $(-\delta)$ до $(+\delta)$ удвоеннымъ съ предѣлами отъ O до δ и внося

$$Cos^2\beta = \frac{1 + Cos 2\beta}{2}, \text{ получимъ}$$

$$P = l.2r.H.\int_0^\delta \frac{1 + Cos 2\beta}{2}.d\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{e}$$

$$P = l.2r.H\left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4}\,Sin 2\delta\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{67.}$$

Это и есть ур-іе крѣпости цилиндрической поверхности въ общемъ видѣ. Переходя къ частному случаю, когда имѣемъ полуцилиндръ, надо сдѣлать $\delta = \frac{\pi}{2}$, тогда получимъ:

по **a**: $$q = \frac{P}{l.2r}$$

по 67: $$P = l.2r.H.\frac{\pi}{4}, \text{ откуда}$$

$$H = \frac{4}{\pi}.q \doteq 1{,}274.q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{68,}$$

т. е. *при сдавливаніи вогнутаго полуцилиндра твердымъ выпуклымъ максимальное напряженіе относится къ среднему, равномѣрно распредѣленному по проекціи опорной поверхности, какъ* **4** *относится къ* π, или иначе максимальное больше средняго на 27%.

Въ разсмотрѣнномъ случаѣ напряженія на поверхности распредѣляются по закону косинуса, поэтому являются на стыкѣ элементы поверхности, весьма сильно напряженные и вовсе ненапряженные; такое неравномѣрное распредѣленіе напряженія особенно вредно бываетъ въ томъ случаѣ, когда выпуклый цилиндръ вращается въ вогнутомъ, и послѣдній начинаетъ неодинаково изнашиваться въ различныхъ своихъ частяхъ.

Чтобы устранить это неудобство группируютъ на стыкѣ элементы, у которыхъ напряженія мало разнятся одно отъ другого. Для этого на опорной поверхности удаляютъ наиболѣе напряженные элементы ея; это достигается, дѣлая на вогнутой опорѣ вырѣзку на дугѣ ef (фиг. 33), стягиваемой угломъ 2γ. Когда будемъ писать условія равновѣсія нагрузки и силъ упругости, въ равенствѣ **e** здѣсь нужно измѣнить только предѣлы интегрированія, поставивъ нижнимъ предѣломъ не O, а γ. Тогда вмѣсто рав. **67** получимъ слѣдующее:

$$P = l.\,2r.\,H.\left(\frac{\delta - \gamma}{2} + \frac{Sin\,2\delta - Sin\,2\gamma}{4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{69.}$$

Наибольшее напряженіе будетъ въ этомъ случаѣ въ точкахъ e и f (фиг. 33). Величина его, равная $H.\,Cos\gamma$, не должна превосходить допускаемой величины D, т. ч. разсчетное ур-іе получится въ такомъ видѣ:

$$P = \frac{l.\,2r.\,D}{Cos\gamma}\left(\frac{\delta - \gamma}{2} + \frac{Sin\,2\delta - Sin\,2\gamma}{4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{69\,a.}$$

Примѣненіе данныхъ этой теоріи находимъ при устройствѣ паровозныхъ и вагонныхъ буксовыхъ подшипниковъ.

41. **Напряженія сжатія на поверхности цилиндрическаго катка.** Предположимъ, что катокъ A (фиг. 34) выполненъ изъ матеріала, значительно менѣе податливаго, чѣмъ соприкасающаяся съ нимъ часть B машины или сооруженія, что деформаціи на поверхности прикосновенія вообще весьма невелики и вызываются только у части B. Другими словами, мы предполагаемъ, что катокъ, не измѣняя своей формы, вдавливается въ тѣло B на длинѣ дуги dbe.

Пусть обозначаютъ:

r — радіусъ катка,

l — его *рабочая* длина, по которой онъ соприкасается съ тѣломъ B,

$2a = de$ — хорда, стягивающая дугу, на протяженіи которой происходитъ вдавливаніе катка, или *хорда смятія,*

$t = bc$ — наибольшая глубина вдавливанія.

Если отступимъ отъ средней вертикали вправо на разстояніе x, получимъ величину вдавливанія $mn = л$. Если проведемъ изъ точки b касательную, параллельную хордѣ de, nk — параллельно bc и обозначимъ отрѣзокъ $mk = y$, то можно написать, что

$$л = t - y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{а.}$$

По свойству окружности:

$$x^2 = y \,.\, (2r - y).$$

Но т. к. деформаціи тѣла B предположены весьма незначительными, поэтому безъ большой погрѣшности величиною y въ вычитаемомъ можно пренебречь и написать, что

$$x^2 = y \,.\, 2r, \text{ откуда } y = \frac{x^2}{2r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{б.}$$

$$\text{При } x = a, \text{ получимъ } t = \frac{a^2}{2r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{в.}$$

$$\text{Послѣ этого } л = \frac{a^2 - x^2}{2\,r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{г.}$$

Обозначая напряженіе матеріала въ вертикальномъ направленіи при точкѣ b чрезъ D, а при точкѣ m — чрезъ H, въ силу пропорціональности напряженій съ деформаціями мы можемъ написать:

$$\frac{л}{t} = \frac{H}{D} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{д.}$$

Это есть ур-іе кривой напряженій, которая въ данномъ случаѣ будетъ параболой dqe.

Послѣ этого напишемъ равновѣсіе нагрузки и силъ упругости. При вычисленіи элементарной силы p элементъ площади беремъ въ видѣ $l \,.\, dx$, тогда

$$P = \Sigma p = 2\int_0^a l \,.\, dx \,.\, D \,.\, \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \text{ или}$$

$$P = \frac{4}{3} \,.\, D.l \,.\, a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{е}$$

Величину *хорды смятія* $2a$ выбираемъ пропорціональною діаметру катка $2r$. Пусть

$$a = ж . r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.$$

Тогда $$P = \frac{2}{3} . ж . D . l . 2r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70.$$

Эта формула показываетъ, что *воспринимаемая цилиндрическимъ каткомъ нагрузка прямо пропорціональна длинѣ катка, его діаметру, допускаемому на сминаемой поверхности напряженію, а также и допускаемой длинѣ хорды смятія.*

Если ввести обозначеніе $$\kappa = \frac{2}{3} . ж . D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70\ \text{a},$$

тогда величина κ будутъ представлять собою величину нагрузки, отнесенной къ площади діаметральнаго сѣченія катка, или *приведенную нагрузку.*

Проф. *Бахъ* даетъ слѣдующія величины κ въ *кг* на кв. $^m/_m$:

для чугунныхъ катковъ, работающихъ на чугунной плоскости или выпуклой поверхности большого радіуса .... $\kappa = 0{,}25$.

для стальныхъ катковъ, при тѣхъ же условіяхъ работающихъ на стальной поверхности .... $\kappa = 0{,}60$.

Эти цифры можно считать пригодными и въ случаѣ работы катковъ съ довольно большой скоростью. Допуская для *чугуна* $D = 20$ *кг*, получимъ:

$$ж = \frac{a}{r} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\kappa}{D} = \text{около } \frac{1}{53} \ldots \text{для чугуна.}$$

Для *стали* можно принять $D = 30$ *кг*, и тогда

$$ж = \frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}6}{30} = \text{около } \frac{1}{33} \text{ для стали.}$$

Въ каткахъ, которые поворачиваются съ очень малой скоростью, напр., въ подъемныхъ кранахъ, встрѣчаются въ существующихъ устройствахъ для чугунныхъ катковъ величины

$$\kappa = \text{отъ } 0{,}4 \text{ до } 0{,}6.$$

Нѣкоторые авторы даютъ для катковъ величину нагрузки, отнесенной къ единицѣ длины по образующей катка, т. е. (см. ф-лу е).

$$\frac{P}{l} = \frac{4}{3} . D . a = q.$$

Если выражать q въ *кг.* на линейномъ $^m/_m$, а діам. катка $2r$ — въ $^m/_m$, тогда у *Trautwine* находимъ слѣдующія цифры:

а) для стальныхъ опорныхъ *катковъ,* употребляемыхъ въ мостовыхъ сооруженіяхъ и работающихъ на стальныхъ опорныхъ поверхностяхъ:

$$q = 6{,}35 . \sqrt{2r};$$

б) для *стальныхъ колесъ*, работающихъ на стальныхъ рельсахъ:

$$q = 4{,}1 \,.\, \sqrt{2r};$$

при желѣзномъ рельсѣ величина коэффиціента будетъ *3,65*, а при работѣ на чугунной полосѣ—*3,3*;

в) для *чугунныхъ колесъ*, работающихъ на желѣзныхъ рельсахъ, величина коэффиціента будетъ *2,12*, а при чугунной полосѣ—*1,7*.

Боковыя рабочія поверхности зубцовъ у зубчатыхъ колесъ представляютъ собою также родъ катковъ, подверженныхъ сдавливанію и вмѣстѣ съ тѣмъ изнашиванію, вслѣдствіе существованія относительнаго скольженія между ними. Величину q ставятъ въ такомъ случаѣ въ зависимость отъ величины скорости v на начальной окружности колесъ и берутъ въ случаѣ совмѣстной работы чугунныхъ зубьевъ и деревянныхъ:

$$q = \text{или менѣе } \frac{60}{2+v},$$

гдѣ q — давленіе въ кг., отнесенное къ 1 $^{m}/_{m}$ длины, а v — въ mt въ сек.; если оба колеса имѣютъ чугунные зубья, необработанные на зуборѣзной машинѣ, можно брать:

$$q = \text{или менѣе } \frac{120}{2+v},$$

а если зубья у колесъ нарѣзаны на машинѣ, то берутъ

$$q = \text{или менѣе } \frac{180}{2+v}.$$

Въ точныхъ измѣрительныхъ приборахъ (вѣсахъ, разрывныхъ машинахъ и т. п.) пара вращенія замѣняется острымъ ребромъ стальной закаленной призмы A (фиг. 59), опирающейся на стальную закаленную пластину B, имѣющую свою рабочую поверхность въ видѣ плоскости. При работѣ такихъ приборовъ на максимальную нагрузку допускаются величины q отъ 125 до 250 *кг.* на линейный $^{m}/_{m}$.

42. **Напряженія смятія на поверхности шарового катка.** Дѣлаемъ тѣ же предположенія относительно матеріала катка и опоры, что и въ предыдущемъ §, т. е. что катокъ, не измѣняя своей формы, вдавливается въ опору. Проекція смятаго стыка здѣсь будетъ площадью круга съ діаметромъ $2a$. Ур-іе кривой напряженій останется то же, что и въ предыдущемъ §:

$$\frac{H}{D} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

По такому закону будутъ измѣняться напряженія во всѣхъ плоскостяхъ, проходящихъ чрезъ центръ шара и направленіе слагающей внѣшней нагрузки. Элементъ площади здѣсь можно взять кольцевымъ съ окружностію $2\pi \,.\, x$ и шириною кольца dx. Тогда ур-іе равновѣсія нагрузки и силъ упругости будутъ имѣть видъ:

$$P = \int_0^a 2\pi \,.\, x \,.\, dx \,.\, D \,.\, \frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{\pi \,.\, a^2}{2} \,.\, D \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{u.}$$

И здѣсь также величину хорды смятія $2a$ выбираемъ пропорціональною діаметру катка $2r$. Пусть

$$a = ж . r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{i.}$$

Тогда

$$P = \frac{ж^2}{2} . \pi . r^2 . D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 71,$$

т. е. *воспринимаемая сферическимъ каткомъ нагрузка прямо пропорціональна площади большого круга сферы, допускаемому на сминаемой поверхности напряженію и квадрату хорды смятія.*

Если ввести обозначеніе

$$k_1 = \frac{ж^2}{2} . D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 71,a,$$

тогда k_1 будетъ представлять собою *приведенную нагрузку*, отнесенную къ площади діаметральнаго сѣченія катка. Проф. *Бахъ* даетъ для k_1 слѣдующія величины (въ kg на кв. *мм*):

$k_1 = 0.025 = \frac{1}{40}$ — для чугунныхъ шаровъ, работающихъ между чугунными плоскостями;

$k_1 = 0{,}06$ — для стальныхъ шаровъ, работающихъ между стальными плоскостями.

Вычисляя въ обоихъ случаяхъ величину ж, получимъ:

$$\text{для чугуна } ж = \sqrt{\frac{2}{40.20}} = \frac{1}{20},$$

$$\text{для стали } ж = \sqrt{\frac{2 . 0{,}06}{30}} = \text{ ок. } \frac{1}{16}.$$

По сравненію этихъ величинъ съ таковыми же предыдущаго § можно думать, что приведенныя величины k_1 даны *Бахомъ* нѣсколько высокими, и при пользованіи этими данными неизбѣжно придется встрѣтиться съ быстрымъ вынашиваніемъ плоскостей, съ которыми шаровые катки соприкасаются.

Когда шаровой катокъ работаетъ не на плоскости, а въ *желобкѣ* съ круглымъ профилемъ, радіусъ образующей котораго на $^1/_8$ болѣе радіуса катка, проф. *Бахъ* для величинъ k_1 даетъ слѣдующія цифры:

$k_1 = 1{,}25$ — для чугуннаго катка, работающаго въ чугунныхъ лункахъ,

$k_1 = 3{,}0$ — для стального катка, работающаго въ стальныхъ лункахъ.

Подсчитывая и въ этомъ случаѣ величину ж, нетрудно видѣть, что цифры эти чрезмѣрно велики и должны быть понижены по крайней мѣрѣ *вдвое*, если катки должны работать съ небольшой скоростью, или *втрое*—при непрерывной работѣ и большой скорости.

Діаметры катковъ, воспринимающихъ на себя общее давленіе, должны быть строго одинаковыми, но и въ этомъ случаѣ не слѣдуетъ вводить въ разсчетъ всего числа катковъ, имѣя въ виду разныя случайности, какъ-то: неодинаковое выбиваніе разныхъ мѣстъ опорныхъ поверхностей, попаданіе на нихъ постороннихъ тѣлъ и проч.

Г. Напряженія сжатія на стыкѣ тѣлъ, перемѣщающихся одно относительно другого.

43. Общія соображенія относительно изнашиванія трущихся стыковъ. Если взаимное расположеніе двухъ тѣлъ, соприкасающихся между собою, никогда не измѣняется, то разсчетъ нагруженнаго стыка ихъ дѣлается по величинамъ напряженій сжатія D, даннымъ въ § 35. Если же два тѣла перемѣщаются одно относительно другого, то на поверхности нагруженнаго стыка ихъ развиваются силы тренія, происходитъ превращеніе работы тренія въ теплоту, и является *изнашиваніе, истираніе стыка*, нарушающее правильность осуществленныхъ въ машинѣ геометрическихъ и кинематическихъ соотношеній и способъ раздачи нагрузокъ отдѣльнымъ частямъ ея. Пока это явленіе не было съ достаточными подробностями изучено, пока не накопился запасъ опытныхъ данныхъ по вопросу объ изнашиваніи частей машинъ при различныхъ условіяхъ ихъ работы, машиностроеніе не могло подняться на подобающую ему высоту: строились машины и аппараты, удовлетворительно функціонирующіе въ 1-е дни и 1-я недѣли работы, но вовсе не приспособленные къ *долговѣчной* правильной работѣ, къ сохраненію ими формы и размѣровъ своихъ частей даже и послѣ продолжительнаго періода работы.

Напряженіе матеріала D на покоющемся стыкѣ мы называли *напряженіемъ матеріала при сжатіи*, или *при давленіи*, или *при смятіи*; въ отличіе отъ этого напряженіе матеріала на трущемся стыкѣ мы будемъ называть *напряженіемъ изнашиванія* и обозначать буквой K.

Разъ навсегда нужно запомнить слѣдующее:

1. *Напряженіе изнашиванія д. б. во много разъ менѣе напряженія смятія на покоющемся стыкѣ.* Отношеніе между ними бываетъ = = и 10, и 15 и болѣе.

2. *Чѣмъ менѣе будетъ назначено напряженіе изнашиванія у какой-либо части машины, тѣмъ, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, она будетъ поставлена въ лучшія условія сопротивленія и сохраненія своихъ формъ и размѣровъ на долгое время.*

3. *Равномѣрное распредѣленіе напряженія изнашиванія по поверхности стыка всегда желательно, т. к. при этомъ можно достигнуть равномѣрнаго снашиванія стыка и получить возможность поддержанія въ машинѣ правильныхъ геометрическихъ и кинематическихъ соотношеній.*

Съ возможностью снашиванія каждаго трущагося стыка надо примириться заранѣе, но нужно умѣть продлить самый періодъ снашиванія стыка насколько возможно болѣе, нужно въ то же время предотвратить и необходимость замѣны крупныхъ и дорого стоющихъ изношенныхъ частей новыми. Съ этою послѣднею цѣлію на трущихся стыкахъ вводится *смѣнная обшивка, облицовка* въ видѣ вставныхъ *вкладышей, стакановъ, башмаковъ* и проч.

Смѣнныя части готовятся изъ стали, мѣдныхъ сплавовъ и чугуна.

Если смѣнная часть входитъ въ составъ точнаго механизма (напр., распредѣляющаго паръ и т. п.), гдѣ преслѣдуемая цѣль заключается не только въ передачѣ весьма большихъ давленій, но также еще и въ точномъ воспроизведеніи извѣстныхъ геометрическихъ свойствъ механизма, смѣнныя части обязательно выполняются *изъ закаленной стали* и окончательно отдѣлываются послѣ ихъ закалки, а иногда еще даже и послѣ законченной постановки ихъ на мѣсто.

Если же смѣнная часть при своемъ изнашиваніи кореннымъ образомъ не нарушаетъ свойствъ механизма, тогда, вводя ее, заботятся главнымъ образомъ *о сохраненіи формы и размѣровъ стыка* той части, которая соприкасается со смѣнною, а также и *объ отведеніи теплоты* съ поверхности трущихся стыковъ. Въ такомъ случаѣ смѣнныя части выполняются изъ мѣдныхъ сплавовъ *) или чугуна, и снашиванію подвергаются главнымъ образомъ онѣ, эти смѣнныя части, а не стыкъ работающаго на нихъ тѣла; но снашиваніе послѣдняго во всякомъ случаѣ при этомъ не исключается, и тамъ, гдѣ это недопустимо или нежелательно, смѣнными частями снабжаются оба тѣла на стыкѣ ихъ.

Чтобы имѣть возможность пользоваться смѣнными частями возможно болѣе продолжительное время и при томъ такъ, чтобы по мѣрѣ снашиванія, *срабатыванья* смѣнныхъ частей можно было снова возвращаться къ первоначальнымъ геометрическимъ и кинематическимъ свойствамъ механизма, *смѣнныя части ставятся на мѣсто не наглухо и снабжаются приспособленіями для установки и перемѣщенія ихъ* относительно работающаго съ ними тѣла. Иногда эти приспособленія для установки и перемѣщенія смѣнныхъ частей заключаются въ употребленіи *установительныхъ винтовъ*, *установительныхъ клиньевъ*, *чекъ* и т. п., въ другихъ же случаяхъ роль такого приспособленія исполняетъ *прокладка* между тѣломъ и смѣнною частью, и толщина этой прокладки при установкѣ и вывѣркѣ относительнаго положенія трущихся частей играетъ въ такомъ случаѣ большую роль.

Болѣе или менѣе быстрое изнашиваніе стыка зависитъ отъ слѣдующихъ главныхъ факторовъ:

1) отъ величины напряженія изнашиванія, допущенной на стыкѣ во время его работы,

2) отъ болѣе или менѣе регулярнаго и обильнаго поступленія смазки на трущійся стыкъ и возможности удержанія ея на стыкѣ,

3) отъ бо́льшей или меньшей приспособленности всего устройства къ удаленію со стыковъ развивающейся на нихъ теплоты,

4) отъ первоначальной установки стыковъ, которая нерѣдко бываетъ недостаточно тщательно сдѣланной и съ допущеніемъ принципіальныхъ ошибокъ,

5) отъ послѣдующей развѣрки частей и невнимательнаго ухода.

*) См. изданія Политехническаго О-ва: 1) *Составленіе мѣдныхъ сплавовъ*, инж.-мех. Л. С. Семенова, въ *Бюллетенѣ* № 7 за 1894—95 г., 2) *Антифрикціонные сплавы, ихъ плавка и примѣненія*, инж.-мех. П. С. Страхова, въ *Бюл.* № 10 за 1893—94 г.

Величина напряженія изнашиванія, т. е. давленія на 1 поверхности трущагося стыка, во всякомъ случаѣ должна быть такова, чтобы смазка не выдавливалась со стыковъ вполнѣ и могла держаться на нихъ. Этому помогаютъ также *смазывающія канавки*. Лучше всего ихъ прорубать на томъ изъ стыковъ, который подверженъ меньшему изнашиванію, иначе по мѣрѣ срабатыванія стыка глубина канавокъ уменьшается, и онѣ уничтожаются, вызывая нагрѣваніе стыка.

Надежнѣе всего работаютъ такіе стыки частей, которые смазываются непрерывно и сообразно со скоростью движенія. Подведеніе смазки на стыкъ должно быть сдѣлано въ томъ мѣстѣ, гдѣ давленіе на стыкѣ по возможности *меньшее;* а если оно постоянно во всѣхъ точкахъ стыка, смазка должна быть выведена на стыкъ чрезъ смазывающія канавки, имѣющія достаточную длину и достаточный объемъ. Если различныя точки стыка лежатъ въ разныхъ уровняхъ, смазка должна быть подводима въ самой верхней части стыка, и при большой скорости работы подводъ смазки сверху долженъ быть непрерывнымъ.

Удаленіе со стыковъ развивающейся на нихъ теплоты дѣлается чаще всего, благодаря теплопроводности вкладышей, стакановъ и пр., и только иногда принимаются особыя искусственныя мѣры для охлажденія стыковъ—въ видѣ циркуляціи вокругъ нихъ холодной воды, воздуха и пр.

Недолговѣчность трущихся стыковъ въ работѣ чаще всего является слѣдствіемъ невнимательнаго ухода за трущимися частями и слѣдствіемъ развѣрки ихъ положенія, когда онѣ начинаютъ *работать не всей поверхностью*, на которую сдѣланъ разсчетъ, а только частію ея, когда, слѣдовательно, происходитъ само собою непредвидѣнное сосредоточеніе давленія въ нѣкоторыхъ пунктахъ стыка, выдавливаніе съ нихъ смазки, работа сухихъ поверхностей одной по другой, усиленное развитіе при этомъ теплоты, нагрѣваніе стыковъ и царапанье ихъ одного другимъ, или *заѣданіе* — съ отдѣленіемъ иногда на поверхности стыковъ стружекъ и съ поломками.

44. Принципъ Сэллерса передачи давленія съ покоющагося стыка на трущійся. Чтобы парализовать вліяніе развѣрки или перемѣны относительнаго положенія частей на изнашиваніе ихъ стыковъ, пользуются принципомъ передачи давленій на стыки, получившимъ теперь широкое распространеніе въ практикѣ машиностроенія, благодаря трудамъ извѣстнаго американскаго строителя машинъ *William Sellers*. Въ основѣ этого принципа лежитъ первое изъ положеній предыдущаго §, по которому напряженіе изнашиванія должно быть во много разъ менѣе напряженія смятія на покоющемся стыкѣ. Слѣдовательно, можно сказать и наоборотъ, что на двухъ стыкахъ, воспринимающихъ на себя одно и то же давленіе, напряженіе на покоющемся стыкѣ можетъ быть допущено значительно болѣе, чѣмъ на стыкѣ трущемся. А отсюда, какъ необходимое слѣдствіе, является и самъ принципъ *Сэллерса*, по которому *покоющійся стыкъ можетъ имѣть гораздо меньшіе размѣры чѣмъ*

трущійся стыкъ при одинаковой величинѣ воспринимаемыхъ ими давленій. Примѣненіе этого принципа всегда ставитъ трущіеся стыки въ болѣе надежныя условія для сопротивленія, способствуетъ болѣе равномѣрному распредѣленію напряженій на стыкахъ, исключаетъ возможность взаимнаго перекашиванія трущихся стыковъ и дѣлаетъ работу ихъ долговѣчною.

На фиг. 35 въ эскизѣ показанъ нераціональный способъ передачи давленія съ покоющагося стыка mn части B на трущійся стыкъ pq, образованный между вкладышемъ и тѣломъ A, а на фиг. 36 въ эскизѣ иллюстрированъ принципъ *Сэллерса.* Въ обоихъ случаяхъ длина pq трущагося стыка одна и та же, требуемая условіями изнашиванія, а длина покоющагося стыка—различная; длина kl (фиг. 36) сдѣлана достаточною, требуемою по разсчету покоющагося стыка, а длина mn (фиг. 35), сдѣлана гораздо болѣе разсчетной; и при данныхъ обстоятельствахъ это послѣднее допущеніе не только не приноситъ никакой пользы дѣлу, но является даже вреднымъ, если начнется измѣненіе взаимнаго положенія частей A—B, т. е. перекашиваніе ихъ. Предполагая, что часть B въ обихъ случаяхъ имѣетъ стремленіе повернуться по направленію движенія часовой стрѣлки относительно A, мы получимъ на фиг. 35 переносъ давленія въ точку n, съ наибольшимъ плечомъ $x = 0{,}5 \,.\, mn$, а на фиг. 36 давленіе въ крайнемъ случаѣ будетъ передано въ точку l, съ плечомъ $y = 0{,}5 \,.\, kl$. Такимъ образомъ при одной и той же величинѣ нагрузки P *моментъ перекашиванія* въ 1-мъ случаѣ будетъ $P \,.\, x$, а во 2-мъ случаѣ $P \,.\, y$. Отношеніе ихъ $= x : y$. Въ такомъ же отношеніи между собою будутъ находиться и наибольшія напряженія, которыя при перекашиваніи возбудятся въ точкѣ q, какъ это видно по ф-лѣ **62.** Отсюда ясно, насколько нераціонально исполненіе покоющагося стыка съ длиною mn (фиг. 35), мало отличающейся отъ длины трущагося торца.

Развивая свой принципъ, *Сэллерсъ* идетъ еще далѣе и часто выполняетъ покоющійся торецъ kl въ видѣ *сферы* (фиг. 37), позволяющей части B свободно перемѣщаться относительно вкладыша C, трущійся стыкъ котораго съ тѣломъ A работаетъ тогда всей своей поверхностью и не испытываетъ почти ни малѣйшаго перекашиванія. Плечо y для момента перекашиванія доводится при этомъ почти до нуля.

Въ машиностроеніи впервые этотъ принципъ былъ примѣненъ въ широкихъ размѣрахъ при устройствѣ опоръ для приводныхъ валовъ въ видѣ подшипниковъ съ удобоподвижными вкладышами, подвѣсокъ, кронштейновъ и пр. и далъ на практикѣ превосходные результаты.

Примѣненіе этого принципа позволило вмѣстѣ съ тѣмъ не стѣсняться развитіемъ опорныхъ стыковъ въ длину, безъ боязни дурныхъ послѣдствій перекашиванія движущихся частей; а съ развитіемъ величины опорной поверхности и уменьшеніемъ на ней напряженія изнашиванія явилась возможность перейти къ исполненію трущихся стыковъ изъ такого матеріала, какъ чугунъ, который до этого въ работѣ съ большимъ напряженіемъ изнашиванія долгое время пользовался репутаціею матеріала, мало стойкаго и непригоднаго для исполненія изъ

него трущихся стыковъ, подверженныхъ развѣркѣ и перекашиванію въ работѣ.

Принципъ *Сэллерса* высказанъ здѣсь въ самой общей формѣ, и примѣненіе его даетъ одинаково благопріятные результаты во всѣхъ случаяхъ, гдѣ существуютъ подобныя условія передачи давленій, т. е. возможность взаимнаго перекоса движущихся частей,—будетъ-ли часть *A* валомъ, а *B*—тѣломъ опоры для вала, будетъ-ли часть *A* пальцемъ кривошипа или шейкой колѣнчатаго вала, а *B* — тѣломъ головки шатуна, будетъ-ли часть *B* тѣломъ ползуна, а часть *A* — направляющею для него и т. д.

45. **Изнашиваніе частей поступательной пары**. *a. Размѣры трущагося стыка.* Пусть имѣемъ *открытую* поступательную пару, состоящую изъ плоскости *B* (фиг. 38) и тѣла *A*, имѣющаго плоскій трущійся стыкъ. Замыканіе пары дѣлается нагрузкою *P*. Предполагаемъ ее равномѣрно распредѣленной по поверхности стыка. Очертаніе тѣла *A* въ планѣ предполагаемъ въ видѣ прямоугольника съ размѣрами $a \times b$.

Чтобы снашиваніе стыковъ обоихъ тѣлъ поступательной пары было равномѣрное, необходимо выполненіе слѣдующихъ условій:

1) Давленіе *P* при всякомъ взаимномъ положеніи тѣлъ *A* и *B* д. б. постоянно и должно равномѣрно распредѣляться по плоскости стыка части *A*.

2) Ширина тѣлъ *A* и *B* (т. е. размѣръ *b*, перпендикулярный къ плоскости чертежа) д. б. одинакова.

3) Въ крайнемъ правомъ и крайнемъ лѣвомъ своемъ положеніи стыкъ тѣла *A* д. сходить со стыка у тѣла *B* на небольшую величину *e*, другими словами, необходимо, чтобы тѣло *B* имѣло *рабочую поверхность mn*, выступающую надъ общимъ уровнемъ тѣла *B*, и чтобы длина этой рабочей поверхности *l* имѣла строго опредѣленные размѣры.

Если размахъ тѣла *A* будетъ *s* (фиг. 38), то

$$s + a = l + 2e \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{72.}$$

Этимъ основнымъ ур-іемъ устанавливается соотношеніе между всѣми продольными размѣрами стыка. Величина *e* бываетъ отъ 3 до 8 *мм.* и дѣлается тѣмъ менѣе, чѣмъ меньше размѣръ *a* и чѣмъ точнѣе механизмъ, въ составъ котораго входятъ части *A* и *B*.

Если бы у тѣла *B* не было устроено рабочей поверхности, или же длина ея *l* была бы много болѣе того, что даетъ ур-іе **72**, тогда стыкъ тѣла *B* снашивался бы не весь; на концахъ его справа и слѣва оставались бы несношенныя части, которыя могли бы препятствовать правильному движенію тѣла *A*.

Въ случаѣ, когда тѣло *B* является тѣломъ парового или насоснаго цилиндра, а тѣло *A*—поршневой пружиной (фиг. 39), подъ размѣромъ *a* надо разумѣть разстояніе между внѣшними кромками крайнихъ пружинъ. Тогда переходъ отъ *лица* или *зеркала mn* цилиндра ко внѣшней

его части *pq* (фиг. 39) допускается дѣлать по конусу *pm* для удобства постановки поршня на мѣсто.

Выступъ *f* (фиг. 38 и 39) рабочей поверхности дѣлается отъ 3 до 6 мм. При коническомъ переходѣ *pm* (фиг. 39) отъ лица къ нерабочей части тѣло *B* при выборѣ величины *e* соображаются съ уклономъ образующей конуса и величиной допускаемаго износа на поверхности лица *mn*.

На фиг. 40 указаны соотношенія въ размѣрахъ *замкнутой* поступательной пары съ круглой и квадратной формой поперечнаго сѣченія поверхности стыка. Тѣло *B* обращено въ направляемый стержень, снабженный рабочей поверхностью на длинѣ *l*, а тѣлу *A* приданы формы направляющей втулки. Р-во **72** должно имѣть мѣсто также и здѣсь.

Дальнѣйшая разработка подробностей устройства трущагося стыка будетъ заключаться въ выборѣ допускаемыхъ напряженій на стыкѣ и въ назначеніи смѣнныхъ частей у того или другого изъ двухъ тѣлъ.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены величины допускаемаго напряженія изнашиванія *K* въ *кг.* на кв. *мм.* при различной рабочей скорости движенія стыковъ *v* въ *мт.*, предполагая возможность измѣненія силы нажатія одного стыка на другой въ разныхъ точкахъ пути.

Величины *K* въ поступательной парѣ.

Названіе матеріаловъ на трущихся стыкахъ.	При скорости движенія *v mt*		
	до 1 *mt.*	отъ 1 до 2	болѣе 2.
Бронза по стали.	$\frac{1}{10}-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}-\frac{1}{40}$
Мягкій чугунъ по стали	$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}-\frac{1}{60}$
Бронза по чугуну (чугунная часть не смѣнная)	$\frac{1}{25}-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}-\frac{1}{75}$

Когда величина нагрузки *постоянна*, за допускаемыя величины *K* можно брать въ $1^1/_2$ и даже въ 2 раза большія противъ указанныхъ въ этой таблицѣ.

Ур-іе крѣпости трущагося стыка будетъ писаться такъ:

$$P = \text{или менѣе } K.[(a-e).b-F_0] \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{73},$$

гдѣ F_0 — площадь смазывающихъ канавокъ, перекрываемая стыкомъ части *A* (фиг. 38).

б. Вліяніе способа приведенія въ движеніе элементовъ поступательной пары на изнашиваніе ихъ стыковъ. Пусть имѣемъ элементъ

A (фиг. 41) поступательной пары въ видѣ золотника, а элементъ B—въ видѣ золотниковаго зеркала; EF—золотниковый стержень, C и D—направляющіе стержень сальники. Общій случай расположенія передачи будетъ такой, какъ дано на эскизѣ фиг. 41, когда давленіе отъ стержня на золотникъ передается съ эксцентриситетомъ t, и давленіе $+Q$, двигающее золотникъ вправо, имѣетъ относительно зеркала эксцентристетъ s.

Для правильности срабатыванія всѣхъ стыковъ этого механизма необходимо слѣдующее:

1) *Ось стержня* **E** *должна быть параллельна плоскости зеркала* **B**.

2) *Эксцентриситеты* **s** и **t** *должны быть возможно менѣе*; идеальный случай былъ бы такой, когда $s=t=0$; при одномъ сальникѣ (со стороны движущей части стержня) это условіе весьма часто безъ труда осуществимо, и 2-й сальникъ утрачиваетъ въ этомъ случаѣ свое значеніе.

Большинство конструкцій этого простого и милліоны разъ повторяющагося механизма осуществляются неправильно: стараются исполнить чаще всего эксцентриситетъ $t=0$, а s выполняютъ какъ выйдетъ, и доходятъ чрезъ это иногда до весьма значительной величины момента $Q.s$, опрокидывающаго золотникъ и вызывающаго на его стыкѣ неравномѣрное распредѣленіе напряженій изнашиванія.

Вредныя послѣдствія существованія эксцентриситета t легко парализуются выборомъ большого разстоянія u между сальниками C и D и достаточной длиною послѣднихъ, тогда какъ существованіе эксцентриситета s наноситъ золотнику A и его зеркалу B непоправимый вредъ, распредѣляя давленія на поверхности стыка A неравномѣрно и вынашивая оба стыка совершенно неправильно.

Если почему-либо нельзя установить ось золотниковаго стержня въ плоскости зеркала золотника, то нужно постараться *сократить между ними разстояніе до* **min** *и во всякомъ случаѣ сдѣлать* $\mathbf{s}=0$.

Далѣе представляется вопросъ — осуществить-ли передачу отъ стержня къ золотнику по схемѣ фиг. 41, или—фиг. 42. Въ послѣднемъ случаѣ отростокъ F_2 служитъ для упора въ выступъ A_2 золотника, а F_1 въ A_1; другими словами, золотникъ при этомъ *подталкивается* сзади; это—наименѣе удачный способъ веденія золотника, т. к. при этомъ золотникъ легко „дeретъ носомъ“ зеркало, въ особенности когда тѣло золотника A и хомутъ F_2 имѣютъ въ сношенномъ золотникѣ такое относительное расположеніе частей, какъ показано на фиг. 43, гдѣ давленіе отъ хомута на еще не сношенный выступъ T золотника можетъ вызвать существованіе наклонной нагрузки Q_1, опрокидывающей золотникъ относительно передняго ребра p (фиг. 42) съ весьма большимъ плечомъ s_1. Въ этомъ отношеніи лучше передача по схемѣ фиг. 41, гдѣ стержень передаетъ давленіе на золотникъ почти въ срединѣ его длины. Еще лучше было бы вести золотникъ всегда за переднюю его часть, „за носъ“, какъ показано въ схемѣ на фиг.

44, гдѣ F_1 передаетъ давленіе на A_1, когда нужно вести золотникъ влѣво, а F_2 — на A_2, когда всѣ части механизма перемѣщаются вправо.

Давно уже осуществляютъ $s + t = 0$ при построеніи уравновѣшеннаго цилиндрическаго золотника, но отъ осуществленія того же принципа при золотникахъ другой формы конструкторы обыкновенно отвлекаются невольнымъ подражаніемъ существующимъ образцамъ устройствъ, которыя выпускаются извѣстными заграничными машиностроительными фирмами и на вѣру принимаются за выработанные практикою типы; но это далеко не всегда бываетъ такъ даже и за границей, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться, изучая детали современныхъ машинъ; и поэтому подражаніе существующимъ конструктивнымъ образцамъ тогда только можетъ быть оправдано, когда въ этихъ образцахъ удовлетворены всѣ геометрическія и кинематическія требованія, обдуманы всѣ условія сопротивляемости и изнашиваемости частей и приняты во вниманіе условія и средства обработки на машинахъ и въ ручную, а также и качества имѣющихся въ наличности матеріаловъ и проч.

Устройство поступательной пары, выполняемой по типу фиг. 40, не слѣдуетъ безъ крайней надобности употреблять при условіяхъ, изображенныхъ въ эскизѣ на фиг. 45 и 46; во всякомъ случаѣ тогда необходимо будетъ принять во вниманіе слѣдующія обстоятельства: 1) размѣръ n при крайнемъ лѣвомъ положеніи шарнира C д. б. возможно менѣе; 2) стержень B, разсчитанный прочно на сгибаніе, д. б. значительно увеличенъ въ толщину, чтобы уменьшить его выгибаніе; 3) отношеніе длины a втулки A къ діам. стержня B д. б. исполнено не менѣе трехъ; 4) передача давленія отъ втулки A на опору д. б. сдѣлана по принципу *Сэллерса.*

в. Работа поступательной пары при перемѣнной величинѣ нагрузки. Такимъ примѣромъ можетъ служить работа *ползуна B* (фиг. 47) или *крестовины* (крейцкопфа), посредствомъ котораго направляется въ своемъ движеніи стержень поршня. Давленіе P на поршень, перенесенное на болтъ ползуна, м. б. разложено по направленію, нормальному къ поверхности параллелей, и по направленію шатуна.

$$Q = P : Cos\ \beta;\quad N = P.\ tg\ \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ \text{а.}$$

Если длина шатуна l и радіусъ кривошипа r, то

$$DE = l.\ Sin\ \beta = r.\ Sin\ \delta, \text{ откуда}$$

$$Sin\ \beta = \frac{r}{l} \cdot Sin\ \delta = \frac{Sin\ \delta}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ \text{в.}$$

Изъ этой ф-лы видно, что $Sin\ \delta$ будетъ имѣть значеніе *max*, тогда же, когда и $Sin\ \delta$, т. е. при $\delta = 90^0$. Случалось слышать отвѣтъ, что наибольшее отклоненіе оси шатуна отъ оси цилиндра получится въ томъ случаѣ, когда ось шатуна $\perp$ къ направленію кривошипа; это невѣрное положеніе сообщено также и въ нѣкоторыхъ справочныхъ книжкахъ.

Соединяя ф-лы **а** и **в**, получимъ:

$$Q=\frac{P.\ m}{\sqrt{m^2-Sin^2\ \delta}} \ldots\ldots\ldots\ \text{г.}$$

$$N=\frac{P.\ Sin\ \delta}{\sqrt{m^2-Sin^2\ \delta}} \ldots\ldots\ldots\ \text{д.}$$

Изъ этихъ ф-лъ видно, что и Q, и N все время измѣняются съ измѣненіемъ угла δ. Изъ нихъ Q измѣняется сравнительно въ очень тѣсныхъ предѣлахъ.

При $\delta=0$ и $\delta=180^0$...... $min\ Q=P$. . . . . **е.**

При $\delta=90^0$ и $\delta=270^0$... $max\ Q=\frac{P.\ m}{\sqrt{m^2-1}}$. . . . . **ж.**

При $m=4$ . . . . $max\ Q=1{,}032\ .\ P$

„ $m=5$ . . . . „ $=1{,}020\ .\ P$

„ $m=6$ . . . . „ $=1{,}014\ .\ P$

Величина N измѣняется въ гораздо болѣе широкихъ предѣлахъ. Такъ,

при $\delta=0$ и $\delta=180^0$ . . . . $min\ N=0$,

а при $\delta=90^0$ и $\delta=270^0$ . . . . $max\ N=\frac{P}{\sqrt{m^2-1}}$. . . . **з.**

При $m=4$ . . . . . . $max.\ N=0{,}258.\ P.$

„ $m=5$ . . . . . . „ $=0{,}204.\ P.$

„ $m=6$ . . . . . . „ $=0{,}169.\ P.$

Эти данныя показываютъ, насколько невыгодно брать отношеніе длины шатуна къ рад. кривошипа слишкомъ малымъ. Разсмотрѣніе фиг. 47 показываетъ, что при постоянномъ направленіи вращенія вала давленіе N будетъ передаваться всегда только на одну изъ параллелей, если ведущею механизмъ частью будетъ все время поршень. Въ паровыхъ машинахъ, работающихъ съ расширеніемъ пара и съ маховикомъ, избытокъ работы передается поочередно то отъ поршня къ валу и къ маховику, то отъ маховика къ валу, а отъ него — къ поршню: тамъ будутъ работать поочередно обѣ параллели A_1 и A_2. Въ приводныхъ насосахъ и въ машинахъ-орудіяхъ у шатуннаго механизма всегда работаетъ только одна изъ параллелей. Давленіе на ползунъ за время каждаго оборота вала измѣняется по закону, выражаемому ф-лой **д.**

Разсчетъ трущагося стыка ползуна дѣлается по $max\ N$. Вслѣдствіе измѣненія величины N при измѣненіи угла δ снашиваніе параллелей будетъ итти неровно, онѣ будутъ *выбиваться* въ срединѣ, и устраненіе стука въ ползунѣ возможно только путемъ ремонта параллелей: никакія установочныя приспособленія въ ползунѣ устранить этотъ стукъ не могутъ, т. к. ими можно пользоваться только при первоначальной установкѣ ползуна на новыхъ, невыбитыхъ параллеляхъ, когда разстояніе n во всѣхъ положеніяхъ ползуна одинаково.

Трущійся стыкъ ползуна и параллелей образуютъ при помощи двухъ башмаковъ H, H (фиг. 48), являющихся смѣнными частями крестовины B и выполняемыхъ большею частію изъ чугуна съ облицовкою изъ бронзы или бабита. Башмаки воспринимаютъ отъ крестовины вертикальное давленіе N чрезъ покоющійся стыкъ b и при движеніи башмаковъ по параллелямъ возбуждается сила тренія — $N . f$.

Чѣмъ менѣе будетъ эксцентриситетъ t при передачѣ силы $N . f$ на крестовину, тѣмъ лучше.

Чѣмъ ближе устройство стыка b крестовины и башмака будетъ осуществлено къ принципу *Сэллерса*, тѣмъ лучше, въ особенности если передача давленія N отъ шатуна на крестовину дѣлается съ эксцентриситетомъ s. Существованіе послѣдняго во всякомъ случаѣ нельзя отнести къ числу достоинствъ конструкціи ползуна.

Вредныя послѣдствія воздѣйствія момента $N . f . t$, вращающаго башмакъ парализуются надлежащимъ развитіемъ размѣра на трущемся стыкѣ башмака; отношеніе этого размѣра a къ другому размѣру стыка c выбирается отъ 2 до 3. Вредныя же послѣдствія дѣйствія момента $N . s$ на башмакъ устраняются надлежащимъ устройствомъ стыка b (фиг. 48) между крестовиной и башмакомъ; во многихъ конструкціяхъ паровозныхъ ползуновъ эта деталь стыка выполняется нераціонально, не по принципу *Сэллерса* и, благодаря этому, стыкъ башмака и параллелей всегда нагружается еще добавочнымъ моментомъ, происходящимъ отъ эксцентричной передачи давленія N на крестовину; если бы соединеніе крестовины со стержнемъ поршня ослабло, моментъ $N . s$ цѣликомъ сталъ бы передаваться на башмаки ползуна.

46. Изнашиваніе частей вращательной пары. Различаютъ вращательныя пары двухъ родовъ: 1) въ одномъ случаѣ элементы вращательной пары не дѣлаютъ полнаго оборота одинъ относительно другого, а совершаютъ только *качаніе* на нѣкоторый уголъ, это — *шарнирное соединеніе*, 2) въ другомъ случаѣ элементы вращательной пары непрерывно вращаются одинъ относительно другого, часто съ большой относительной скоростью, всегда въ одну сторону, или поочередно то въ одну — то въ другую, это — *пара съ непрерывнымъ вращеніемъ*. И та, и другая вращательная пара можетъ претерпѣвать изнашиваніе или *на цилиндрической поверхности*, или *на торцѣ*.

a. Изнашиваніе частей закрытаго шарнирнаго соединенія. Пусть имѣемъ неподвижный шарнирный болтъ A (фиг. 49), вокругъ котораго на нѣкоторый уголъ 2δ повертывается замкнутое ушко B, все время воспринимающее отъ тяги C давленіе P сверху внизъ. Наибольшее напряженіе изнашиванія (см. ф-лу **68**) будетъ возбуждаться у стыковъ поочередно на всѣхъ образующихъ, лежащихъ въ углѣ aob. Такимъ образомъ ясно, что и болтъ, и ушко будутъ здѣсь испытывать *одностороннее изнашиваніе*. Если направленіе дѣйствія силы P является во время работы механизма, тогда при поворотѣ тяги C на тотъ же уголъ 2δ наибольшее давленіе изнашиванія могутъ воспринимать на себя и

образующія, лежащія внутри угла *cod*, и получится *двустороннее изнашиваніе*; по истеченіи нѣкотораго времени и болтъ, и отверстіе въ ушкѣ сдѣлаются овальными, причемъ большія оси этихъ оваловъ будутъ взаимно $\perp$. Если такое соединеніе принадлежитъ точному механизму, болтъ *A* выполняется закаленымъ стальнымъ, и его заставляютъ работать на стальной закаленной втулкѣ *D* (фиг. 49, внизу), наглухо поставленной внутрь ушка *B* и окончательно расшлифованной послѣ постановки на мѣсто.

Двустороннее вынашиваніе частей шарнирнаго соединенія можно наблюдать въ шарнирномъ болтѣ каждаго ползуна, въ шарнирныхъ болтахъ кулиссныхъ механизмовъ и т. п.

Если болтъ *A* неподвиженъ, то лучше всего давать ему опору не по одну сторону ушка *B*, а *по обѣ*; приладка обоихъ опорныхъ концовъ болта къ гнѣздамъ д. б. самая тщательная; ради этого опорные концы болта A_1 — A_2 (фиг. 50) исполняются часто *коническими* съ уклономъ въ одну сторону, чтобы по мѣрѣ смятія этихъ концовъ можно было долевымъ перемѣщеніемъ болта снова достигнуть плотнаго прилеганія неподвижныхъ стыковъ одного къ другому. При односторонней опорѣ у болта *A* (фиг. 49), послѣдній можетъ прогибаться подъ дѣйствіемъ силы *P*; а тогда каждая изъ образующихъ рабочей части стыка будетъ нагружаться *неравномѣрно*, вслѣдствіе этого у болта начнетъ сильнѣе снашиваться *корень*, т. е. мѣсто, прилегающее къ опорѣ, и соотвѣтственное мѣсто ушка, соприкасающееся съ корнемъ болта. Если ось тяги *C* вертикальна, смазка д. б. подана въ самыхъ высшихъ точкахъ стыка и д. б. распространена по стыку въ стороны посредствомъ смазывающихъ канавокъ, кончающихся внѣ предѣловъ дуги *ab*.

Иногда конструктору предоставляется на выборъ—заставить ушко *B* (фиг. 49) работать на неподвижномъ болтѣ *A*, или же связать части *A* и *B* въ одно цѣлое и заставить болтъ *A* своими концами, *шипами*, работать въ двухъ неподвижныхъ опорахъ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ болтъ *A* обращается въ *ось* для ушка *B*.

Если длина оси *A должна быть* значительной, то всегда выгоднѣе заставить ее работать на своихъ шипахъ, которые могутъ быть выполнены тоньше остальной части оси, и она будетъ работать на своихъ шипахъ съ меньшей затратой работы тренія, чѣмъ во всякомъ другомъ случаѣ.

Въ случаѣ же короткой оси *A* заставляютъ ее работать на своихъ шипахъ только въ такомъ случаѣ, когда по свойствамъ механизма, цѣнится *устойчивость*, *неизмѣнность движенія* тяги *C* въ одной опредѣленной плоскости; если же, наоборотъ, цѣнится *упругая податливость* движеній тяги *C* внѣ плоскости ея вращенія, тогда заставляютъ ушко *B* работать на неподвижномъ болтѣ *A*. Так. обр., напр. шарнирный болтъ ползуна всегда дѣлается неподвижнымъ, чтобы позволить шатуну имѣть небольшія перемѣщенія и внѣ плоскости главнаго его движенія; это бываетъ необходимо, вслѣдствіе существованія небольшихъ долевыхъ перемѣщеній коренного вала, а вмѣстѣ съ нимъ и пальца кривошипа;

особенное значеніе это имѣетъ въ паровозныхъ машинахъ и въ пароходныхъ; при конструированіи головокъ шатуна необходимо поэтому всегда помнить о существованіи принципа *Сэллерса* относительно трущихся и покоющихся стыковъ. То же самое имѣетъ мѣсто по отношенію къ болтамъ кулиссснаго механизма.

Особенно тяжелыя условія для работы шарнирнаго соединенія бываютъ въ томъ случаѣ, когда втулка шарнира является сразу втулкою соединенныхъ въ одно цѣлое двухъ рычаговъ m и n (фиг. 51), передающихъ работу каждый въ своей плоскости и работающихъ, какъ говорятъ *„на перекосъ“*, въ особенности если направленіе дѣйствія нагрузки при этомъ все время мѣняется и шарнирный болтъ имѣетъ опору только съ одной стороны. Если плечо r, т. е. разстояніе между рабочими плоскостями рычаговъ m и n, можно выбирать, то слѣдуетъ дѣлать его *наименьшимъ* изъ всѣхъ возможныхъ; то же самое относится и къ плечу p; наоборотъ длина l трущагося стыка д. б. развита насколько возможно болѣе. Гдѣ только возможно, схема передачи фиг. 51 д. б. замѣняема схемой, представленной на фиг. 52, когда оба рычага неизмѣнно связаны съ осью, работающей своими шипами на двухъ опорахъ.

Также не хорошо и устройство шарнирнаго соединенія по схемѣ фиг. 53, п. ч. здѣсь плечо r выходитъ значительнымъ; если размѣръ l будетъ при этомъ достаточнымъ, трущійся стыкъ слѣдуетъ выполнить по схемѣ фиг. 54 съ двумя смѣнными достаточно длинными втулками a и b.

Нечего и говорить, что пригонка частей во всѣхъ этихъ шарнирныхъ соединеніяхъ д. б. самая аккуратная и развитіе поверхностей трущихся стыковъ весьма значительное.

б. Разсчетъ **центрально** *нагруженнаго шарнирнаго соединенія* (фиг. 49) дѣлается по формулѣ:

$$K = \text{или болѣе}\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{P}{l\,.\,d} \qquad \textbf{74.}$$

Величина K въ кг. на кв. мм. берется такъ:

Сталь по стали (закал.) . . . . . . $K = 1{,}2 — 1{,}5$

„ „ бронзѣ. . . . . $K = 0{,}8 — 1{,}1$.

Если давленіе передается на торецъ шарнира (напр., въ пятѣ крана), допускаемыя величины K берется на 10—20% менѣе противъ вышеуказанныхъ.

Нужно замѣтить себѣ разъ на всегда, что разсчетъ на изнашиваніе всегда является *провѣрочнымъ*, т. е. величины d и l вычисляются заранѣе, удовлетворяя условія крѣпости, а затѣмъ вычисленныя величины вносятся въ ур-іе **74**, и оно д. б. удовлетворено по знаку неравенства. Если оно при этомъ не удовлетворяется, то, измѣняя d или l, надо снова удовлетворить и ур-іе крѣпости.

в. Разсчетъ шарнирнаго соединенія, нагруженнаго **эксцентрично** (фиг. 55), *или работающаго на перекосъ* (фиг. 51 и 53) съ моментомъ

$M = P \cdot r$, дѣлается, присоединяя къ напряженію $H_1 = P : l\,d$, равномѣрному по всему стыку, еще напряженіе H_2, являющееся отъ существованія момента перекашиванія. Примѣняя здѣсь тотъ же принципъ разсчета, что и при выводѣ ф-лы **62**, найдемъ:

$$M = H_2 \cdot \frac{d.l^2}{3}$$

NB. Въ видѣ упражненія слѣдуетъ вывести эту ф-лу.

Затѣмъ допускаемое напряженіе изнашиванія въ этомъ случаѣ будетъ:

$$K_1 = \frac{4}{\pi}(H_1 + H_2) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{P}{l.d}\left[1 + \frac{3.r}{l}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \mathbf{75.}$$

Сравненіе этой ф-лы съ **74** показываетъ, какое вліяніе на величину K_1 имѣютъ величина эксцентриситета r и длина втулки l.

Величина K_1 берется отъ $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{10}$ отъ K, смотря по числу размаховъ тяги въ минуту.

г. Изнашиваніе частей открытаго шарнирнаго соединенія. Такой случай встрѣчаемъ при употребленіи *цилиндрическихъ золотниковъ, крановъ, заслонокъ* и пр., перемѣщающихся около нѣкоторой оси и нагружаемыхъ давленіемъ пара, воды и др. Пусть имѣемъ такой золотникъ въ видѣ тѣла A, работающаго по цилиндрическому зеркалу B (фиг. 56). Если дуга $mn = pq$ будетъ соотвѣтствовать размаху золотника, то внѣшнія его ребра въ крайнихъ положеніяхъ m и q должны непремѣнно сходить съ рабочей поверхности зеркала на величину, указанную при подобныхъ же обстоятельствахъ для поступательной пары. Въ золотникахъ, у которыхъ величина размаха непостоянна, одинаковаго срабатыванья всей рабочей поверхности ожидать нельзя, и правильная круглота ея быстро утрачивается. Этотъ процессъ неправильнаго срабатыванія стыка м. б. ускоренъ еще нераціональнымъ способомъ приведенія въ движеніе золотника. Ведущее его давленіе P д. б. приложено на радіусѣ f, возможно менѣе отличающемся отъ r, внѣшняго радіуса золотника. Въ большинствѣ существующихъ конструкцій паро-распредѣлительныхъ крановъ это важное условіе рѣдко бываетъ выполнено удовлетворительно, и такіе краны вскорѣ же послѣ ихъ установки начинаютъ работать неправильно и неплотно.

д. Изнашиваніе частей пары съ непрерывнымъ вращеніемъ. Будемъ-ли слѣдить за изнашиваніемъ цилиндрической или торцевой части этой пары, требуется выполненіе всегда одного и того же условія, *трущійся стыкъ д. работать ровно всей своей поверхностью*; но т. к. всегда возможна развѣрка въ относительномъ положеніи частей, поэтому для достиженія этого д. б. дано широкое развитіе примѣненію принципа *Сэллерса* при устройствѣ опоръ для всѣхъ вращательныхъ паръ, какъ по отношенію къ цилиндрическому стыку, такъ и торцевому. Принципъ *Сэллерса* сдѣлался извѣстнымъ въ Европѣ болѣе 20 лѣтъ

тому назадъ, но и до сихъ поръ какъ строители опоръ для приводныхъ валовъ, такъ и потребители приводовъ еще слишкомъ мало съ нимъ освоились и недостаточно ихъ оцѣнили; благодаря этому многія большія фабрики, потребительницы нераціонально построенныхъ опоръ для приводныхъ валовъ, изо дня въ день понапрасну тратятъ на ихъ вращеніе десятки лошадиныхъ силъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ.

Смѣнною частію во вращательной парѣ *одѣвается* обыкновенно опора для вала, получающая смѣнный *бронзовый* или *чугунный* вкладышъ. Но если на валу устраивается вращательная пара гдѣ-либо между его опорами,— такъ сказать, *на гладкомъ мѣстѣ*, не на утолщеніи (это бываетъ, напр., при постановкѣ холостого шкива), — тогда смѣнною частью (*стаканомъ*) одѣвается и валъ, и вращающаяся на немъ втулка.

Распредѣленіе давленій на трущемся цилиндрическомъ стыкѣ получается всегда неравномѣрное (см. выводъ ф-лы 68), а поэтому и вкладышъ изнашивается также неравномѣрно, выбивается по направленію дѣйствія составного давленія на опору, хотя шейка вала при ея срабатываніи остается круглою. Но если какая-либо часть вала является осью для вращенія на ней другихъ частей (холостого шкива и пр.), то эта часть вала можетъ вынашиваться неправильно и односторонне, а потому ее полезно одѣвать всегда смѣннымъ стаканомъ.

Какъ на примѣръ всегда *односторонняго* и неправильнаго снашиванья выпуклаго цилиндрическаго элемента вращательной пары, можно указать на снашиванье пальца кривошипа. На фиг. 47 часть поверхности пальца, воспринимающая на себя *max* напряженія изнашиванія выполнена толстой линіей.

Если вращательная пара испытываетъ на себѣ воздѣйствіе нѣсколькихъ главныхъ нагрузокъ, дѣйствующихъ періодически, какъ это бываетъ, напр., въ случаѣ шейки коренного вала, то одѣвающіе ее вкладыши полезно сдѣлать изъ нѣсколькихъ частей: нижній вкладышъ воспринимаетъ на себя дѣйствіе вѣса маховика, одинъ изъ боковыхъ— давленіе отъ передаточныхъ частей (приводныхъ ремней, канатовъ и пр.), + давленіе пара въ цилиндрѣ, а другой боковой—одно лишь давленіе пара въ цилиндрѣ; снашиваніе 1-го бокового вкладыша будетъ сильнѣе, чѣмъ 2-го, и по истеченіи нѣкотораго времени работы ихъ возможно и полезно перемѣнить мѣстами.

Когда длина какой нибудь части машины д. б. строго опредѣленной и на концахъ этой части при вкладышахъ вращательной пары имѣются установочныя приспособленія для вкладышей (напр., клинья), то расположеніе ихъ д. б. такое, какъ показано на фиг. 57, т. е. они д. б. или *оба справа,* или *оба слѣва* отъ охватываемыхъ вкладышами шеекъ.

Подведеніе смазки во вращательной парѣ д. б. всегда на самомъ верхнемъ пунктѣ трущагося стыка, если только въ этомъ мѣстѣ не возбуждается *max.* напряженія изнашиванія. При непрерывной работѣ съ большой скоростью предпочитается всегда непрерывная же *автома-*

тически-дѣйствущая во время работы смазка. Въ очень тяжело нагруженныхъ вращательныхъ парахъ приносятъ большую пользу *смазывающія дорожки*, продѣланныя по образующей цилиндра на выпукломъ элементѣ пары (фиг. 58); посредствомъ такихъ дорожекъ легко промазываются и такіе элементы стыка, которые работаютъ съ максимальнымъ напряженіемъ, выжимающимъ смазку со стыка.

Допускаемыя величины напряженія изнашиванія *на цилиндрической поверхности* вращательной пары съ непрерывнымъ вращеніемъ берутся слѣдующими:

$$K = \frac{4}{\pi} . P : d . l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 76.$$

	Величины K (кг. на кв. мм.)
Закал. сталь на закал. стали (хор. уходъ и смазка)	1,5—1,7
„ „ „ бронзѣ „ „ „	1,0—0,8
Незакал. „ „ „ „ „ „	0,8—0,6
Желѣзо на бронзѣ „ „ „	0,5—0,35
„ и чугунъ на бронзѣ (обыкн. уходъ) . .	0,35—0,30
„ на чугунѣ и на деревѣ (хор. уходъ и непрерывная смазка)	0,30—0,25
„ на чугунѣ при обыкн. услов. работы. .	0,12—0,06

Допускаемыя напряженія *на торцѣ* вращательной пары съ непрерывнымъ вращеніемъ берутся на 20 — 30% ниже предыдущихъ величинъ.

При вычисленіи рабочей поверхности вращательной пары площадь, занимаемая смазывающими канавками, должна быть вычтена изъ общей площади опоры.

Величины срабатыванія элементовъ вращательной пары по радіальному направленію, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, прямо пропорціональна работѣ тренія, т. е.

$$K . d . l . f . \frac{\pi . d . n}{60}.$$

Отсюда видно, что, если у вала нѣсколько опоръ, всѣ онѣ разнаго діаметра и разной длины, пониженіе вала параллельно самому себѣ, т. е. съ сохраненіемъ горизонтальности оси вала, будетъ имѣть мѣсто тогда только, когда

$$K . d^2 . l = const \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 76.$$

Это ур-іе налагаетъ на распредѣленіе нагрузки по опорамъ извѣстныя условія, и только при соблюденіи ихъ изнашиваніе опоръ будетъ итти одинаково.

47. **Задачи къ главѣ о сжатіи тѣлъ. № 19.** Напряженіе на опорной поверхности бронзоваго клапана допускается въ 1000 *lbs* на кв. дм.; опредѣлить величину давленія въ атм., подъ которымъ можетъ работать клапанъ *A*, изображенный на фиг. 60 въ разрѣзѣ (по одну сторону центральной линіи).

Давленіе въ 1000 *lbs* на кв. дм. соотвѣтствуетъ 0,7031 *кг.* на кв. *мм.* Площадь кольцевой опорной поверхности у сѣдла *B* вычислится такъ:

$$\pi \,.\, (d+b) \,.\, b = \pi \,.\, 128 \,.\, 8 = 3216 \text{ кв. мм.}$$

Вся величина нагрузки, которую можетъ воспринять клапанъ, будетъ:

$$3216 \,.\, 0{,}7031 = 2135 \text{ кг.}$$

Съ другой стороны, обозначая искомое давленіе въ атм. чрезъ x и выражая площадь верхней тарелки клапана въ кв. смт., мы должны будемъ написать ур-іе:

$$2135 = \frac{\pi}{4} \,.\, (d + 2b)^2 \,.\, x = \frac{\pi}{4} \,.\, (13{,}6)^2 \,.\, x,$$

откуда $x =$ или менѣе 14,7 *atm.*

№ 20. Желѣзный стержень *B* (фиг. 61) діам. 50 *мм.* фиксируется въ желѣзной втулкѣ *C* посредствомъ стальной закладки *ab* и желѣзнаго нажимнаго винта *A* въ $^3/_4$ *дм.* діам. Вдоль оси винта *A* передается сжимающая его нагрузка въ 500 *кг.* Опредѣлить напряженія смятія въ этомъ соединеніи и выяснить, какую нагрузку *P* можетъ выдержать стержень *B*.

У болта діам. въ $^3/_4$ *дм.* внутренній діаметръ рѣзьбы равенъ 15,74 *мм.* Соотвѣтственная этому площадь, воспринимающая нагрузку въ 500 *кг.*, у болта будетъ:

$$\frac{\pi}{4}(15{,}74)^2 = \text{ок. } 195 \text{ кв. мм.}$$

Поэтому напряженіе на лѣвомъ крайнемъ торцѣ болта, или на стыкѣ болта съ закладкой *ab*, будетъ:

$$500 : 195 = 2{,}56 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Предполагая, что закладка *ab* имѣетъ 20 $^m/_m$ ширину и 40 $^m/_m$ длину, напряженіе на стыкѣ ея со стержнемъ *B* будетъ

$$500 : 20 \,.\, 40 = 0{,}625 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Если вся длина втулки *C* будетъ 120 $^m/_m$ и діаметръ стержня *B*—50 $^m/_m$, тогда наибольшее напряженіе на стыкѣ *ef* между стержнемъ *B* и втулкой *C* будетъ

$$\frac{4}{\pi} . 500 : 50 \,.\, 120 = 0{,}106 \text{ кг. на кв. мм.}$$

При зажимѣ винта *A* треніе возбудится на двухъ поверхностяхъ — *ab* и *ef*; принимая коэф. тренія на нихъ = 0,44, получимъ ур-іе:

$$P = 2 \,.\, 500 \,.\, 0{,}44 = 440 \text{ кг.}$$

№ 21. Цѣпь *Галля*, изображенная на фиг. 4, предназначена для нагрузки въ 1000 *кг.* Опредѣлить наибольшее напряженіе смятія на стыкѣ между ея звеньями и валиками.

Звеньевъ 4, ширина ихъ 2 $^m/_m$, діам. валика 10 $^m/_m$, поэтому

$$\frac{4}{\pi} \cdot 1000 : 4 \cdot 2 \cdot 10 = D, \text{ откуда}$$

$$D = 16 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Эта величина чрезмѣрно велика, и потому при работѣ цѣпи на полную нагрузку неизбѣжно будетъ быстрое смятіе ея ушковъ и валиковъ.

№ 22. Чугунная подколонная плита 400×400 $^m/_m$ будетъ положена на кладку изъ романскаго цемента. Какую максимальную нагрузку можно допустить для колонны, опирающейся на эту плиту?

Принимая $D = 0{,}1$ *кг.* на кв. *мм.*, безопасную нагрузку получимъ равной:

$$P = 400 \times 400 \times 0{,}1 = 16000 \text{ кг.} = 16 \text{ tn.}$$

Въ случаѣ передачи давленія на стулья, сложенныя изъ песчаника или известняка, а также при передачѣ давленія на деревянныя балки поперекъ волоконъ, допускаемое напряженіе можно было бы повысить въ 2,5 раза и довести нагрузку до 40 *tn.*

№ 23. Желѣзная потолочная балка двутавроваго сѣченія (фиг. 62) должна передать на стѣну давленіе въ 3600 *кг.* Подъ нее будетъ подложена чугунная подбалочная плита C съ прямоугольнымъ очертаніемъ въ планѣ. Опредѣлить необходимые размѣры этой плиты, зная, что одинъ изъ этихъ размѣровъ b не можетъ быть менѣе 180 $^m/_m$ и что плита будетъ положена на кирпичную кладку, сложенную на извести.

Примемъ $b = 200$ $^m/_m$ и $D = 0{,}06$, тогда

$$a = \frac{P}{b \cdot D} = \frac{3600}{200 \cdot 0{,}06} = 300 \ ^m/_m.$$

№ 24. Діам. штока пароваго молота 100 $^m/_m$, длина штока 2 *mt*, вѣсъ его 125 *кг.*, вѣсъ поршня 250 *кг.* Высота паденія поршня вмѣстѣ съ бабой — 1,5 *mt.* Опредѣлить наибольшее напряженіе въ нижнемъ сѣченіи штока въ концѣ удара.

Напряженіе въ сѣченіи штока отъ собственнаго вѣса при спокойной передачѣ нагрузки будетъ (см. ф-лу **37**):

$$h_0 = \frac{q \cdot l}{F} = \frac{125}{8000} = \frac{1}{64} \text{ кг. на кв. мм.}$$

Отъ вѣса поршня въ томъ же сѣченіи получилось бы напряженіе

$$H = \frac{P}{F} = \frac{250}{8000} = \frac{1}{32} \text{ кг. на кв. мм.}$$

Укороченія штока отъ той и другой нагрузки соотвѣтственно получились бы равными (см. ф-лу **36**):

$$\kappa = \frac{l}{2E} \cdot h_0 = \frac{2000}{2 \cdot 20000} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{1280} \ ^m/_m$$

$$\lambda = \frac{l}{E} \cdot H = \frac{2000}{20000} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{320} \ ^m/_m.$$

При паденіи поршня и штока съ высоты $f = 1500$ $^m/_m$ укороченіе штока будетъ опредѣляться ф-лами **40** и **41**. Предварительно найдемъ величины m, n и X. По ф-лѣ з (§ 25, *б*):

$$m = -\frac{3}{2} \cdot k \left(f + \frac{9}{8} \cdot k\right) = -1{,}7.$$

По ф-лѣ i (§ 25, *б*):

$$n = -\frac{k}{4}\left[f^2 + \frac{9}{2} \cdot f \cdot k + \frac{27}{8} \cdot k^2\right] = -440.$$

По ф-лѣ **33**.... $X = 7{,}6$ $^m/_m$.

Въ ф-лы **40** и **41** входитъ выраженіе:

$$\sqrt{1 + \frac{2f}{\lambda}} = \sqrt{1 + 2.1500.\,320} = \text{около } 981.$$

Послѣ этого полное укороченіе штока (ф-ла **40**):

$$\Theta_2 = 7{,}6 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1280} + \frac{1}{320}.981 = 10{,}67\ ^m/_m.$$

Соотвѣтствующая этому полная величина напряженія въ сѣченіи штока будетъ (ф-ла **41**):

$$H_2 + h_2 = \frac{1}{32} \cdot 981 + \frac{1}{64}\sqrt{7{,}6.\,1280 + 0{,}75} =$$

$$= 30{,}65 + 1{,}55 = 32{,}2 \text{ кг. на кв. } ^m/_m.$$

Эти данныя указываютъ, что послѣ паденія съ такой большой высоты въ концѣ удара штокъ поршня находился бы въ весьма напряженномъ и опасномъ положеніи, если бы не принималось никакихъ мѣръ для смягченія этого ударнаго дѣйствія.

Этотъ разсчетъ указываетъ въ то же время, насколько необходимо принятіе такихъ мѣръ, и насколько большую роль играетъ собственный вѣсъ поршня у молота въ полученіи этихъ неблагопріятныхъ для крѣпости штока результатовъ.

№ 25. Провѣрить крѣпость главныхъ трущихся стыковъ шатуннаго механизма въ паровыхъ машинахъ, размѣры частей которыхъ даны у *Хедэра* (*Haeder*, *Dampfmaschinen*).

Возьмемъ для примѣра 6 нумеровъ машинъ съ діам. отъ 250 до 500 $^m/_m$ и занумеруемъ ихъ такъ:

№ маш. . . .	1	2	3	4	5	6
Діам. цил. . .	250	300	350	400	450	500 $^m/_m$.

Въ сочиненіи *Хедэра* указано, что данныя машины могутъ работать при упругости пара *max* 7 *atm* по манометру; сообразно съ этимъ даны и размѣры частей машинъ.

Принимая въ машинѣ, работающей съ охлажденіемъ пара, возможную разность давленій на обѣ стороны поршня $=8-0,25$ *at.*, получимъ наибольшее давленіе на поршень равнымъ:

№ машины.......	1	2	3	4	5	6
Давл. на порш....	3805;	5478;	7456;	9739;	12325;	15221 *кг.*

Предполагая, что отношеніе длины шатуна къ радіусу кривошипа $m=5$ по ф-ламъ § 45,*b* найдемъ наибольшее давленіе на ползунъ N и на шатунъ Q (ф-лы ж и з). При этомъ допустимъ, что въ передачѣ работы отъ поршня къ ползуну до 10% ея будетъ затрачено на преодолѣніе тренія въ поршнѣ и сальникѣ. Тогда для № 1, напр., получимъ:

$$max\ N = 0,204\ .\ 0,9\ .\ 3805 = 698\ кг.$$

По *Хедэру* размѣры башмаковъ ползуна для этой машины таковы: $a=220$; $b=110$, поэтому напряженіе на трущемся стыкѣ ползуна и параллели будетъ:

$$K = 698 : (220\ .\ 110) = \frac{1}{34,7}\ кг. \text{ на кв. } мм.$$

Подобнымъ же образомъ сдѣлаемъ провѣрку и для всѣхъ другихъ №-овъ машины. Сводя данныя и вычисленныя величины въ табличную форму, получимъ *для башмаковъ ползуна* слѣдующее:

№ маш.	1	2	3	4	5	6
max N. . . .	698	1005	1369	1788	2262	2794
a въ *мм.* . . .	220	260	300	340	380	410
b „ . . .	110	125	155	180	200	220
1 : *K*	34,7	32,3	34	34,2	33,6	32,6

Сравнивая полученныя величины съ тѣми, которыя даны въ § 45,*a*, получимъ указаніе, при какихъ скоростяхъ эти стыки могутъ быть долговѣчны въ работѣ, и какой матеріалъ пригоднѣе будетъ для облицовки ползуна и параллелей.

Подобнымъ же образомъ дѣлаемъ провѣрку на изнашиваніе ползуннаго болта. *Max* давленія на шатунъ для маш. № 1, напр., вычислится такъ (ф-ла ж въ § 45,*b*):

$$max\ Q = 1,02\,.\,0,9\,.\,3805 = 3492\ кг.$$

Размѣры болта ....$d=50$, $l=70$, поэтому

$$K = \frac{4}{\pi}\cdot 3492 : (50\,.\,70) = 1,26\ кг. \text{ на кв. } мм.$$

Составляя табличку *для ползунныхъ болтовъ* всѣхъ №-овъ маш. получимъ слѣдующее:

№ маш. . . .	1	2	3	4	5	6
max Q. . . .	3492	5027	6844	8940	11315	13972
d въ *мм.* . .	50	55	65	75	85	90
l „ . .	70	80	90	100	110	120
K	1,26	1,43	1,45	1,52	1,44	1,64

Сравненіе полученныхъ величинъ K съ данными § *46,б* показываетъ, что данные у *Хедэра* размѣры ползунныхъ болтовъ годились бы только въ случаѣ работы стального закаленнаго болта на стальномъ же вкладышѣ, но такъ какъ въ постоянныхъ паровыхъ машинахъ вкладышъ въ ползунной головкѣ шатуна дѣлается обыкновенно изъ бронзы, поэтому размѣры болта, приведенные въ справочной книжкѣ, оказываются не всегда достаточными при работѣ машины съ наибольшимъ назначеннымъ для нея давленіемъ пара, и размѣры трущагося стыка здѣсь слѣдовало бы увеличить. Видно далѣе, что въ маш. №№ 4 и 6 болты ползуна находятся въ особенно неблагопріятныхъ условіяхъ.

Подобнымъ же образомъ найдемъ напряженіе изнашиванія и *въ пальцахъ кривошипа* для всѣхъ шести №-овъ машинъ:

№ маш. . . .	1	2	3	4	5	6
max Q. . . .	3492	5027	6844	8940	11315	13972
d_1.	65	70	80	95	105	120
l_1.	80	90	105	115	130	145
K	0,85	1,02	1,03	1,07	1,07	1,02

Сравнивая полученныя величины K съ данными въ § *46,д*, видимъ, что въ общемъ они немного выше тѣхъ, которыя даются для работы закаленной стали по бронзѣ, но такъ какъ на сохраненіе закала у пальца кривошипа, подверженнаго частому нагрѣванію въ работѣ, разсчитывать нельзя, поэтому нужно признать, что и размѣры пальцевъ кривошипа, при работѣ машинъ съ наибольшимъ указаннымъ для нихъ давленіемъ пара, то же недостаточны, и размѣры поверхности трущагося стыка слѣдовало бы увеличить на величину отъ 25 до 30%.

Этотъ примѣръ убѣждаетъ насъ, какъ осторожно нужно относиться вообще къ даннымъ, касающимся различныхъ относительныхъ размѣровъ частей, приводимыхъ въ какихъ-либо справочныхъ книжкахъ, календаряхъ, атласахъ и проч., въ особенности когда не указаны условія работы той детали, которая изображена на чертежѣ.

Для руководства въ этомъ отношеніи разъ навсегда нужно запомнить слѣдующее:

1. *Ни одинъ изъ прочныхъ размѣровъ частей машинъ не долженъ быть переносимъ съ устройства существующаго на устройство вновь проектируемое къ исполненію, не оправдавши такого переноса размѣровъ повѣркою ихъ крѣпости по заданной нагрузкѣ и даннымъ условіямъ работы,* т. е. вычисленіемъ *max* напряженія въ опасномъ сѣченіи и сравненіемъ вычисленной величины съ допускаемой.

2. *Переносъ размѣровъ съ устройства существующаго на проектируемое безъ провѣрки размѣровъ разсчетомъ не д. б. допускаемъ даже и въ случаѣ одинаковой нагрузки въ обоихъ случаяхъ,* п. ч. даже и при одинаковомъ нагруженіи самыя условія работы деталей м. б. различны, м. б. другая скорость, другое число оборотовъ, другія величины и другой характеръ ударныхъ воздѣйствій, другія условія сборки, ухода, смазки, другія условія связи съ остальными частями и проч.

Вопросы для повторенія главы о сжатіи тѣлъ.

Что такое усадка? Что называется коэф. упругости при сжатіи? Гдѣ находится опасное сѣченіе сжатаго тѣла? Какъ пишется уравненіе крѣпости центрально нагруженнаго тѣла? У какихъ матеріаловъ наблюдается особенно рѣзкая разница въ величинѣ разрушающаго напряженія при растяженіи и сжатіи? Что вліяетъ на полученіе той или другой величины D_0 при опытѣ? Въ чемъ заключается явленіе текучести, и какъ имъ пользуются въ практикѣ? Отъ чего зависитъ существованіе равномѣрнаго или неравномѣрнаго распредѣленія напряженій смятія на стыкѣ двухъ тѣлъ? Какое распредѣленіе желательнѣе и почему? Можетъ-ли быть равномѣрное распредѣленіе давленіе при криволинейномъ стыкѣ? Какимъ правиломъ пользуются, чтобы написать *тот* сопротивленія при неравномѣрномъ распредѣленіи напряженій, не пользуясь интегрированіемъ? Если нагрузка передается не центрально, то, при прямоугольномъ и эллиптическомъ сѣченіи, параллельно которой изъ осей сѣченія выгоднѣе распредѣлить нагрузку? Подъ какимъ условіемъ въ этомъ случаѣ опредѣляется *max* эксцентриситета? Что произойдетъ, если эксцентриситетъ будетъ равенъ, больше или меньше допускаемаго *max* его? Какъ происходитъ сжатіе катковъ, как. обр. распредѣляется напряженіе на стыкѣ ихъ?

Что наз. напряженіемъ изнашиванія? Можетъ-ли оно быть равно напряженію сжатія? Отчего всегда желательно равномѣрное распредѣленіе напряженій на трущемся стыкѣ? Какую роль играютъ *смѣнныя части?* Изъ какого матеріала онѣ дѣлаются? Когда желательно на трущемся стыкѣ имѣть двѣ смѣнныя части? Отъ какихъ причинъ зависитъ снашиваніе трущагося стыка?

Въ чемъ заключается принципъ *Сэллерса* передачи давленія съ покоющагося стыка на трущійся? Указать въ обыденной жизни примѣръ обширнаго примѣненія этого принципа.

Условія правильнаго снашиванія стыковъ поступательной пары; зависимость снашиванія отъ способа приведенія въ движеніе элементовъ пары; примѣры раціональнаго и нераціональнаго устройства. Золотниковый стержень направляется однимъ только сальникомъ; отчего край зеркала, который — дальше отъ эксцентрика, выбивается болѣе другого, ближняго?

Начертить кривую, показывающую законъ измѣненія давленій па шатунъ и на параллель при движеніи поршня, работающаго подъ постояннымъ давленіемъ и подъ перемѣннымъ давленіемъ, законъ измѣненія котораго данъ.

Какъ примѣнить принципъ *Сэллерса* къ устройству ползуна, и какъ можно испортить конструкцію его въ этомъ смыслѣ?

Какъ изнашивается болтъ ползуна и палецъ кривошипа; можно ли устранить стукъ сработаннаго пальца подтягиваніемъ его вкладышей? Какъ не слѣдуетъ передавать давленіе на шарниръ; описать характеръ изнашиванія частей при неправильной работѣ шарнира. На какое мѣсто трущагося стыка нельзя давать смазки; какъ сдѣлать, чтобы смазка попадала также и на элементы поверхности, наиболѣе напряженные?

Чѣмъ опредѣляется *max* возможнаго, допускаемаго давленія на трущемся стыкѣ; какъ составляется разсчетное ур-іе въ различныхъ случаяхъ.

СВОДЪ

главныхъ формулъ и данныхъ изъ главы о сжатіи.

а) Напряженія въ поперечномъ сѣченіи одинаковы.

Допускаемое напряженіе въ *кг.* на кв. *мм.* $\geqq$ $\dfrac{\text{Безопасная нагрузка въ } кг.}{\text{Площадь въ кв. } мм.}$

$D =$ или болѣе $\dfrac{P}{F}$ . . . . 61 § 34.

Степень надежности постройки $= \dfrac{\text{Разрушающее}}{\text{Допускаемое}}$ напряженіе въ *кг.* на кв. *мм.*

$\mathfrak{S} = \dfrac{D_0}{D}$ . . . . введеніе.

Величины D и D_0 — въ § 35.

Характерныя среднія цифры D_0:

Дерево	Желѣзо	Чугунъ
6.	40.	70.

б) Напряженія на стыкѣ двухъ тѣлъ равномѣрно возрастаютъ.

$\dfrac{Max \text{ напряженія на стыкѣ}}{\text{Напряженіе даннаго элемента стыка}} = \dfrac{\text{Разстояніе крайняго}}{\text{Разстояніе даннаго}}$ элемента отъ оси вращенія

$\dfrac{D}{H} = \dfrac{t}{x}$ . . . . § 38.

Моментъ сопротивленія стыка. $=$ Сила сопротивленія стыка. $\times$ Разстояніе центра давленія отъ оси вращенія.

$M_1 = \dfrac{D.l.t}{2} \cdot \dfrac{2}{3} t$. . . . . 62 a § 38.

в) Напряженія на стыкѣ между цилиндромъ вогнутымъ и выпуклымъ.

Среднее напряженіе на проекціи опорной поверхности $=$ $\dfrac{\text{Нагрузка}}{\text{Длина цил.} \times \text{Діам. цил.}}$

$$q = \frac{P}{l \cdot 2r} \ldots \quad \S\ 40.$$

Max. напряженія на стыкѣ $= \dfrac{4}{\pi} \times$ {Среднее напряженіе на проекціи опорной поверхности.}

$$H = \frac{4}{\pi} \cdot q = 1{,}274 \cdot q \ldots \quad \textbf{68}\ \S\ 40.$$

г) Напряженія на стыкѣ перемѣщающихся тѣлъ.

Напряженіе изнашиванія въ *кг.* на кв. *мм.* $=$ $\dfrac{\text{Нагрузка въ } кг.}{\text{Проекція опорной поверхности, воспринимающей давленіе, въ кв. } мм.}$

$$K = \frac{P}{F} \ldots \quad \S\ 43.$$

K много меньше *D*.

Чѣмъ меньше *K*,
Чѣмъ обильнѣе и регулярнѣе смазка,
Чѣмъ скорѣе происходитъ удаленіе теплоты со стыка,
Чѣмъ тщательнѣе установка и приладка стыковъ,
Чѣмъ внимательнѣе уходъ
— тѣмъ лучше, тѣмъ меньше срабатывается стыкъ.

Стыкъ долженъ работать всей разсчетной поверхностью.

Равномѣрность распредѣленія напряженій на стыкѣ — лучшее условіе для правильности его снашиванія.

При передачѣ давленія съ покоющагося стыка на трущійся, или наоборотъ

у стыка

покоющагося	*трущагося*
— возможный *min* опорной поверхности.	— возможный *max* опорной поверхности.

Смазка не должна вступать на стыкъ тамъ, гдѣ напряженіе *max.*

Сопротивленіе тѣлъ сдвигу или срѣзыванію.

48. **Величины напряженій на граняхъ равномѣрно перекошеннаго параллелепипеда.** Пусть имѣетъ параллелепипедъ (сокращенно *п—дъ*) AF (фиг. 63), всѣ отвѣсныя матеріальныя линіи котораго, ||-я направленію CK пусть находятся въ состояніи одинаковаго растяженія. Для этого нужно вообразить себѣ, что данный п—дъ вырѣзанъ изъ прямоугольной призмы, растягиваемой также по извѣстному направленію. Если H — будетъ напряженіе во всѣхъ поперечныхъ сѣченіяхъ этой призмы, тогда, очевидно, то же самое нормальное напряженіе H будетъ существовать и во всѣхъ горизонтальныхъ сѣченіяхъ разсматриваемаго п—да.

Не трудно видѣть, что такой п—дъ находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ передающейся на него внѣшней нагрузки; она можетъ его лишь деформировать, не приводя въ движеніе.

Назовемъ слагающую внѣшней нагрузки, которая передается на грани AE и BF чрезъ P. Тогда, обозначивши ребра п—да чрезъ a, b и c, получимъ:

$$P = c.\ a.\ Sin\ \beta\ .\ H \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{а.}$$

Сосредоточивши обѣ эти слагающія въ точкахъ O и O_2, центрахъ тяжести граней AE и BF, получимъ пару силъ съ плечомъ, величина котораго буд. = проекціи OO_2 или ребра CD на горизонталь, т. е. $b.\ Cos\ \beta$, и моментъ этой пары будетъ:

$$mom\ P = a.\ b.\ c.\ Sin\ \beta.\ Cos\ \beta\ .\ H \quad \ldots\ldots \quad \text{б.}$$

Такимъ же образомъ, называя слагающую внѣшней нагрузки, которая передается на грани DF и AI чрезъ P_1, получимъ:

$$P_1 = c.\ b.\ Cos\ \beta.\ H \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{в.}$$

Сосредоточивши обѣ эти слагающія въ точкахъ O_1 и O_3, получимъ пару силъ съ плечомъ, величина котораго будетъ = проекціи $O_1\ O_3$ или ребра AD на горизонталь, т. е. $a.\ Sin\ \beta$, и моментъ этой пары будетъ:

$$mom\ P_1 = a.\ b.\ c.\ Sin\ \beta.\ Cos.\ \beta\ .\ H \quad \ldots\ldots \quad \text{г.}$$

Сравнивая выраженія **б** и **г**, видимъ, что моменты внѣшней отвѣсной нагрузки, распредѣленной по гранямъ п—да равномѣрно, совершенно одинаковы, поэтому такая нагрузка привести тѣло въ движеніе будетъ не въ состояніи, она будетъ деформировать п—дъ.

Замѣтимъ при этомъ, что длина реберъ a, b, c выбрана произвольно, и что равновѣсіе подобнаго п-да существуетъ при всякой длинѣ его реберъ.

Разложимъ погрузку P на двѣ — N, *нормальную* къ грани AE, и Q — *тангенціальную*. Дѣйствіе нормальныхъ нагрузокъ на грани AE и BF взаимно уравновѣшивается, а дѣйствіе тангенціальныхъ нагрузокъ Q приводится къ парѣ силъ съ плечомъ b. Каждая изъ этихъ нагрузокъ Q равномѣрно распредѣлена по поверхности граней AE и BF *съ тангенціальнымъ напряженіемъ* t, поэтому:

$$Q = a.\ c.\ t \qquad \text{д.}$$

Съ другой стороны

$$Q = P\,.\ Cos\ \beta = c.\ a.\ Sin\ \beta.\ Cos\ \beta.\ H \qquad \text{е.}$$

Отсюда

$$t = H.\ Sin\ \beta.\ Cos\ \beta \qquad \text{ж.}$$

Так. же обр. и нагрузку P_1 разложимъ на нормальную N_1 и тангенціальную Q_1. Нормальныя нагрузки N_1, дѣйствующія на грани CE и AI, взаимно уравновѣшиваются, а тангенціальныя Q_1 приводятся къ парѣ съ плечомъ a. Каждая изъ этихъ нагрузокъ Q_1 равномѣрно распредѣлена по поверхности граней CE и AI; если t_1 будетъ тангенціальное напряженіе на нихъ то,

$$Q_1 = b.\ c.\ t_1 \qquad \text{з.}$$

Съ другой стороны

$$Q_1 = P_1 .\ Sin\ \beta = b.\ c.\ Sin\ \beta.\ Cos\ \beta.\ H \qquad \text{и.}$$

Отсюда

$$t_1 = H.\ Sin\ \beta.\ Cos\ \beta \qquad \text{і.}$$

Сравнивая ф-лы **ж**, **і** съ ф-лой **5** (см. § 7) находимъ, между ними полнѣйшее тождество и въ то же время обнаруживаемъ, что

$$t = t_1 \qquad \mathbf{77.}$$

т. е. *тангенціальныя напряженія на скашиваемыхъ граняхъ равномѣрно перекашиваемаго параллелепипеда всегда равны между собою.*

Но т. к. результатъ сдѣланнаго вывода вовсе не зависитъ отъ длины реберъ п-да. и величины нормальныхъ силъ N и N_1, слѣд., можно сказать также, что *тангенціальныя напряженія во всякомъ равномѣрно перекашиваемомъ п-дѣ одинаковы во всѣхъ плоскостяхъ, параллельныхъ скашиваемымъ гранямъ.*

Съ измѣненіемъ величины угла β измѣняется также и величина тангенціальныхъ напряженій на граняхъ п-да, вырѣзаннаго изъ растянутаго или сжатаго бруса.

Когда β равно O или 90^0 . . . . $t = 0$,

т. е. *въ продольныхъ и поперечныхъ плоскостяхъ растянутаго или сжатаго бруса тангенціальныхъ напряженій нѣтъ,* а потому и п-ды, вырѣзаемые изъ такихъ брусьевъ съ ребрами, ||-ми оси бруса, при дѣйствіи на нихъ растягивающей нагрузки не перекашиваются.

Когда $\beta=45^0$ . . . . . . $max\ t=\frac{H}{2}$,

т. е. *наибольшее тангенціальное напряженіе при растяженіи или сжатіи бруса возбуждается на граняхъ квадратныхъ призмъ, оси которыхъ* $\perp$ *къ оси бруса, а діагональныя плоскосии* $\|$*-ы направленію дѣйствія растягивающей нагрузки, и величина его равна половинѣ нормальнаго напряженія.*

49. **Равномѣрное перекашиваніе параллелепипеда безъ вытяжки его реберъ.** *а. Перекосъ.* Въ § 48 было разсмотрѣно равномѣрное перекашиваніе п-да, которое происходило подъ дѣйствіемъ тангенціальныхъ силъ Q и Q_1 и нормальныхъ N и N_1. Разсмотримъ теперь такой случай равномѣрнаго перекашиванія п-да, при которомъ нормальныя силы на граняхъ п-да вовсе отсутствовали бы, а перекашиваніе его происходило бы подъ дѣйствіемъ только двухъ паръ силъ Q и Q_1 (фиг. 64). Выводъ ф-лы **77** предыдущаго § вовсе не зависитъ отъ величины нормальныхъ силъ N и N_1, а потому и здѣсь также тангенціальныя напряженія будутъ одинаковы во всѣхъ плоскостяхъ, $\|$-хъ гранямъ п-да, нагруженнымъ силами Q и Q_1.

Мы предполагаемъ, что подъ дѣйствіемъ двухъ паръ силъ Q и Q_1 п-дъ обращается въ призму съ основаніемъ въ видѣ параллелограмма AB_1C_1D. Переходъ ребра B въ положеніе B_1 долженъ въ сущности совершаться перемѣщеніемъ точки B по дугѣ круга BB_1, описанной изъ центра A. Мы предполагаемъ однако, что самыя перемѣщенія реберъ п-да при его перекашиваніи весьма незначительны, и что BB_1 можно считать нормальною къ AB.

Явленіе можно представлять себѣ происходящимъ такимъ образомъ, что каждая вышележащая матеріальная плоскость перемѣщается относительно смежной съ ней нижележащей, сдвигаясь вправо, по направленію бо́льшей изъ двухъ тангенціальныхъ силъ. Поэтому и са́мое явленіе, происходящее въ такомъ видѣ, часто называютъ явленіемъ *сдвига.*

Уголъ $BAB_1=\varphi$ наз. *угломъ перекашиванія.* Перемѣщенія BB_1 и LL_1, получаемыя при этомъ точками B и L, наз. *сдвигами*, а силы Q и Q_1—*силами сдвига.*

Отношеніе величины сдвига къ разстоянію сдвигаемой точки ребра отъ неподвижной наз. *относительнымъ сдвигомъ* или *перекосомъ.* Очевидно изъ чертежа, что *у равномѣрно перекашиваемаго п-да величина перекоса въ каждой точкѣ одинакова и можетъ быть измѣрена величиной угла перекашиванія,* т. е.

$$\varphi=\frac{BB_1}{AB}=\frac{LL_1}{AL}=\ldots=const.$$

б. Вытяжка наклонныхъ линій, $\|$*-хъ основаніямъ перекошенной призмы.* Возьмемъ произвольную наклонную линію AK подъ угломъ δ къ направленію силы сдвига Q. Послѣ перекашиванія п-да точка K

перейдетъ въ K_1, а линія AK займетъ положеніе AK_1, удлиняясь при этомъ. Вытяжка этой линіи будетъ

$$i = \frac{AK_1 - AK}{AK}.$$

Для вычисленія ея проектируемъ многоугольный контуръ AKK_1A на направленіе AK. Вслѣдствіе незначительности допускаемыхъ при этомъ перемѣщеній, принимаемъ, что *Cos* угла KAK_1 не отличается отъ единицы; тогда:

$$AK_1 = AK + KK_1 \,.\, Cos\,\delta, \text{ откуда}$$

$$i = \frac{KK_1}{AK} \,.\, Cos\,\delta = \frac{KD}{AK} \,.\, \varphi \,.\, Cos\,\delta, \text{ или}$$

$$i = \varphi .\; Sin\,\delta .\; Cos\,\delta = \frac{\varphi}{2} .\; Sin\,2\,\delta \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{78.}$$

Совершенно то же самое выраженіе мы получили бы и для усадки наклонной линіи DL, наклоненной къ направленію силы сдвига Q подъ тѣмъ же угломъ δ, т. е.

$$i_1 = \frac{DL - DL_1}{DL} = \frac{\varphi}{2} \,.\, Sin\,2\,\delta \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{78,a.}$$

Если растянутая линія AK работаетъ съ напряженіемъ H, а сжатая DL съ напряженіямъ H_1, то по закону *Гука* можно написать, что

$$\begin{array}{l} H = E .\; i \\ H_1 = E .\; i_1 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{к.}$$

Если $\delta = 0$ . . . . . $i = i_1 = 0$ . . . . $H = H_1 = 0$.

При $\delta = 90^0$ . . . . . . $i = i_1 = 0$ . . . . $H = H_1 = 0$.

При $\delta = 45^0$ . . . . . $max\; i = max\; i_1 = \frac{\varphi}{2}$ . . . . . . **78 в.**

При перемѣнѣ δ на $(90 - \delta)$ въ ф-лахъ **78** и **78 а** величины i и i_1, а слѣд. также H и H_1, не измѣняются.

Полученные результаты позволяютъ сдѣлать заключеіе о сущности явленія сдвига подъ дѣйствіемъ одних тангенціальныхъ силъ:

1. *Ребра перекошеннаго п-да не измѣняютъ своей длины*, п. ч. $i = \lambda : l = 0$, а при конечной длинѣ l это выраженіе требуетъ, чтобы удлиненіе или укороченіе λ было $= 0$.

2. *Растянутыя линіи, лежащія въ плоскости, ||-й основанію перекошенной призмы, и наклоненныя подъ однимъ и тѣмъ же угломъ къ ея гранямъ* (горизонтальной или вертикальной—безразлично), *испытываютъ одинаковое напряженіе*. То же самое можно сказать и по отношенію къ сжатымъ линіямъ, если ихъ сравнивать между собою.

3. *Одинаково напряженныя растянутыя и сжатыя линіи, лежащія въ плоскостяхъ, ||-хъ основанію перекошенной призмы, дѣлаютъ одинаковый уголъ съ ея гранями.*

4. *Наибольшее напряженіе растяженія и сжатія проявляется въ плоскостяхъ перекошенной призмы, дѣлящихъ пополамъ уголъ между ея гранями.*

в. Зависимость между тангенціальнымъ напряженіемъ и перекосомъ. Возьмемъ произвольную плоскость A_1B_1 (фиг. 65) перекашиваемаго п-да и представимъ себѣ, что этою плоскостью п-дъ какъ бы раздѣленъ на 2 части—I и II. Послѣ того какъ равновѣсіе внѣшнихъ и внутреннихъ силъ установилось, вообразимъ себѣ I-ю часть отнятою отъ II-й и замѣнимъ дѣйствіе I-й части на II-ю внутренними силами. Если возьмемъ 2 направленія xy и xz (фиг. 65) подъ угломъ δ къ сѣченію A_1B_1, тогда мы знаемъ, что на этихъ линіяхъ лежатъ матеріальныя точки, проявляющія на точку x воздѣйствіе, одинаковое по величинѣ, но различное по характеру: на линіи xy лежатъ точки, притягивающія x, а на линіи xz — отталкивающія ее. Складывая каждый разъ эти взаимодѣйствія на точку x, мы будемъ получать слагающую, направленную не иначе, какъ въ плоскости A_1B_1. Алгебраическая сумма такихъ взаимодѣйствій части I-й на II-ю и представитъ намъ полную тангенціальную силу, дѣйствующую въ плоскости A_1B_1 и равную по величинѣ внѣшней силѣ сдвига Q_1.

Возьмемъ въ плоскости A_1B_1 площадь элемента съ высотою $xf = m$ и шириною c, равною ширинѣ п-да. На элементъ площади съ высотою xf передаются 2 пучка силъ—слѣва растягивающій, справа—сжимающій площадь элемента. Напряженіе, одинаковое въ каждомъ изъ этихъ пучковъ, обозначимъ чрезъ H. Нормальное сѣченіе каждаго пучка будетъ $c.m.Sin\,\delta$, а величина силы, передающейся на площадь элемента по направленію xy, будетъ $c.\ m.\ Sin\,\delta.H$. Такая же величина будетъ получена и для сжимающей силы, дѣйствующей на разсматриваемый элементъ по направленію xz. Проектируя ихъ на направленіе A_1B_1, получимъ величину тангенціальной силы, приходящейся на элементъ площади $c.m$; эта сила будетъ:

$$2.c.m.H.Sin\,\delta.Cos\,\delta,$$

а ея тангенціальное напряженіе

$$\triangle t = 2H.Sin\,\delta.Cos\,\delta = H.Sin\,2\delta.$$

Пользуясь ф-лами к и 78 этого §, получимъ вмѣсто послѣдняго равенства слѣдующее:

$$\triangle t = \frac{\varphi}{2}.E.Sin^2 2\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad л.$$

Это есть величина напряженія, которая получается на площади элемента отъ воздѣйствія силъ надъ угломъ δ къ вертикали. Если измѣнять величину угла δ въ предѣлахъ отъ O до $0,5.\pi$, каждый разъ опредѣлять величину $\triangle t$ и взять ихъ сумму, тогда получимъ полное тангенціальное напряженіе на площади элемента $c.m$, являющееся результатомъ воздѣйствія на нее всѣхъ точекъ тѣла.

Оно будетъ:

$$t = \sum \Delta t = \frac{\varphi}{2} \cdot E. \sum_{\delta=0}^{\delta=\frac{\pi}{2}} \left(Sin\ 2\ \delta\right)^2, \text{ или}$$

$$t = \frac{\pi}{8} \cdot E.\varphi = G.\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{79.}$$

Сравнивая ф-лы **79** и **10**, видимъ, что онѣ по существу тождественны и что ф-ла **79** представляетъ собою законъ *Гука*, написанный для явленія сдвига, гдѣ величина перекоса φ замѣняетъ собою величину вытяжки i въ ф-лѣ **10**. Поэтому и величину коэф. G наз. *коэф. упругости при сдвигѣ*, или *коэф. упругости 2-го рода* въ отличіе отъ величины E, которую называютъ въ такомъ случаѣ *коэф. упругости 1-го рода*.

Подтвержденіе ф-лы **79** путемъ непосредственнаго опыта на явленіи чистаго сдвига невозможно, т. к. осуществить самое явленіе въ условіяхъ § 49 совсѣмъ нельзя: изъ тангенціальныхъ силъ извѣстна только сила тренія, а чтобы возбудить ее на грани п-да, надо непремѣнно передать извнѣ давленіе на грань его, т. е. ввести опять нормальныя напряженія на граняхъ п-да, которыя мы имѣли въ § 48, только въ обратномъ направленіи.

Въ приближенной формѣ явленіе сдвига м. б. осуществлено по схемѣ, показанной на фиг. 66, гдѣ оба конца тѣла плотно задѣланы во втулки A и B, а средняя часть охвачена втулкой C; оставляя втулки A и B неподвижными и перемѣщая втулку C, получаютъ перекашиваніе въ частяхъ mn и pq тѣла, но равномѣрность распредѣленія напряженія въ поперечныхъ сѣченіяхъ тѣла ничѣмъ при этомъ не гарантирована. Размѣры mn и pq д. б. не велики сравнительно съ размѣромъ qr, взятымъ по направленію дѣйствія нагрузки P, иначе получается сгибаніе тѣла.

50. **Разсчетное ур-іе при сдвигѣ и величины допускаемыхъ напряженій.** Если Q будетъ тангенціанальная сила, стремящаяся произвести сдвигъ тѣла по площади сѣченія F, на которой напряженія распредѣлены равномѣрно, тогда вызываемая величина тангенціальнаго напряженія будетъ:

$$t = \frac{Q}{F}$$

Пусть S будетъ *допускаемое* напряженіе на сдвигъ, тогда разсчетное ур-іе на сдвигъ тѣла будетъ:

$$S = \text{ или болѣе } \frac{Q}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{80.}$$

Безопасная площадь будетъ:

$$F = \text{ или болѣе } \frac{Q}{S}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{80,a.}$$

Безопасная нагрузка, допускаемая при сдвигѣ, получится равною:

$$Q = \text{или менѣе } F.S \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{81,6.}$$

Разрушающее напряженіе при сдвигѣ S_0 при условіяхъ опыта, выполняемаго по схемѣ фиг. 66, получается весьма близко къ $\frac{4}{5}Z_0$, поэтому и допускаемое напряженіе на сдвигъ берутъ часто на 20% менѣе, чѣмъ Z—при растяженіи

$$S = \frac{4}{5} Z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{82.}$$

Но въ виду того, что равномѣрности распредѣленія тангенціальнаго напряженія по разсматриваемой площади на самомъ дѣлѣ нѣтъ, полезно брать допускаемое напряженіе менѣе того, что выражено ф-лой **82**.

Величины допускаемыхъ напряженій на сдвигъ S и величины коэф. упругости 2-го рода G (обѣ въ *кг.* на кв. *мм.* даны въ табл. 10-й.

Таблица 10-я.

НАЗВАНІЕ МАТЕРІАЛОВЪ.	S	G
Желѣзо сварочное	4,8—2,4	7700
„ литое (Flusseisen)	6,4—2,4	8300
Сталь литая прокатная или кованая . .	8—4	8500
Стальное литье.	5,6—2,8	8300
Чугунъ.	2,0—1,6	2900—4000
Бронза.	2,0—1,6	—
Дубъ ‖ волок.	1,00—0,08	—
„ ⊥ „	0,125	—
Сосна ‖ „	0,08—0,04	—
„ ⊥ „	0,1	—

51. **Пробиваніе металловъ.** Если въ полосѣ, имѣющей толщину e, пробивается отверстіе діам. d, тогда происходитъ сдвигъ и срѣзываніе металла по поверхности $\pi.d.e$. Долгое время предполагали, что сопротивленіе срѣзыванію остается при этомъ постояннымъ и что его можно вычислять, умножая поверхность срѣзыванія на разрушающее напряженіе при срѣзываніи S_0. Работа, потребная для пробиванія отверстія, выраженная въ kg—mt, опредѣлялась тогда слѣд. ф-лой:

$$A = \pi.d.e.S_0 \cdot \frac{e}{1000} = \frac{S_0.\pi.d^3}{1000} \cdot \left(\frac{e}{d}\right)^2$$

гдѣ S_0 выражено въ кг. на кв. $^m/_m$, а поверхность срѣзыванія — въ кв $^m/_m$.

Изслѣдованіе этого вопроса было сдѣлано проф. *Keller*, въ Карльсруэ въ 1887 г. *). Діаграмма измѣненія сопротивленія срѣзыванія имѣетъ, примѣрно, такой видъ, какъ показываетъ фиг. 67, гдѣ кривая AB_1 отмѣчаетъ періодъ возрастанія сопротивленія до нѣкотораго *max* BB_1. Пока пробойникъ проходитъ путь AB, происходитъ только вдавливаніе бойка въ металлъ (фиг. 68, I); затѣмъ начинается выпучиваніе металла съ нижней стороны (фиг. 68, II) безъ образованія разрыва матеріала, въ это время сопротивленіе падаетъ, какъ показываетъ кривая B_1C_1; наконецъ матеріалъ разрывается и вверху и внизу, и начинается перерѣзаніе его, сопровождающееся паденіемъ сопротивленія по кривой C_1D; абсцисса AB на діаграммѣ составляетъ приблизительно $\frac{e}{5}$ и $AC =$ около $\frac{e}{3}$, такъ что срѣзываніе металла происходитъ только на высотѣ около $\frac{2}{3}e$.

Для вычисленія работы пробиванія въ *kg-mt* проф. *Keller*, на основаніи цѣлаго ряда точныхъ опытовъ, далъ слѣдующую ф-лу:

$$A = 0{,}0203.\ \pi.\ d^3 \left[\left(\frac{e}{d}\right)^2 - 0{,}14.\frac{e}{d} + 0{,}01 \right] \quad \ldots\ldots \mathbf{83},$$

гдѣ d — въ *мм*. Съ помощію этихъ опытовъ было обнаружено также, что и величина наибольшаго сопротивленія, и величина работы срѣзыванія повышаются съ возрастаніемъ скорости прохода пробойника, но зато при этомъ менѣе страдаетъ матеріалъ. Увеличивая скорость прохода бойка, путемъ примѣненія ударнаго воздѣйствія падающей бабы вмѣсто спокойнаго давящаго дѣйствія дыропробивной машины, инж. Шуховъ достигалъ въ своихъ опытахъ отличныхъ результатовъ, какъ въ смыслѣ полученія чистаго отверстія, такъ и въ смыслѣ сохраненія матеріала; так. обр. оказывается, напр., возможнымъ пробивать дыры даже въ плитахъ изъ колосниковаго чугуна $^1/_4$ д. толщиною безъ образованія трещинъ на нихъ.

52. **Задачи. № 26**. У цѣпи *Галля*, изображенной на фиг. 4, повѣрить крѣпость валиковъ на срѣзываніе, принимая во вниманіе и собственный вѣсъ ея въ предположеніи, что свободно висящій съ колеса конецъ ея имѣетъ длину 6 *mt*.

Цѣпь эта предназначена для подъема груза въ 1000 *кг.* (см. *зад.* № 3). Погонный *mt* такой цѣпи вѣситъ 3,8 *кг.* (см. *тамъ же*), поэтому собственный вѣсъ цѣпи въ нашемъ случаѣ будетъ 3,8 . 6 или около 23 *кг.* Разсчетная нагрузка получается = 1023 *кг.*

Въ наиболѣе опасномъ положеніи будетъ самый верхній валикъ, только что спустившійся съ колеса: при *четырехъ* рабочихъ звеньяхъ у него будетъ *шесть* поверхностей сдвига, по которымъ можетъ про-

*) *Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing.*, 1838, №№ 4—5.

изойти разрушеніе; если звенья B и C (фиг. 4) срѣжутъ валикъ A, поверхностей сдвига будетъ *три,* обозначенныя цифрами 1, 2, 3 на фиг. 4 у валика A; у звеньевъ D и E имѣются еще 3 такихъ же поверхности.

Діам. валика A — 10 $^m/_m$, площадь сѣченія его 78,5 кв. $^m/_m$. Напряженіе сдвига получится равнымъ

$$H = \frac{1023}{6 \,.\, 78,5} = 2,2 \text{ кг. на кв. } ^m/_m,$$

что вполнѣ допустимо для желѣзнаго валика.

По отношенію къ внутреннимъ звеньямъ $B_1C_1D_1E_1$ (фиг. 4) валики бываютъ въ одномъ положеніи на 33% прочнѣе, чѣмъ въ остальныхъ, когда тамъ у 4-хъ валиковъ является *восемь*, а не *шесть* поверхностей сдвига. Такое положеніе для каждаго валика существуетъ только *одно*, это — когда валикъ M зацѣпилъ за 1-й зубъ колеса, а внутреннія звенья цѣпи $A_1B_1C_1D_1$ еще свѣшиваются съ колеса и передаютъ на него всю нагрузку.

№ 27. Врубка сосновой стропильной ноги A (фиг. 69) въ сосновый лежень B сдѣлана такъ, какъ показано на эскизѣ. Нога перемѣщается по лежню горизонтальной нагрузкой $P = 2100$ *кг.* Повѣрить смятіе на торцѣ mn и найти разстояніе x, на которомъ надо начать врубку отъ свободнаго конца лежня.

Поверхность смятія въ плоскости mn будетъ (см. фиг. 69):

$$F = 120 \,.\, 30 + 40 \,.\, 30 = 4800 \text{ кв. мм.}$$

Напряженіе смятія будетъ

$$H = 2100 : 4800 = 0,44 \text{ кг. на кв. мм.}$$

По даннымъ тб. 9-й можно считать это напряженіе допустимымъ.

Поверхность сдвига будетъ имѣть видъ желоба съ длиною x и периметромъ обрѣза.

$$abcdef = 180 \text{ мм.}$$

Разсчетное ур-іе на сдвигъ приметъ видъ

$$P = \text{или менѣе } 180 \,.\, x \,.\, S$$

Принявши $S = 0,06$, получимъ

$$x = \frac{2100}{180.0,06} = 194.$$

Принимаемъ $x = 200$ *мм.*

№ 28. Валъ діам. 80 *мм.* лѣвымъ стыкомъ обварка B (фиг. 70) воспринимаетъ давленіе P, которое вызываетъ на трущемся стыкѣ напряженіе изнашиванія не болѣе 0,6 *кг.* на кв. *мм.* Опредѣлить минимальную возможную толщину обварка, когда онъ износится.

Діам. обварка данъ на эскизѣ въ 96 *мм.*, слѣд., ширина стыка— 8 *мм.*, поверхность трущагося стыка будетъ:

$$\pi.(80+8).8=276{,}5.8=2212 \text{ кв. } мм.$$

Возможная въ работѣ величина давленія P получится такъ:

$$P=2212.0{,}6=1327{,}2 \ кг.$$

Примемъ ее $=1350$ *кг.* Разсчетное ур-іе на сдвигъ заплечика будетъ:

$$1350=S.\pi.80.y$$

Имѣя въ виду возможность несовершенства приварки заплечика беремъ $S=2$ *кг.* на кв. *мм.* Тогда

$$y=\frac{1350}{2.251}=\frac{1350}{502}$$

Прочная величина y выходила бы так. обр. менѣе 3 *мм.*; прибавляя къ вычисленной величинѣ около 5 *мм.* на изнашиваніе, получимъ исполняемую величину

$$y= \text{ или болѣе } 8 \ мм.$$

№ 29. Деталь A (фиг. 71), привернутая къ B болтомъ діам. $1^1/_8$ *дм.*, воспринимаетъ на себя нагрузку, дѣйствующую въ плоскости стыка; на данный болтъ приходится нагрузка $P=3000$ *кг.* Требуется воспринять ее на закладное кольцо L, вточенное въ A и B на половину своей высоты. Детали A и B—чугунныя, кольцо L—желѣзное, плотно вточенное въ A и B и свободно пропускающее сквозь себя болтъ C. Опредѣлить размѣры кольца.

Примемъ внутренній діаметръ кольца $d_0=30$ *мм.* и доп. напряж. на сдвигъ его $S=4$ *кг.* Тогда разсчетное ур-іе на сдвигъ будетъ:

$$3000=\frac{\pi}{4}\left(d_1^2-30^2\right).4, \text{ откуда}$$

$$d_1=\text{ или болѣе } 44 \ мм.$$

Поверхность смятія между кольцомъ L и каждой изъ деталей A и B въ проекціи на поперечное направленіе относительно нагрузки, будетъ $d_1.e$. Допуская напряженіе смятія для чугуна и желѣза $D=8$ *кг.*, разсчетное ур-іе получимъ въ такомъ видѣ:

$$3000=8.44.e, \text{ откуда } e=8{,}5 \ мм.$$

Если бы дано было при этомъ еще условіе—не занимать кольцомъ въ высоту, напр., болѣе 15 *мм.* $=k$, тогда

$$e=\frac{k}{2}=7{,}5,$$

а изъ ур-ія крѣпости на смятіе

$$d_1=\frac{3000}{8.7{,}5}=50 \ мм.$$

№ 30. Найти зависимость между коэффиціентами упругости 1-го и 2-го рода—E и G, разсматривая вытягиваніе куба подъ дѣйствіемъ слабой нагрузки.

Пусть на верхней и нижней грани куба B_0D_0 (фиг. 72) равномѣрно распредѣлена одинаковая нагрузка P, дающая небольшое нормальное напряженіе H во всѣхъ горизонтальныхъ плоскостяхъ. Если сторона куба будетъ

$$a = A_0B_0 = B_0C_0 = \ldots\ldots, \text{ тогда}$$

$$A_0C_0 = a.\sqrt{2};\ H = P : a^2$$

Опредѣлимъ нормальную и тангенціальную силу для діагональной плоскости

$$P^2 = N^2 + Q^2$$

$$N = Q = \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{H.\ a^2}{\sqrt{2}}$$

Если нормальное и тангенціальное напряженіе будутъ h и t, тогда

$$h = t = \frac{H.\ a^2}{\sqrt{2}} : a^2.\ \sqrt{2} = \frac{H}{2},$$

что вполнѣ согласно съ ф-мой **6**, выведенной въ § 7.

При деформированіи куба вертикальныя его ребра удлинятся, а горизонтальныя укоротятся (см. § 15). Если $ABCD$ (фиг. 73) будетъ изображеніе деформированной стороны куба, ||-й направленію дѣйствія нагрузки, то

$$BC = a\ (1 + i)$$

$$AB = a\ (1 - i_1) = a\left(1 - \frac{i}{m}\right)$$

Если весьма малый уголъ перекашиванія діагональныхъ плоскостей назовемъ чрезъ φ, то

$$BC = AC.\ tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \text{ или}$$

$$1 + i = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \cdot \frac{1 + tg\,\frac{\varphi}{2}}{1 - tg\,\frac{\varphi}{2}}$$

Въ виду малости угла φ вмѣсто tg половинной его дуги можно вносить саму эту дугу, и тогда получимъ:

$$(1 + i)\ (2 - \varphi) = \left(1 - \frac{i}{m}\right)\left(2 + \varphi\right), \text{ или}$$

$$2 + 2.\ i - \varphi - i.\ \varphi = 2 - \frac{2\ i}{m} + \varphi - \frac{i\ \varphi}{m} \quad \ldots\ldots \text{a.}$$

Величины вытяжки i и перекоса φ, входящія въ это р-во, суть весьма малыя правильныя дроби:

$$i = \frac{H}{E};\ \varphi = \frac{t}{G} = \frac{H}{2.\ G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{б.}$$

Пусть, напр., для желѣза $H = 2$ *кг.* на кв. *мм.*,

$$E = 20000 \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$G = 8000 \quad \text{"} \quad \text{"},$$

тогда

$$i = \frac{1}{10000}; \; \varphi = \frac{1}{8000}$$

Поэтому безъ большой погрѣшности произведеніемъ $i.\varphi$ въ ф-лѣ **а** можно пренебречь, и дать ей слѣдующій видъ:

$$2i - \varphi = -\frac{2i}{m} + \varphi, \text{ или}$$

$$i.\frac{m+1}{m} = \varphi, \text{ или}$$

$$E : G = 2 \cdot \frac{m+1}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{84.}$$

Если сдѣлаемъ $m = 4$..... $G = 0{,}4.E$ . . . . **84,а.**

53. **Распредѣленіе напряженій сдвига на сросткѣ двухъ тѣлъ, ⊥-номъ къ общей оси вращенія ихъ.** *а) Ур-іе напряженій на сросткѣ.* Пусть два тѣла соприкасаются между собою по плоскости сростка BC (фиг. 74), которая совпадаетъ съ плоскостью чертежа и въ то же время нормальна къ общей оси вращенія тѣлъ A. Центръ тяжести этого сростка лежитъ въ O на разстояніи a отъ оси вращенія. Если одно тѣло получитъ перемѣщеніе относительно другого на весьма малый уголъ Θ, тогда перемѣщеніе какой-нибудь матеріальной точки D, лежащей на плоскости сростка въ разстояніи r отъ оси A, будетъ $= r.\Theta$, т. е., при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, оно будетъ пропорціонально разстояніямъ матеріальныхъ точекъ сростка отъ оси вращенія тѣла.

Допуская, что на сросткѣ BC, при передачѣ чрезъ него вращательнаго момента M отъ одного тѣла къ другому, возбуждаются только однѣ упругія деформаціи, и что онѣ будутъ пропорціональны соотвѣтственнымъ напряженіямъ, ур-іе напряженій сдвига на сросткѣ BC мы ожемъ написать въ такомъ видѣ (см. фиг. 74):

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{R}, \text{ или } h = \frac{r}{R}.H \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{85,}$$

если h будетъ напряженіе сдвига въ произвольно взятой матеріальной точкѣ D, H — напряженіе въ точкѣ E, наиболѣе удаленной отъ оси вращенія, а r и R—соотвѣтственные радіусы векторы точекъ.

Ф-ла **85** и представляетъ собою ур-іе напряженій на сросткѣ.

б) Разсчетное ур-іе сростка. Элементъ площади dF, центромъ тяжести котораго является точка D, окажетъ сопротивленіе сдвигу, равное $h.dF$. Моментъ этого элементарнаго сопротивленія относительно оси вращенія тѣлъ будетъ $r.h.dF$. Взявши сумму такихъ моментовъ для всѣхъ элементовъ площади BC, мы должны имѣть ее равной данному

вращательному моменту, который передается отъ одного тѣла къ другому чрезъ сростокъ BC, т. е.

$$M = \sum r \,.\, h \,.\, dF = \frac{H}{R} \cdot \int r^2 \,.\, dF, \text{ или}$$

$$M = \frac{H}{R} \cdot \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{86.}$$

Въ этой ф-лѣ I_a представляетъ собою *полярный моментъ инерціи* площади сростка относительно оси вращенія тѣлъ, т. е. *распространенную на всю площадь сростка алгебраическую сумму произведеній изъ элементарныхъ площадей на квадраты разстояній ихъ отъ общей оси вращенія.*

Ф-ла **86** показываетъ, что *передаваемый чрезъ сростокъ отъ одного тѣла къ другому вращательный моментъ = произведенію* **а**) *изъ отношенія напряженія сдвига на сросткѣ въ точкѣ, наиболѣе удаленной отъ оси вращенія, къ радіусу вектору этой точки,* **б**) *на полярный моментъ инерціи площади сростка относительно оси вращенія тѣлъ.*

Кромѣ ур-ія моментовъ, надо разсмотрѣть еще ур-ія проекцій внутреннихъ и внѣшнихъ силъ на оси координатъ.

Выберемъ начало координатъ въ центрѣ тяжести O (фиг. 74), сростка, направимъ ось x-въ по радіусу вектору OA, а ось y-овъ расположимъ въ плоскости сростка $\perp$-но къ OA.

Внѣшній вращательный *mom* не даетъ проекцій силъ на оси координатъ. Это обстоятельство требуетъ, чтобы для внутреннихъ силъ сами собою удовлетворялись р-ва:

$$\Sigma X = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{а},$$

$$\Sigma Y = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{б}.$$

Если радіусъ векторъ $AD = r$ взятъ подъ угломъ β къ оси x-овъ, тогда проложеніе элементарнаго сопротивленія на ось x-овъ будетъ $h \,.\, dF \,.\, Sin\, \beta$. По равенству **а** необходимо имѣть

$$\Sigma h \,.\, Sin\, \beta \,.\, dF = 0 \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{87.}$$

Это ур-іе равновѣсія удовлетворяется само собою при распространеніи его на всю площадь стростка только въ такомъ случаѣ, если линія, соединяющая центръ тяжести сростка является осью симметріи сростка (см. фиг. 75).

Это условіе необходимо выполнить, иначе при передачѣ вращательнаго момента чрезъ сростокъ возбудится давленіе на ось A по направленію линіи OA, вызываемое дѣйствіемъ внутреннихъ силъ.

Точно также, проектируя элементарныя сопротивленія $h . dF$ на ось y-овъ, получимъ ихъ сумму

$$K = \sum h \,.\, Cos\, \beta \,.\, dF \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{88.}$$

Эта сумма не равна нулю ни въ какомъ случаѣ, и ф-ла б показываетъ, что равновѣсіе устанавливается здѣсь потому только, что при передачѣ *mom* M чрезъ сростокъ BC возбуждается на оси A давленіе по оси y-овъ, равное слагающей изъ внутреннихъ силъ.

Слѣд., *если передача* **mom** *отъ одного тѣла къ другому, имѣющему съ 1-мъ общую ось вращенія, происходитъ посредствомъ сростка, расположеннаго по одну сторону отъ оси вращенія, неизбѣжно возбуждается* **давленіе на оси;** *направленіе давленія нормально къ линіи, соединяющей центръ вращенія съ центромъ тяжести сростка; а величина давленія равна суммѣ проекцій всѣхъ силъ сдвига на сросткѣ, взятыхъ на вышеуказанное направленіе давленія.*

Чтобы уничтожить добавочныя давленія на оси тѣлъ, нужно имѣть два или нѣсколько діаметрально противоположныхъ и одинаковыхъ сростковъ.

Изъ трехъ написанныхъ нами уравненій равновѣсія два послѣднія разъясняютъ только сущность явленія передачи *mom* отъ одного тѣла къ другому, разсчетнымъ же уравненіемъ является формула **86.**

Сдѣлаемъ преобразованіе ф-лы **88**, чтобы выяснить величину давленія K на оси. Пользуясь ф-лой **85**, можемъ написать:

$$K = \sum H . \frac{r}{R} . Cos\,\beta . dF \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{в.}$$

Изъ чертежа (фиг. 74) имѣемъ:

$$r . Cos\,\beta = a + \varrho . Cos\,\varphi = a + x.$$

Поэтому

$$K = \frac{H}{R} . a . F + \frac{H}{R} \int x . dF \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{г.}$$

$$\int x . dF = x_0 . F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{д.}$$

Этотъ интегралъ обращается въ 0 потому, что онъ представляетъ собою *статическій mom всей площади,* взятый относительно оси, лежащей въ плоскости сѣченія и проходящей чрезъ ц. т. его; по теоремѣ о центрѣ тяжести это выраженіе д. б. = всей площади, умноженной на координату x_0 ея ц. т. относительно той же оси, но $x_0 = 0$. Такимъ образомъ

$$K = \frac{H . a}{R} . F = h_0 . F \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{88,a.}$$

Здѣсь h_0 представляетъ собою напряженіе сдвига при ц. т. сростка.

Слѣд., *когда сростокъ двухъ тѣлъ, совмѣстно вращающихся около общей оси, участвуетъ въ передачѣ вращательнаго момента, возбуждаемое на оси тѣлъ давленіе равно площади сростка, умноженной на напряженіе сдвига, вызываемое при центрѣ тяжести его.*

в) Полярный моментъ инерціи. Найдемъ сначала *полярный моментъ инерціи* I_0 для круга относительно оси, проходящей чрезъ его центръ и $\perp$-ной къ его плоскости. Очевидно,

$$I_0 = \int \varrho^2 . dF,$$

гдѣ ϱ — разстояніе ц. т. элемента отъ оси O. Суммированіе д. б. распространено на всю площадь. Выдѣлимъ площадь элемента, проведя двѣ безконечно близкихъ окружности (фиг. 76) на разстояніи $d\varrho$ одна отъ другой и засѣкая ихъ двумя радіусами, дѣлающими между собою безконечно малый уголъ $d\varphi$; тогда

$$dF = \varrho . d\varphi . d\varrho$$

$$I_0 = \int\int d\varphi . \varrho^3 . d\varrho .$$

Т. к. суммированіе по φ происходитъ при всякой величинѣ ϱ въ предѣлахъ отъ O до 2π, поэтому

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= 2\pi . \int_0^r \varrho^3 . d\varrho = \frac{\pi \ r^4}{2} \\ I_0 &= \frac{\pi . d^4}{32} = 0{,}1 . d^4 \end{aligned} \right\} \ldots \ldots \ldots \ \mathbf{89.}$$

Найдемъ теперь полярный моментъ инерціи площади сростка какого-угодно очертанія относительно произвольной оси A (фиг. 74), т. е. то выраженіе, которое входитъ въ ф-лу **86**.

Изъ чертежа имѣемъ:

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 + 2 a . \varrho . Cos \varphi$$

$$I_a = a^2 . \int dF + \int \varrho^2 . dF + 2a . \int Cos \varphi . \varrho \ dF.$$

Въ послѣдней части р-ва 1-й интегралъ представляетъ собою F, площадь сростка, 2-й интегралъ—полярный моментъ инерціи I_0 относительно оси, проходящей чрезъ ц т. площади, а третій интегралъ обращается въ нуль, т. к. онъ тождественъ съ тѣмъ, который приведенъ въ этомъ § подъ буквой д. Послѣ этого

$$I_a = I_0 + F . \ a^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ \mathbf{90,}$$

т. е. *полярный моментъ инерціи площади относительно произвольной оси, $\perp$-ной къ плоскости сѣченія, = моменту инерціи относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести сѣченія и $\perp$-ной къ его плоскости, плюсъ произведеніе площади на квадратъ разстоянія осей.*

Для площади круга съ дiам. d, центръ котораго отстоитъ отъ оси вращенiя A на разстоянiи a, будемъ имѣть:

$$I_a = 0{,}1 \,.\, d^4 + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \,.\, a^2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \mathbf{91.}$$

г) Случай круглаго центральнаго сростка. На фиг. 77 изображены 2 тѣла U_1 и U_2, имѣющiя общую ось вращенiя AA. Передача вращательнаго момента отъ тѣла U_2 къ U_1 происходитъ чрезъ круглый центрально расположенный сростокъ B, имѣющiй видъ короткой шейки съ дiам. d.

Въ этомъ случаѣ сдвигъ сростка сводится къ закручиванiю его около оси AA. Ур-iя **87** и **88** удовлетворяются при этомъ сами собою, п. ч. всѣ внутреннiя силы приводятся здѣсь къ парамъ силъ, которыя проекцiй на оси координатъ не даютъ. Слѣд., передача вращательнаго *mom* отъ одного тѣла къ другому чрезъ центральный круглый сростокъ не сопровождается возбужденiемъ добавочнаго давленiя на оси тѣлъ.

Т. к. здѣсь $a = 0$, поэтому $I_a = I_0$, и ур-iе крѣпости сростка будетъ

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{H}{R} \cdot I_0 = \frac{H}{R} \cdot 0{,}1 \,.\, d^4 \\ M &= H \,.\; 0{,}1\; d^3 \end{aligned}\right\} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \mathbf{92.}$$

54. **Задачи. № 31.** Два тѣла U_1 и U_2 имѣютъ общую ось вращенiя AA (фиг. 78) и соединены между собою круглымъ желѣзнымъ сросткомъ, расположеннымъ эксцентрично. Дiам. сростка 100 *мм.* $= d_1$, разстоянiе его центра O отъ оси вращенiя $a = 300$ *мм.* Сростокъ разсчитанъ съ напряженiемъ $H = 4$ *кг.* на кв. *мм.* Рѣшить слѣдующiе вопросы:

1) Какой вращательный *mom* въ состоянiи передать сростокъ?

2) Какое давленiе возбудится на оси A?

3) Какой дiам. имѣли бы 2 сростка, симметрично расположенныхъ относительно оси и замѣняющихъ данный одинъ?

4) Какiе размѣры имѣлъ бы центральный сростокъ одинаковой крѣпости съ даннымъ?

5) Какiе размѣры имѣлъ бы сростокъ, подобный данному, при разстоянiи $a = 400$ *мм.*?

Здѣсь $$R = a + \frac{d_1}{2} = 350 \text{ мм.}$$

На этомъ разстоянiи находится отъ оси вращенiя точка E, наиболѣе напряженная и работающая съ напряженiемъ сдвига

$$S = H = 4 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Напряженiе сдвига при ц. т. сростка будетъ

$$h_0 = H \,.\, \frac{a}{R} = \frac{4 \,.\, 300}{350} = 3{,}43 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Полярный *mom* инерціи площади сростка относительно оси вращенія *AA* вычислится по ф-лѣ **91**:

$$I_a = 0,1.\ 100^4 + \frac{\pi}{4}.\ 100^2.\ 300^2 = 100^4\ (0,1+7,07)\ .\ .\ .\ \mathbf{a.}$$

$$I_a = 717\ 000\ 000 \text{ въ } мм.$$

Передаваемый сросткомъ *mom* (ф-ла **86**)

$$M = \frac{4}{350} \cdot 717000\ kg\text{-}mt = 8194,29.$$

Давленіе на оси вычислится по **88 a**.

$$K = 3,43 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 100^2 = \text{ок. } 26940 \text{ кг.}$$

Это громадное добавочное давленіе на оси существовать не будетъ, если сдѣлаемъ 2 симметрично расположенныхъ сростка съ діам. d_2 или 1 центральный съ діам. d.

При двухъ сросткахъ діаметръ ихъ d_2 будетъ менѣе d_1, поэтому R уменьшится, а новое значеніе h_0 увеличится. Примемъ при двухъ сросткахъ $h_0 = 3,5$ кг. и назовемъ *полярный mom инерціи каждаго изъ двухъ сростковъ* чрезъ I_{a2}, тогда по ур-ію **86** надо имѣть:

$$\frac{4}{350} \cdot 717\ 000\ 000 = \frac{3,5}{300} \cdot 2.\ I_{a2}, \text{ откуда}$$

$$I_{a2} = 351200000 \text{ въ } мм.$$

Разсматривая составъ ф-лы **a** этого §, видимъ, что полярный моментъ инерціи эксцентрично лежащей площади относительно оси инерціи, зависитъ главнымъ образомъ отъ члена $F.\ a^2$ и приближенно м. б. положенъ равнымъ этой величинѣ. Это значительно ускоряетъ рѣшеніе вопроса и въ данномъ случаѣ разрѣшаетъ его въ смыслѣ усиленія крѣпости сростка. Беремъ поэтому

$$I_{a2} = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 \cdot 300^2, \text{ откуда}$$

$$d_2 = \text{около } 71 \text{ } мм.$$

Эта величина больше требуемой. Примемъ $d_2 = 70$ *мм.* и опредѣлимъ величину передаваемаго обоими сростками момента. Для этого найдемъ для каждаго изъ сростковъ

$$I_{a2} = 0,1\ .\ 70^4 + \frac{\pi}{4} \cdot 70^2\ .\ 300^2 = \text{ок. } 348\ 760\ 000$$

$$M = \frac{4\ .\ 2\ .\ 348760}{300+35}\ kgmt = \text{ок. } 8330,$$

т. е. нѣсколько болѣе требуемаго. Такимъ образомъ, замѣняя 1 сростокъ діам. 100 *мм.* двумя съ діам. по 70 *мм.*, симметрично расположенными относительно оси, мы получаемъ ту же крѣпость сростковъ, но избавляемся отъ громаднаго давленія на оси, достигающаго въ данномъ случаѣ почти 27 *tn.*

При опредѣленіи размѣровъ одного центральнаго сростка пользуемся ф-лой **92**:

$$d^3 = \frac{8194290}{0{,}2 \,.\, 4} = \text{ок. } 10\,243\,000 \text{ мм., откуда}$$

$$d = \text{ок. } 218 \text{ мм.}$$

Сравненіе этой величины съ заданной показываетъ, насколько сростокъ дѣлается болѣе способнымъ къ передачѣ вращательнаго момента по мѣрѣ удаленія центра сростка отъ оси вращенія. Для разрѣшенія 5-го вопроса положимъ, что новый сростокъ будетъ имѣть діам. d_3, и что напряженіе сдвига при его центрѣ

$$h_0 = 3{,}8 \text{ кг.},$$

тогда получимъ:

$$8194290 = \frac{3{,}8}{400} \,.\, I_{a3}, \text{ откуда}$$

$$I_{a3} = \frac{400 \,.\, 8194290}{3{,}8} = \text{прибл. } \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2 \,.\, 400^2$$

$$d_3 = \text{ок. } 83 \text{ мм., примемъ } 85.$$

Тогда точное выраженіе

$$I_{a3} = 0{,}1 \,.\, 85^4 + \frac{\pi}{4} \,.\, 85^2 \,.\, 400^2 = 913\,146\,000 \text{ мм.}$$

$$M = \frac{4 \,.\, 913146}{400 + 42{,}5} \text{ kg-mt} = \text{ок. } 8240.$$

№ 32. Отъ листа U_1 (фиг. 79) къ листу U_2 передается вращательный моментъ. Для передачи этого момента введены двѣ накладки $T_1 T_2$, скрѣпленныя съ листами посредствомъ заклепокъ. По способу, предложенному инженеромъ *Шуховымъ*, заклепочный швъ дѣлается въ такомъ случаѣ съ круглымъ очертаніемъ, чтобы всѣ заклепки одного ряда были въ одинаковыхъ условіяхъ по отношенію къ сопротивленію сдвигу. Діаметръ заклепокъ 25 мм. Число ихъ на внѣшнемъ кругѣ—20, на внутреннемъ 10, радіусъ 1-го = 200 *мм.*, а второго = 130. Какая величина вращательнаго момента можетъ быть передана такимъ швомъ, если наибольшее напряженіе заклепокъ сдвигу должно быть не болѣе 5,5 *кг.* на кв. *мм.*

Площадей сдвига у каждой заклепки будетъ двѣ, а не одна.

Справа отъ линіи CD расположены 15 заклепокъ, воспринимающихъ *том* отъ листа U_2 на накладки, а слѣва отъ CD находятся другія 15 заклепокъ, передающихъ *том* отъ накладокъ листу U_1.

Опредѣлимъ отдѣльно *том*, передаваемый каждой заклепкой внѣшняго ряда—m_1 и внутренняго m_2, тогда

$$M = 10 \,.\, m_1 + 5 m_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; \text{б.}$$

Для заклепки внѣшняго ряда:

$$I_{a1}=0,1\,.\,25^4+\frac{\pi}{4}\,.\,25^2\,.\,200^2=19674000 \text{ мм.}$$

Для заклепки внутренняго ряда

$$I_{a2}=0,1\,.\,25^4+\frac{\pi}{4}\,.\,25^2\,.\,130^2=8337000 \text{ мм.}$$

Послѣ этого

$$m_1=\frac{H}{R}\,.\,2\,.\,I_{a1}=\frac{5,5\,.\,2\,.\,19674}{200+12,5}=1018,3 \text{ кг.-мт}$$

$$m_2=\frac{H}{R}\,.\,2\,.\,I_{a2}=\frac{5,5\,.\,2\,.\,8337}{200+12,5}=431 \text{ кг-мт}$$

$$M=10\,.\,1018,3+5\,.\,431=10183+2155 \quad \ldots\ldots \text{ в,}$$

$$M=12338 \; kg\text{-}mt \quad \ldots\ldots\ldots \text{ г.}$$

Разсматривая слагаемыя ф-лы в, мы видимъ, что главное участіе въ сопротивленіи принимаетъ внѣшній рядъ заклепокъ, а не внутренній, такъ какъ на долю внѣшняго ряда выпадаетъ здѣсь почти 83% всего *тот*.

Поэтому расчерчивать подобные швы нужно такимъ образомъ, чтобы возможно бо́льшее число заклепокъ было помѣщено во внѣшнемъ ряду, и чтобы внутренній рядъ заклепокъ находился отъ внѣшняго въ самомъ близкомъ положеніи, допускаемомъ условіями клёпки.

Легко видѣть, что при большихъ разстояніяхъ заклепокъ отъ оси *A* (фиг. 79) не будетъ внесено въ вычисленіе большой погрѣшности, если предположить и равномѣрное распредѣленіе напряженій сдвига по всему сѣченію заклепки. Въ самомъ дѣлѣ, поперечное сѣченіе каждой заклепки

$$\frac{\pi}{4}\,.\,25^2=490,87 \text{ кв. мм.}$$

У каждой заклепки работаетъ на сдвигъ два сѣченія. Во внѣшнемъ ряду сопротивленіе сдвигу для одной заклепки будетъ

$$490,87\,.\,2\,.\,5,5=5398,57 \; kg,$$

$$m_1=5398,57\,.\,0,2=1079,7 \; kg\text{-}mt;$$

во внутреннемъ ряду сопротивленіе сдвигу для каждой заклепки будетъ:

$$5398,57\,.\,\frac{130}{200}=3508,7 \; kg.$$

$$m_2=3508,7\,.\,0,13=456 \; kg\text{-}mt.$$

$$M=10\,.\,1079,7+5\,.\,456=13077 \; kg\text{-}mt,$$

что даетъ противъ величины, вычисленной ранѣе (см. ф-лу г), увеличеніе только на 6%.

№ 33. Нужно передать вращательный моментъ въ 10000 *kg-mt* чрезъ центральный кольцевой чугунный сростокъ, у котораго внѣшній діаметръ $= 360$ *мм.*

Примемъ допускаемое напряженіе сдвигу для чугуна 1,8 *кг.*

Ур-іе крѣпости напишется въ этомъ случаѣ такъ (ф-лы **86** и **89**):

$$M = \frac{1,8}{180}(0,1 \,.\, 360^4 - 0,1 \,.\, x^4),$$

откуда внутренній діаметръ сростка

$$x^4 = 360^4 - 10^{10};\quad x = 354 \text{ мм.}$$

Въ такомъ видѣ сростокъ можно встрѣтить при устройствѣ кулачныхъ муфтъ. Если бы сдвигу подвергались только отдѣльные элементы кольцевого сростка, составляющіе въ общемъ, напр., $^1/_2$ всей площади кольца, тогда новый внутренній діам. будетъ

$$x_1^4 = 360^4 - 2 \,.\, 10^{10};\quad x = 347 \text{ мм.}$$

55. **Одновременное дѣйствіе на параллелепипедъ силъ растяженія и сдвига.** *а) Направленіе наиболѣе растянутыхъ линій и* **max** *вытяжки.* Пусть имѣемъ п-дъ BI (фиг. 80), подверженный дѣйствію *растягивающей нагрузки* P, равномѣрно распредѣленной на граняхъ AI, BH, и *сдвигающей нагрузки* Q. Нормальное напряженіе отъ 1-й нагрузки будетъ $h = P : F$, а тангенціальное напряженіе отъ 2-й нагрузки — $t = Q \cdot F$.

П-дъ получитъ удлиненіе по направленію AB, сокращеніе—по направленію BH и сдвигъ съ угломъ перекашиванія φ при грани AB. Вслѣдствіе этого изъ угла A на грани AH будутъ выходить растянутыя линіи. Возьмемъ одну изъ нихъ AC подъ произвольнымъ угломъ β къ грани AB и опредѣлимъ ея вытяжку.

Пусть $\quad AC = l;\; AB = a;\; BC = b;$

$$a = l \,.\, Cos\,\beta;\quad b = l \,.\, Sin\,\beta.$$

Нагрузка P по направленію своего дѣйствія вызоветъ въ продольномъ направленіи *вытяжку* i, а въ поперечномъ направленіи—усадку i_1 (см. § 15). Зависимость между относительными деформаціями и напряженіями выразится ф-лами:

$$\left.\begin{array}{l} i = m \,.\, i_1 = h : E \\ \varphi = t : G \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{а.}$$

Вслѣдствіе поперечнаго сокращенія линіи BC при дѣйствіи нагрузки точка C перемѣстится въ D, если

$$CD = b \,.\, i_1 = i_1 \,.\, l \,.\, Sin\,\beta \quad \ldots\ldots \quad \textbf{б.}$$

Вслѣдствіе удлиненія линіи $CC_1 \parallel AB$ при дѣйствіи нагрузки точка C перемѣстится по направленію CC_1 на величину удлиненія

$$CF = DE = a \,.\, i = i \,.\, l \,.\, Cos\,\beta \quad \ldots\ldots \quad \textbf{в}$$

Наконецъ вслѣдствіе перекашиванія п-да линія CC_1 перемѣстится въ положеніе C_1K, отклонившись на уголъ φ отъ своего первоначальнаго направленія. Сдвигъ точки C будетъ

$$CK = EL = a.\varphi = \varphi\,.\,l\,.\,Cos\,\beta \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad \text{г.}$$

При одновременномъ дѣйствіи обѣихъ нагрузокъ P и Q деформаціи совершатся одновременно. Сдѣлаемъ ихъ сложеніе: C перемѣщаемъ въ D на величину сокращенія ребра BC; D перемѣщаемъ въ E на величину вытяжки линіи CC_1; E перемѣщаемъ въ L на величину сдвига точки C; тогда послѣ всѣхъ этихъ перемѣщеній линія AC займетъ новое положеніе AL, вытянувшись на нѣкоторую длину.

Если обозначимъ $AL = l_1$, то вытяжка линіи AC будетъ

$$I = \frac{l_1 - l}{l} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad \text{д.}$$

Ее и нужно теперь найти въ функціи заданныхъ величинъ i, φ. Для этого многоугольный замкнутый контуръ $ALEDCA$ проектируемъ на направленіе AC. Но такъ какъ всѣ деформаціи п-да предполагаются весьма незначительными, поэтому и отклоненіе линіи AL отъ ея первоначальнаго направленія AC будетъ тоже весьма малымъ, и можно считать, что Cos угла CAL не отличается отъ 1. Тогда

$$AL = EL\,.\,Sin\,\beta + DE\,.\,Cos\,\beta - CD\,.\,Sin\,\beta + AC \,.\,.\,.\quad \text{е.}$$

Опредѣляемъ отсюда величину I, пользуясь обозначеніями, которыя выражены ф-лами **б**, **в**, **г**, **д**:

$$I = \varphi\,.\,Sin\,\beta\,.\,Cos\,\beta + i\,.\,Cos^2\,\beta - i_1\,.\,Sin^2\,\beta \,.\,.\,.\,.\quad \text{ж.}$$

Это и есть вытяжка произвольной растянутой линіи п-да. Какъ видно, она есть функція β, т. е. различныя линіи, выходящія изъ угла A, будутъ удлиняться неодинаково, и между ними будетъ такая, для которой вытяжка будетъ *max.* Это и будетъ наиболѣе растянутая линія, а стало быть и наиболѣе *опасная*. Дальнѣйшая задача будетъ заключаться въ опредѣленіи *max* I.

Для этого нужно было бы взять производную отъ I по перемѣнному β, приравнять ее нулю и опредѣлить изъ этого ур-ія искомую величину β. Но если продѣлать это вычисленіе съ выраженіемъ **ж**, получится весьма сложное рѣшеніе. Для его упрощенія введемъ въ послѣднее р-во двойную дугу 2β, пользуясь извѣстными ф-лами перехода:

$$Sin\,\beta\,.\,Cos\,\beta = \frac{1}{2}\cdot Sin\,2\beta$$

$$Cos^2\,\beta = \frac{1 + Cos\,2\beta}{2}$$

$$Sin^2\,\beta = \frac{1 - Cos\,2\beta}{2}$$

$$I = \frac{\varphi}{2}\cdot Sin\,2\beta + \frac{i}{2}\cdot(1 + Cos\,2\beta) - \frac{i_1}{2}(1 - Cos\,2\beta)$$

$$I = \frac{\varphi}{2}\ Sin\ 2\beta + \frac{i+\imath_1}{2}\cdot Cos\ 2\beta + \frac{i-i_1}{2}$$

$$i + \imath_1 = i + \frac{i}{m} = i\cdot\frac{m+1}{m};\ i - \imath_1 = \imath\cdot\frac{m-1}{m}$$

$$I = \frac{\varphi}{2}\ Sin\ 2\beta + \frac{m+1}{2m}\cdot\imath\cdot Cos\ 2\beta + \frac{m-1}{2m}\cdot i\ .\ .\ .\ .\ .\ з.$$

Въ такомъ видѣ дифференцированіе этого выраженія съ цѣлію опредѣленія *max* I приводитъ къ довольно простому результату:

$$\frac{dI}{d\beta} = \varphi\cdot Cos\ 2\beta - \frac{m+1}{m}\cdot\imath\cdot Sin\ 2\beta.\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{и.}$$

Приравнявши полученное выраженіе нулю, получимъ ур-іе, изъ котораго опредѣлится искомое значеніе перемѣннаго β, обращающее функцію I въ *max*. Оно будетъ:

$$tg\ 2\beta = \frac{m}{m+1}\cdot\frac{\varphi}{\imath}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{к.}$$

Возьмемъ 2-ю производную отъ I по β:

$$\frac{d^2I}{d\beta^2} = -2\varphi\,.\,Sin\ 2\beta - \frac{m+1}{m}\,.\,2\imath\,.\,Cos\ 2\beta\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{л.}$$

Выраженіе л показываетъ, что 2-я производная будетъ менѣе O, т. е. I буд. *max*, тогда, когда будутъ положительны $Sin\ 2\beta$ и $Cos\ 2\beta$ при положительномъ $tg\ 2\beta$, т. е. въ углѣ BAI на фиг. 80.

Чтобы найти *max* I по ф-лѣ з, для этого, пользуясь ф-лой к, надо вычислить *Sin* и *Cos* двойной дуги по ф-ламъ перехода:

$$Cos\ 2\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\ 2\beta}};\ Sin\ 2\beta = Cos\ 2\beta\,.\,tg\ 2\beta.$$

Введемъ обозначеніе

$$m^2\,.\,\varphi^2 + i^2\,.\,(m+1)^2 = Ж^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{м.}$$

Тогда получимъ:

$$Cos\ 2\beta = i\,.\,\frac{m+1}{Ж};\ Sin\ 2\beta = \varphi\cdot\frac{m}{Ж}$$

$$max\ I = \frac{m-1}{2m}\cdot i + \frac{m}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{Ж} + \frac{(m+1)^2}{2\,m}\cdot\frac{i^2}{Ж} = \frac{m-1}{2m}\cdot i + \frac{1}{2m}\cdot Ж.$$

$$max\ I = \frac{m-1}{2m}\cdot i + \frac{1}{2m}\cdot\sqrt{m^2.\,\varphi^2 + i^2\,.\,(m+1)^2}\ .\ .\ .\ \mathbf{93.}$$

Это и есть окончательная ф-ла, опредѣляющая вытяжку наиболѣе опасной, наиболѣе вытянутой линіи. Выводъ этой ф-лы былъ сдѣланъ *Saint-Venant* (въ 1837 г.).

б) *Максимальное напряженіе для растянутыхъ линій.* Чтобы получить разсчетное ур-іе, надо вмѣсто зависимости между деформаціями имѣть подобную же зависимость между напряженіями.

Для этого воспользуемся ф-лами **a** этого § и, кромѣ того, введемъ напряженіе H наиболѣе растянутой линіи:

$$max\ I = H : E$$

$$\frac{H}{E} = \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{h}{E} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{m^2}{(m+1)^2} \cdot \frac{t^2}{G^2} + \frac{h^2}{E^2}}$$

Пользуясь ф-лой **84** и полагая $m = 4$, можно написать:

$$H = \frac{m-1}{2m} \cdot h + \frac{m+1}{2m} \sqrt{h^2 + (2t)^2}$$

$$H = \frac{3}{8} h + \frac{5}{8} \sqrt{h^2 + (2t)^2} \quad . \ . \ . \quad . \ . \ . \ \mathbf{94}.$$

Это и есть зависимость между данными напряженіями h и t и максимальнымъ H, съ которымъ будутъ напряжены въ тѣлѣ всѣ линіи, наклоненныя къ грани AB подъ угломъ β, опредѣляемымъ изъ ф-лы **к** этого §:

$$tg\ 2\beta = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{t}{G} : \frac{h}{E} = \frac{2t}{h} \ . \quad . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{95}.$$

Послѣ того какъ выяснено значеніе величины m и отношенія $E : G$ при выводѣ ф-лы **94**, можно сказать, что результатъ получился бы тотъ же самый, но видъ всѣхъ ф-лъ нѣсколько упростился бы, если бы въ ф-лу **3** и послѣдующія вносить $m = 4$ и пользоваться ф-лой **84, a**.

Если сдѣлаемъ $t = 0$, т. е. оставимъ воздѣйствіе одной только растягивающей нагрузки, тогда

по ф-лѣ **95** . . . . . $tg\ 2\beta = 0$ . . . . . $\beta = 0$;

а по ф-лѣ **94** . . . . . $H = \frac{3}{8} h + \frac{5}{8} h = h$,

т. е. наиболѣе напряженными линіями въ этомъ случаѣ будутъ всѣ продольныя линіи, ||-я ребру AB и работающія съ даннымъ нормальнымъ напряженіемъ h.

Если сдѣлаемъ $h = 0$, т. е. оставимъ воздѣйствіе одной только тангенціальной нагрузки, тогда по ф-лѣ **95**:

$$tg\ 2\beta = \infty;\ 2\beta = 90^0;\ \beta = 45^0.$$

По ф-лѣ **93** . . . $max\ I = \frac{\varphi}{2}$.

Эти послѣдніе результаты вполнѣ согласны съ ф-лой **78 b** (см. § 49, *б*). При этомъ по ф-лѣ **94** будемъ имѣть:

$$H = \frac{5}{4} \cdot t, \text{ или } t = \frac{4}{5} H,$$

что вполнѣ согласно съ ф-лой **82**.

в) *Формула Баха.* Чтобы пользоваться ф-лой **94** для практическихъ цѣлей, нужно ввести въ нее вліяніе способа дѣйствія нагрузокъ, или

величину степени надежности, съ которою выполнялось бы тѣло при дѣйствіи на него каждой изъ нагрузокъ въ отдѣльности. Съ этою цѣлію проф. *Бахъ* (*Bach*) даетъ ф-лѣ **94** слѣдующій видъ:

$$H = \frac{3}{8}h + \frac{5}{8}\sqrt{h^2 + (2 \,.\, x \,.\, t)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{96,}$$

т. е. онъ вводитъ при t коэф. x (отвлеченное число), значеніе котораго опредѣляется сдѣлавши $h = 0$; тогда

$$H = \frac{5}{4} \,.\, t \,.\, x; \;\; \varphi \,.\, H = Z_0; \;\; \varphi_1 \,.\, t = S_0,$$

гдѣ Z_0 и S_0 — разрушающія напряженія матеріала при растяженіи и сдвигѣ, а φ и φ_1 — соотвѣтственныя степени надежности, допускаемыя при дѣйствіи нагрузокъ P и Q. Поэтому

$$x = \frac{4}{5} \cdot \frac{H}{t} = \frac{4}{5} \cdot \frac{Z_0}{\varphi} : \frac{S_0}{\varphi_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{97.}$$

Пусть, напр., при разсчетѣ желѣзной детали взято $Z = 7$, а $S = 2{,}4$, т. е растягивающая нагрузка передается на деталь спокойно, а сдвигающая—съ ударомъ, тогда

$$x = \frac{4}{5} \cdot \frac{Z}{S} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{2{,}4} = \frac{7}{3}.$$

Въ другомъ случаѣ пусть та и другая нагрузки передаются съ ударомъ — $H = Z = 3$, $S = 2{,}4$, тогда

$$x = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2{,}4} = 1{,}0.$$

г) *Разсчетное ур-іе на растяженіе и равномѣрный сдвигъ.* Даны растягивающая нагрузка P и сдвигающая Q, площадь сѣченія тѣла—F, обѣ нагрузки равномѣрно распредѣлены по площади сѣченія. Тогда

$$h = \frac{P}{F}; \;\; t = \frac{Q}{F}; \;\; \frac{t}{h} = \frac{Q}{P}.$$

По ф-лѣ 96:

$$H = \left\{ \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{2x \,.\, Q}{P}\right)^2} \right\} . \, h = \Gamma . h,$$

гдѣ Γ представляетъ выраженіе, заключенное въ скобки, всегда большее *1* и являющееся въ зависимости отъ величины нагрузокъ и способа ихъ воздѣйствія на тѣло. Разсчетное ур-іе получимъ, если внесемъ вмѣсто H допускаемое напряженіе Z:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \text{или болѣе } \Gamma \,.\, \frac{P}{F} \\ F &= \text{или болѣе } \frac{P}{Z : \Gamma} \\ P &= \text{или менѣе } F.\, \frac{Z}{\Gamma} \end{aligned}\right\} . \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{98.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что *разсчетъ на одновременное дѣйствіе растягивающей и сдвигающей нагрузки сводится къ разсчету на дѣйствіе одной лишь растягивающей нагрузки, но съ напряженіемъ, меньшимъ обычно допускаемаго, и это уменьшеніе дѣлается въ зависимости отъ величины обѣихъ нагрузокъ и способа ихъ воздѣйствія.* Такъ, напр.

$\frac{Q}{P}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	2	10
$\Gamma=1{,}01$	1,05	1,08	1,13	1,26	1,5	1,63	1,78	2,95	12,9

Изъ данныхъ этой таблички видно, какъ быстро возрастаетъ величина Γ по мѣрѣ увеличенія отношенія заданныхъ нагрузокъ.

Вопросы для повторенія главы о сдвигѣ.

Что называется тангенціальнымъ напряженіемъ? Какъ происходитъ явленіе перекашиванія при растяженіи и сжатіи? Отчего нельзя произвести опыта надъ явленіемъ чистаго сдвига, когда грани п-да не испытываютъ ни растяженія, ни сжатія? Какими свойствами обладалъ бы п-дъ, испытывающій чистый сдвигъ? Какъ пишется законъ *Гука* при сдвигѣ и разсчетное ур-іе? Какъ происходитъ явленіе пробиванія металловъ? Какая зависимость существуетъ между обоими коэф упругости — 1-го и 2 го рода?

Явленіе сдвига на сросткѣ двухъ тѣлъ, ⊥-номъ къ оси вращенія ихъ. Распредѣленіе напряженій, условія равновѣсія, разсчетное ур іе Какъ уничтожаются добавочныя давленія на ось? Что такое полярный *тот* инерціи, выраженіе его для круга относительно различныхъ осей Выгоды и невыгоды круглаго *центральнаго* сростка.

Видъ ф-лы *Баха* при одновременномъ воздѣйствіи тангенціальной и нормальной нагрузки, значеніе его коэф x; можетъ-ли онъ быть $=1$ и больше **1**; что для этого необходимо?

П дъ былъ разсчитанъ прочно на сдвигъ; нагрузку удвоили, какъ распорядиться выборомъ размѣровъ новаго п-да, чтобы приращеніе вѣса вышло *min* при разсчетѣ съ прежней степенью надежности?

СВОДЪ

главныхъ формулъ и данныхъ изъ главы о сдвигѣ.

а) *Равномѣрное распредѣленіе тангенціальныхъ напряженій.*

Тангенціальное напряженіе въ *кг.* на кв. *мм.* $=\frac{\text{Сила сдвига въ } кг.}{\text{Площадь въ кв. } мм.}$

$t=\frac{Q}{F}$ . . . . § 48.

Тангенціальное напряженіе на грани п-да. = Тангенціальному напряженію въ произвольной плоскости, ||-й этой грани, и въ плоскости, ⊥-й къ этой грани.

$t=t_1$ . . . .77 § 48.

Перекосъ (отвлеченное число). $=\frac{\text{Сдвигъ точки въ } мм.}{\text{Разстояніе сдвигаемой точки отъ неподвижной въ } мм.}$

Коэффиціентъ упругости 2-го рода въ *кг.* на кв. *мм.* $=\frac{\text{Тангенціальное напряженіе въ } кг. \text{ на кв. мм.}}{\text{Перекосъ (отвлеченное число).}}$

$G=\frac{t}{\varphi}$ . . . .

$G=0{,}4\,.\,E$ ...79 § 49.

Разсчетное ур-іе на сдвигъ:

Допускаемое напряженіе въ *кг.* на кв. *мм.* $\overset{=}{>}\frac{\text{Безопасная нагрузка въ } кг.}{\text{Безопасная площадь въ кв } мм.}$

$S=$ или болѣе $\frac{Q}{F}$ . . . .80 § 50.

Допускаемое напряженіе при сдвигѣ — около $\frac{4}{5}$ допускаемаго напряженія при растяженіи.

б) *Напряженія равномѣрно возрастаютъ, идя отъ нѣкоторой оси.*

$\frac{Max.\ \text{напряженія.}}{\text{Напряженіе въ данной точкѣ.}}=\frac{\text{Разстояніе крайней}}{\text{Разстояніе данной}}$ } точки отъ оси вращенія ...85 § 53.

Вращательный моментъ. $=$ (Напряженіе въ крайней точкѣ. $\times$ Полярный моментъ инерціи площ. сростка относительно оси вращенія.) / (Разстояніе крайней точки сростка отъ оси вращенія.) ...**86** § 53.

$$M=\frac{H\,.\,I_a}{R}\ \dots\dots$$

Давленіе на ось при нецентральномъ сросткѣ. $=$ Напряженіе сдвига при центрѣ тяжести сростка $\times$ Площадь сростка. **88,a**

$$K=h_0\,.\,F.\ \dots\dots$$

Полярный моментъ инерціи центральнаго круглаго сростка $=$ (Четвертая степень діаметра сростка) / 10 . . . **89.**

$$I_0=0{,}1\,.\,d^4\ \dots$$

в) *Ф-ла Баха при одновременномъ дѣйствіи силъ растяженія и сдвига* (§ 55).

Max. напряжен. $=\frac{3}{8}\times$ Нормал напряж $+\frac{5}{8}\sqrt{\left(\text{Нормал. напряж.}\right)^2+\left(2x\times\text{тангенціальное напряж.}\right)^2}$ ...**96**

$$H=\frac{3}{8}h+\frac{5}{8}\sqrt{h^2+(2x\,.\,t)^2}\ \dots\dots$$

Коэф. Баха x $=$ ($4\times$ Допускаемое нормальное напряженіе.) / ($5\times$ Допускаемое тангенціальное напряженіе.) ...**97**

$$X=\frac{4}{5}\cdot\frac{H}{t}=\frac{4}{5}\cdot\frac{Z_0}{\phi}:\frac{S_0}{\phi_1}\ \dots\dots$$

Разсчетное ур-іе на растяженіе и сдвигъ:

$$Z=\text{или болѣе}\ \frac{\Gamma\,.\,P}{F}$$

$$\Gamma=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\sqrt{1+\left(\frac{2x\,.\,Q}{P}\right)^2}\ \dots\dots\ \mathbf{98}$$

$$h=P:F;\ t=Q:F$$

Сопротивленіе тѣлъ крученію.

56. **Деформированіе крутимаго цилиндра.** Пусть имѣемъ *круглый цилиндръ*, лѣвое основаніе O_1 (фиг. 81) у котораго остается неподвижнымъ, а въ плоскости праваго основанія O дѣйствуетъ пара силъ QQ. Если дѣйствіемъ этой пары неподвижность скрѣпленія цилиндра съ плоскостью E не нарушается, въ такомъ случаѣ притти въ движеніе цилиндръ не можетъ, а только деформируется, закручивается Пока получаются упругія деформаціи, самое явленіе крученія происходитъ слѣдующимъ образомъ:

1) ось цилиндра не искривляется;

2) длина цилиндра не измѣняется;

3) окружности, ограничивающія поперечныя сѣченія тѣла, сохраняютъ свои размѣры и форму, т. е. остаются въ первоначальной плоскости и послѣ крученія;

4) образующія цилиндра послѣ закручиванія обращаются въ винтовыя линіи

Если и внутри тѣла явленіе происходитъ такимъ же образомъ, какъ наружу, то нужно допустить, что всѣ матеріальныя точки, лежащія до закручиванія въ нѣкоторой плоскости, продолжаютъ оставаться въ ней и послѣ закручиванія, сохраняя въ то же время свою относительную группировку и въ плоскости сѣченія вообще, и на отдѣльныхъ радіусахъ векторахъ въ частности. Нужно представить себѣ, слѣдовательно, что группа матеріальныхъ частицъ, составляющихъ поперечное сѣченіе, при этомъ сдвигается только относительно смежнаго сѣченія, и что всѣ такіе сдвиги при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому совершенно одинаковы.

Изъ всего этого видно, что сущность явленія при крученіи круглаго цилиндра ничѣмъ не отличается отъ разсмотрѣннаго уже нами явленія сдвига на сросткѣ двухъ тѣлъ, $\perp$-номъ къ общей оси вращенія ихъ (§ 53), если говорить о центральномъ кругломъ сросткѣ и допустить, что по всей длинѣ крутимаго цилиндра мы имѣемъ безконечно большое число сростковъ.

Если ABC (фиг 81) будетъ образующая цилиндра до закручиванія и AB_1C_1—винтовая линія, въ которую обращаетъ ее пара QQ, то BB_1, CC_1—будутъ сдвиги на поверхности относительно первоначальнаго направленія, и уголъ COC_1 наз. *угломъ закручиванія*, который получился на данной длинѣ цилиндра $OO_1 = l$.

Измѣняя при опытахъ діам. цилиндра d, длину его l и закручивающій моментъ M, можно было выяснить вліяніе каждаго изъ этихъ факторовъ на величину угла закручиванія Θ. Сдѣлавши разработку подобныхъ опытныхъ данныхъ, пришли къ слѣд. ф-лѣ:

$$\Theta = b \cdot \frac{M \cdot l}{d^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{a},$$

т. е. *уголъ закручиванія прямо пропорціоналенъ первымъ степенямъ закручивающаго* **mom** *и длины цилиндра и обратно пропорціоналенъ 4-й степени его діаметра*. Величина **b** есть опытный числовой коэф., который находится въ зависимости отъ рода матеріала, подвергаемаго испытанію.

При опытахъ съ мягкой сталью *Баушингеръ* получалъ величину Θ на длинѣ въ 1 мт. въ 438°, и деформаціи цилиндра получались все еще упругими. Настолько сильнымъ можетъ быть перекручиваніе цилиндра при *спокойномъ* дѣйствіи нагрузки.

57. **Распредѣленіе напряженій въ плоскости сѣченія и по длинѣ цилиндра. Разсчетное ур-іе.** Законъ распредѣленія напряженій въ поперечномъ сѣченіи будетъ здѣсь, очевидно, тотъ же, что и на сросткѣ двухъ тѣлъ, $\perp$-мъ къ общей оси вращенія ихъ (§ 53, *а*). Въ произвольномъ сѣченіи O_2 цилиндра возьмемъ радіусъ O_2B (фиг. 81) и на немъ двѣ точки B и m на разстояніяхъ R и r отъ оси цилиндра, которую называютъ здѣсь также *осью крученія*. Напряженія въ точкахъ B и m пусть будутъ H и h, тогда

$$h = \frac{r}{R} \cdot H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{85} \text{ (см. § 53, } a).$$

На продолженіи радіуса O_2B найдутся двѣ другія матеріальныя точки D и n, діаметрально противоположныя 1-мъ, и въ этихъ точкахъ напряженіе будетъ одинаково съ B и m. Другими словами, внутреннія силы сопротивленія въ каждомъ изъ сѣченій приводятся къ парамъ силъ, которыя и должны уравновѣсить собою дѣйствіе внѣшней пары съ *mom* M. Напишемъ ур-іе моментовъ (§ 53, *г*.).

$$M = \int r \cdot h \cdot dF = \frac{H}{R} \cdot \int r^2 \cdot dF = \frac{H}{R} \cdot I_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{92}.$$

Это и есть ур-іе равновѣсія, найденное нами въ случаѣ круглаго центральнаго сростка (ф-ла **92**), только здѣсь оно примѣнимо не къ одному сѣченію цилиндра, а ко всѣмъ.

Въ плоскости даннаго поперечнаго сѣченія напряженіе H на внѣшней окружности цилиндра является наибольшимъ, но при переходѣ отъ одного поперечнаго сѣченія къ другому величина H не измѣняется, такъ какъ ур-іе равновѣсія (ф-ла **92** этого §) написана для произвольнаго сѣченія O_2. Слѣдовательно, *при передачѣ закручивающаго момента изъ одного поперечнаго сѣченія круглаго цилиндра въ другое сѣче-*

ніе, напряженіе сдвига на поверхности цилиндра остается постояннымъ, и всѣ поперечныя сѣченія его являются **равноопасными**. На чертежѣ (фиг. 81) мы выразимъ это, проведя *кривую напряженій* въ видѣ прямой K_1L_1, ||-й верхней образующей цилиндра KL, на разстояніи

$$KK_1 = LL_1 = H = T,$$

гдѣ T—допускаемое или разсчетное напряженіе при крученіи.

Два другія условія равновѣсія, т. е.

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0,$$

удовлетворяются здѣсь сами собою, потому что и нагрузка и силы сопротивленія приводятся здѣсь къ парамъ силъ.

Чтобы получить изъ ур-ія **92** разсчетное, надо внести въ него вмѣсто наибольшаго напряженія H допускаемую при крученіи величину T.

Отношеніе полярнаго момента инерціи I_0 къ радіусу цилиндра R, т. е. къ разстоянію наиболѣе напряженныхъ точекъ сѣченія отъ оси крученія, называется *модулемъ сопротивленія* крутимаго цилиндра и обозначается такъ:

$$W_0 = I_0 : R.$$

Послѣ этого разсчетное ур-іе напишется такъ (см. ф-лу **92**):

безопасное напряженіе

$$T = \text{или болѣе } M : W_0 \quad \ldots\ldots\ldots$$

безопасный модуль сопротивленія

$$W_0 = \text{или болѣе } M : T \quad \ldots\ldots \qquad \ldots \mathbf{99}$$

безопасный закручивающій моментъ

$$M = \text{или менѣе } T \,.\, W_0 \quad \ldots\ldots\ldots$$

Слѣдовательно, *закручивающій моментъ* = *произведенію изъ допускаемаго напряженія на модуль сопротивленія* Разсчетное ур-іе при крученіи имѣетъ столь же простой видъ, какъ и при растяженіи, сжатіи, сдвигѣ, только вмѣсто нагрузки при крученіи вводится въ ур-іе закручивающій моментъ, а вмѣсто площади сѣченія вводится модуль сопротивленія.

58. **Величины допускаемыхъ напряженій при крученіи.** Величины разрушающихъ напряженій при крученіи T_0 бываютъ или близки къ тѣмъ, которыя получаются при опытахъ на растяженіе, или менѣе ихъ; только въ рѣдкихъ случаяхъ, при некруглой формѣ сѣченія, T_0 получается болѣе Z_0. Болѣе или менѣе значительное сопротивленіе крученію оказываютъ сталь и желѣзо. Чугунъ и дерево являются весьма слабымъ матеріаломъ по отношенію къ закручиванію и мало способными выносить на себѣ дѣйствіе крутящихъ моментовъ, измѣняющихся по величинѣ и по направленію.

Величины допускаемыхъ напряженій можно брать изъ табл. 11-й.

Таблица 11-я.

Названіе матеріаловъ.	Величины T въ *кг.* на кв. *мм*	
	въ передачахъ съ непрерывнымъ вращеніемъ на быстромъ ходу	при отсутствіи непрерывнаго вращенія
Сталь	5—2,5	8—6
Желѣзо	3,5—1,2	5—3,5
Чугунъ:		
а) сплошное круглое сѣченіе . .	—	2,5—1,3
б) полое „ „ . .	1,2	2,0—1,0
Дерево	—	0,6—0,3

Максимальное напряженіе T_1 въ стали, при которомъ получаются все еще упругія деформаціи, достигаетъ тѣмъ большей величины, чѣмъ больше содержитъ сталь углерода. Такъ, по опытамъ *Баушингера* при содержаніи углерода 0,46% величина T_1 можетъ доходить до 15 *кг.* на кв. *мм.*, а при содержаніи углерода въ 0,96%—$T_1 =$ до 27 *кг.*

Величины допускаемыхъ напряженій при разсчетѣ желѣзныхъ приводныхъ валовъ на крученіе встрѣчаются иногда гораздо ниже указанныхъ въ табл. 11-й—$T =$ отъ 2,0 до 0,75, но это объясняется другой причиной: приводные валы слѣдовало бы разсчитывать на крученіе и сгибаніе, а ихъ разсчитываютъ только по закручивающему моменту и покрываютъ неточность разсчета допущеніемъ малой величины T въ такой мѣрѣ, что въ большинствѣ случаевъ, производя повѣрочный точный разсчетъ такимъ образомъ осуществленныхъ валовъ, находятъ размѣры ихъ не только безопасными для той нагрузки, при которой имъ приходится работать, но иногда и прямо излишне крѣпкими.

59. **Величины модулей сопротивленія.** а) *Сплошное круглое сѣченіе.* По ф-лѣ **89**:

$$I_0 = 0{,}1 \,.\, d^4;\quad R = \frac{d}{2},$$

$$W_0 = I_0 : R = 0{,}2 \,.\, d^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{100}$$

Величины модулей при различныхъ діаметрахъ даны въ табл. 12-й, но для сокращенія письма они даны въ сантиметрахъ; для перехода отъ однихъ мѣръ къ другимъ служитъ слѣдующая ф-ла:

$$W_0 \text{ въ } мм. = 1000 \,.\, W_0 \text{ въ } см.$$

Таблица 12-я

Діам. d въ *мм.*, модули W_0 — въ см.^{3}					
d	W_0	d	W_0	d	W_0
35	8,58	75	84,38	115	302,18
40	12,8	80	102,4	120	345,6
45	18,23	85	122,83	125	390,63
50	25	90	145,8	130	439,4
55	33,28	95	171,48	135	492,08
60	43,2	100	200,0	140	548,8
65	54,93	105	231,53	145	609,73
70	68,6	110	266,2	150	675,0

Таблица 12-я приведена съ двоякой цѣлію:

1) чтобы облегчить веденіе провѣрочныхъ разсчетовъ для валовъ,

2) чтобы разъ навсегда уяснить себѣ, какое вліяніе имѣетъ увеличеніе діаметра вала на величину передаваемаго имъ момента.

Провѣрочные разсчеты приводныхъ и другихъ валовъ *тогда только* можно дѣлать по окончательнымъ, готовымъ формуламъ вида

$$d = A \,.\, \sqrt[3]{M},$$

опредѣляющимъ діаметръ вала по закручивающему моменту, или вида

$$d = C \,.\, \sqrt[3]{N : n},$$

опредѣляющимъ діаметръ вала по передаваемой имъ работѣ N (въ лош. сил.) и числу оборотовъ его n въ мин., когда при такой ф-лѣ есть указаніе, съ какимъ напряженіемъ матеріала валъ будетъ работать при этомъ, и когда выяснено, что это напряженіе будетъ подходящимъ при данныхъ условіяхъ работы вала. Иначе необходимо пользоваться разсчетными ф-лами 99 и таблицей 12-й.

Данныя этой таблицы ясно указываютъ въ то же время, какъ быстро возрастаетъ величина модуля W_0, а стало быть и величина крутящаго момента M, съ увеличеніемъ d. При возрастаніи діам. съ 40 на 45 мм. модуль увеличивается съ 12,8 на 18,23, т. е. на 5,43, тогда какъ при возрастаніи діам. съ 140 на 145 мм. модуль увеличивается съ 548,8 на 609,73, т. е на 60,93 см.

Эти данныя указываютъ на то, что наиболѣе всего помогаютъ сопротивленію при крученіи вала внѣшніе элементы его сѣченія, наиболѣе удаленные отъ оси крученія, и что поэтому для увеличенія крѣпости вала и уменьшенія его вѣса выгодно развивать внѣшніе элементы сѣченія, наиболѣе дѣятельные, и удалять тѣ изъ нихъ, которые ближе прилегаютъ къ оси крученія и по своему положенію мало способны къ дѣятельному сопротивленію. Это даетъ мысль о выгодности употребленія

пустотѣлыхъ валовъ, или *полыхъ*, съ круглымъ кольцевымъ или *полымъ* сѣченіемъ.

б) *Полое круглое сѣченіе.* Если говорятъ, что сплошной валъ съ діам. d и полый валъ съ діам. d_1 и d_0 (фиг. 82) одинаково прочны на крученіе, это значитъ, что оба они разсчитаны съ одной и той же степенью надежности

Называя допускаемыя величины напряженій соотвѣтственно чрезъ T и T_1, мы должны сказать, что при одинаковой крѣпости валовъ эти величины должны относиться, какъ соотвѣтственныя величины, коэф. крѣпости. Для стального и желѣзнаго полаго вала это будетъ обозначать, что

$$T_1 = T,$$

а для чугуннаго полаго вала, сообразно природѣ матеріала, требуется для этого, чтобы

$$T_1 = 0,8 \,.\, T,$$

т. е. *при разсчетѣ чугунныхъ полыхъ валовъ на крученіе надо брать допускаемое напряженіе на 20% ниже, чѣмъ при разсчетѣ сплошныхъ чугунныхъ валовъ.*

Величина модуля сопротивленія въ случаѣ полаго сѣченія напишется такъ:

$$W_0 = \frac{I_0}{R} = \frac{0,1\,(d_1^4 - d_0^4)}{0,5\,.\,d_1},$$

$$W_0 = 0,2\,.\,\frac{d_1^4 - d_0^4}{d_1} = 0,2\,.\,d_1^3.\left[1 - \frac{d_0^4}{d_1^4}\right]. \quad . \quad . \quad \mathbf{101^*}).$$

При разсчетѣ полыхъ валовъ обыкновенно задаются отношеніемъ $d_0 : d_1$. Въ чугунныхъ и стальныхъ валахъ это отношеніе выбирается отъ 0,5 до 0,75. При разсчетѣ желѣзныхъ полыхъ валовъ, которые получаются прокаткою и для которыхъ данными величинами бываютъ *внѣшній діам. и толщина стѣнки*, удобнѣе бываетъ рѣшать вопросъ о крѣпости ихъ, заготовивъ таблицу, подобную табл 12-й, гдѣ были бы указаны главные размѣры сѣченія вала и его модуль.

Выраженіе **101** возможно представить иначе:

$$W_0 = \mathbf{Б}\,.\,d_1^3,$$

гдѣ **Б** будетъ коэф., зависящій исключительно отъ величины отношенія $d_0 : d_1$. Его можно имѣть подготовленнымъ заранѣе:

$\frac{d_0}{d_1}$...0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
Б. ..0,1875	0,1816	0,1741	0,1643	0,1520	0,1367

---

*) Случалось слышать отвѣтъ, что для полученія модуля сопротивленія полаго сѣченія надо взять модуль внѣшняго очертанія и вычесть изъ него модуль внутренняго очертанія, оба по ф лѣ **100**, т. е

$$0,2\,(d_1^3 - d_0^3)$$

Въ исключительныхъ случаяхъ, когда $d_0 : d_1$ будетъ близко къ 1, написанное невѣрное выраженіе бываетъ близко къ истинному.

60. **Величины закручивающихъ моментовъ.** Когда опредѣленіе діам. вала дѣлается въ *мм.*, выраженіе M должно быть вносимо въ ф-лы **99** въ *кг.-мм.*, W_0—въ *мм.* (3-степени) и T—въ *кг.* на кв. *мм.* Если M дано въ *кг.-мт.*, то нужно пользоваться ф-лой перехода

$$M \text{ кг.-мм.} = 1000 \,.\, M \text{ кг.-мт.}$$

Весьма часто вмѣсто передаваемаго валомъ момента данными для разсчета служатъ: N — работа, передаваемая валомъ, въ лош. силахъ (по 75 *кг.-мт.*) и n—число оборотовъ вала въ 1 *минуту*. Формула перехода составится такъ: если D будетъ плечо пары QQ (фиг. 81), а v—скорость точки приложенія нагрузки, то

$$N \text{ лош. сил.} = \frac{2\,Q^{кг} \times v^{мт.}}{75} = \frac{2\,Q^{кг.}}{75} \cdot \frac{\pi \,.\, D^{мт.} \,.\, n}{60}$$

$$M \text{ кг.-мт.} = Q^{кг} \,.\, D^{мт} = 716{,}2 \cdot \frac{N}{n} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{102}$$

т. е. *крутящій* **mom** *въ* **кг.-мт.** *равняется произведенію* **716,2** *на отношеніе передаваемой валомъ работы въ* **лош. сил.** *и въ секунду къ числу его оборотовъ* **въ минуту.**

Для быстрыхъ соображеній о крѣпости валовъ ниже приводится таблица 13-я, въ которой по заданному отношенію $n : N$ можно имѣть готовую величину M въ *кг.-мт.*

Таблица 13-я.

M — въ *кг.-мт.*					
$\frac{n}{N}$	M	$\frac{n}{N}$	M	$\frac{n}{N}$	M
1,25	572,96	6	119.37	25	28,65
1,5	477,47	7	102,31	30	23,87
1,75	409,26	8	89.53	40	17,91
2	358,10	9	79,58	50	14,32
2,5	286,48	10	71,62	60	11.94
3	238,73	12,5	57,29	70	10,23
3,5	204,63	15	47,75	80	8,95
4	179,05	17,5	40,93	90	7,96
5	143,24	20	35,81	100	7,16

Когда встрѣтится случай подсчитыванія M при отношеніи $n : N$, не указанномъ въ таблицѣ 13-й, результатъ слѣдуетъ вписать въ нее, и такимъ образомъ она мало-по-малу будетъ пополняться новыми цифрами.

61. **Задачи. № 34.** Сплошной и полый валъ исполнены въ видѣ одинаковой длины цилиндровъ, и на изготовленіе ихъ потрачена одна и та же масса матеріала. Найти отношеніе передаваемыхъ ими моментовъ.

Удерживая тѣ же обозначенія, что и ранѣе, главное условіе задачи выразимъ формулою:

$$d^2 = d_1^2 - d_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{a}.$$

Называя моментъ, передаваемый сплошнымъ валомъ чрезъ M, а полымъ—чрезъ M_1, и соотвѣтственныя допускаемыя напряженія—чрезъ T и T_1, будемъ имѣть (см. ф-лы **99**, **100** и **101**):

$$M = T \cdot 0{,}2 \cdot d^3,$$

$$M_1 = T_1 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{d_1^4 - d_0^4}{d_1}, \text{ откуда}$$

$$\frac{M_1}{M} = \frac{T_1}{T} \cdot \frac{d_1^4 - d_0^4}{d_1 \cdot d^3} = \frac{T_1}{T} \cdot \frac{(d_1^2 - d_0^2)(d_1^2 + d_0^2)}{d_1 \cdot d^3}$$

При помощи ф-лы **a** это выраженіе приводится къ слѣдующему.

$$\frac{M_1}{M} = \frac{T_1}{T} \cdot \frac{2d_1^2 - d^2}{d_1 \cdot d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{103}.$$

Если $T_1 = T$, то

$$\frac{M_1}{M} = 2 \cdot \frac{d_1}{d} - \frac{d}{d_1},$$

но такъ какъ $d_1 : d$ здѣсь всегда болѣе **1**, слѣд.

$$2 \cdot \frac{d_1}{d} \text{ болѣе двухъ,}$$

и отношеніе $M_1 : M$ получается всегда болѣе *1*. Пусть, напр.,

$$\frac{d_1}{d} = 2 \ldots \quad \frac{M_1}{M} = 3{,}5$$

$$„ \quad 3 \ldots \quad „ = 5{,}66 \text{ и т. д.}$$

Этимъ доказывается выгодность употребленія желѣзныхъ и стальныхъ полыхъ валовъ.

Въ случаѣ чугуна $T_1 = 0{,}8 \cdot T$. Чтобы сдѣлалось выгоднымъ употреблять полый валъ, необходимо удовлетворить неравенство:

$$0{,}8 \cdot \frac{2d_1^2 - d^2}{d_1 \cdot d} \text{ болѣе } 1.$$

Отношеніе $d_1 : d$, начиная съ котораго это неравенство будетъ удовлетворяться само собою, получится, рѣшая квадратное ур-іе·

$$2d_1^2 - d^2 = \frac{d_1 \cdot d}{0{,}8}, \text{ или}$$

$$\left(\frac{d_1}{d}\right)^2 - 0{,}625 \cdot \frac{d_1}{d} - 0{,}5 = 0, \text{ откуда } \frac{d_1}{d} = 1{,}085.$$

Такимъ образомъ можно сказать, что и чугунные валы *всегда* выгодно дѣлать полыми, потому что діам. d_1 полаго вала всегда можетъ превосходить діам. сплошного d на величину, большую 8,5%.

Нужно думать, что будущее принадлежитъ пустотѣлымъ валамъ—желѣзнымъ и стальнымъ Въ практикѣ построенія валовъ, разсчитанныхъ на большія величины передаваемой работы, полые валы и теперь уже во многихъ случаяхъ предпочитаются сплошнымъ (валы большихъ пароходныхъ и крупныхъ заводскихъ паровыхъ машинъ).

№ 35. Вращательный моментъ M въ двухъ случаяхъ передается двумя различными способами: въ 1-мъ случаѣ для этого имѣется 1 валъ съ длиной l и постояннымъ діам. d на всей длинѣ; во 2-мъ случаѣ для этого имѣется m валовъ съ длиной $l:m$ и постояннымъ діам. d_1 на всей ихъ длинѣ. Оба вала—изъ одного и того же матеріала и разсчитаны съ однимъ и тѣмъ же напряженіемъ T. Въ какомъ отношеніи между собою находятся вѣса этихъ валовъ?

Разсчетныя ур-ія для обоихъ валовъ будутъ:

$$M = T \cdot 0{,}2 \cdot d^3,$$

$$\frac{M}{m} = T \cdot 0{,}2 \cdot d_1^3, \text{ откуда}$$

$$d^3 = m \cdot d_1^3, \text{ или}$$

$$d_1 = d : \sqrt[3]{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{б},$$

Если γ — вѣсъ куб. единицы матеріала валовъ, то вѣса ихъ въ обоихъ случаяхъ будутъ:

$$q = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot l \cdot \gamma$$

$$q_1 = m \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot \frac{l}{m} \quad \gamma, \text{ откуда}$$

$$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 = 1 : \sqrt[3]{m^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{в}.$$

Ф-ла в показываетъ, что 2-я комбинація валовъ имѣетъ меньшій вѣсъ, чѣмъ 1-я:

при $m = 2$ . . . . . $q_1 : q = 0{,}63$,
„ „ $= 3$ . . . . „ $= 0{,}48$,
„ „ $= 4$ . . . . „ $= 0{,}40$.

Эти цифры показываютъ, насколько выгодно дробленіе всей передаваемой работы между отдѣльными валами.

На фиг. 83 данъ случай, когда $m = 1$, и весь валъ разсчитанъ по одному и тому же моменту M, который воспринимается валомъ въ сѣченіи A и затѣмъ раздается по длинѣ вала въ отдѣльныхъ мѣстахъ различнымъ машинамъ. Разсчетная кривая моментовъ для вала изобра-

10*

жена здѣсь прямой $CD \| AB$. Дѣйствительная же кривая моментовъ изобразится нѣкоторой ломаной линiей $1, 2 \ldots 7, 8$, показанной на фиг. 83 пунктиромъ. Въ пунктахъ $1, 2 \ldots 7, 8$ разставлены машины, и уступы ломаной линіи отмѣчаютъ, какой моментъ потребляетъ каждая изъ машинъ. По чертежу видно, что разсчетный *mom* передается только на длинѣ Cl (фиг. 83), а на всей остальной части вала разсчетный моментъ для вала во много разъ превосходитъ дѣйствительно необходимый въ этомъ мѣстѣ вращательный *mom*; и во всей остальной части вала, въ особенности въ правой его половинѣ, валъ во много разъ будетъ излишне крѣпокъ.

На фиг. 84 представленъ другой примѣръ раздачи того же *mom* M при другой группировкѣ машинъ и другомъ расположенiи двигателя, а именно при $m = 2$. Здѣсь двигатель находится въ срединѣ длины вала $AB_1 = AB_2 = 0{,}5 \,.\, l$, и каждая половина вала воспринимаетъ на себя половину же и величины *mom* M; прямая $C_1 D_1$ замѣняетъ собою разсчетную кривую моментовъ,—$B_1 D_1 = B_2 C_1 = 0{,}5\, M$, а двѣ ломаныя линіи 1...4, 5...8 показываютъ дѣйствительный ходъ раздачи момента. Разница между ординатами разсчетной кривой и дѣйствительной здѣсь выходитъ уже гораздо менѣе, и матеріалъ, употребленный на изготовленіе вала, здѣсь утилизируется гораздо лучше, чѣмъ въ 1-мъ случаѣ.

Случаи раздачи работы при $m = 3, 4 \ldots 8, 10$ встрѣчаются въ практикѣ во множествѣ при устройствѣ многоэтажныхъ и одноэтажныхъ прядильныхъ и ткацкихъ фабрикъ. Дробленіе работы при передачѣ ея отъ двигателя къ приводнымъ валамъ съ удобствомъ дѣлается въ настоящее время посредствомъ канатной и ременной передачъ.

№ 36. Два вала одинаковой длины съ діам. d и d_1 передаютъ одну и ту же работу N лош. силъ, но при различныхъ числахъ оборотовъ въ мин. n и n_1 и различныхъ допускаемыхъ напряженіяхъ T и T_1. Опредѣлить отношеніе ихъ вѣсовъ.

Разсчетныя ур-ія этихъ валовъ будутъ.

$$716\,200 \cdot \frac{N}{n} = T.\ 0{,}2\,.\,d^3$$

$$716\,200 \cdot \frac{N}{n_1} = T_1.\ 0{,}2\,.\,d_1^3, \text{ откуда}$$

$$n\,.\,T d^3 = n_1\,.\,T_1\,.\,d_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{г,}$$

т. е. *въ валахъ, передающихъ одну и ту же работу, произведеніе изъ числа оборотовъ на допускаемое напряженіе матеріала и на кубъ діаметра вала есть величина постоянная*. Откуда:

$$\frac{d}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{n_1 . T_1}{n\,.\,T}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{д.}$$

Вѣсъ этихъ двухъ валовъ соотвѣтственно будетъ:

$$q = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 . \,l \cdot \gamma; \quad q_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 . \,l \cdot \gamma_1$$

$$\frac{q}{q_1}=\frac{d^2 \cdot \gamma}{d_1^2 \cdot \gamma_1}=\frac{\gamma}{\gamma_1} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{n_1}{n} \cdot \frac{T_1}{T}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{е.}$$

Пусть $\gamma=\gamma_1$, $\quad n= 70,\ T=1{,}5$

$\qquad\qquad\qquad n_1=100,\ T_1=2{,}1$

Эти числовыя данныя соотвѣтствуютъ тѣмъ, которыя принимались въ прежнее время при устройствѣ механическихъ заводовъ, и тѣмъ, которыя принимаются теперь, руководствуясь опытомъ заграничныхъ заводовъ, по преимуществу американскихъ. По ф-лѣ **е** получимъ

$$\frac{q}{q_1}=\sqrt[3]{\left(\frac{100 \cdot 2{,}1}{70 \cdot 1{,}5}\right)^2}=\sqrt[3]{4}=1{,}587,$$

т. е. во 2-мъ случаѣ приводные валы по крайней мѣрѣ на 50% м б. легче, чѣмъ въ 1-мъ случаѣ.

№ 37. Для разсчета валовъ даются въ различныхъ справочныхъ книжкахъ формулы типа

$$d=\mathbf{C} \cdot \sqrt[3]{N:n},$$

причемъ величина коэф. C въ разныхъ книжкахъ дается различная, въ одномъ случаѣ d дано въ дюймахъ, въ другомъ—въ мм., но и въ томъ и другомъ случаѣ встрѣчаются указанія, что C надо брать различно. Показать, как обр. слѣдуетъ переходить отъ ф-лъ съ одними наименованіями къ ф-ламъ съ другими наименованіями и опредѣлить напряженіе матеріала, которое допущено при разсчетѣ.

Ф-ла перехода имѣетъ въ этомъ случаѣ весьма простой видъ и запоминается легко:

$$\frac{d^{мм}}{d^{дм}}=\frac{C^{мм}}{C^{дм}}=25{,}4$$

Зависимость между величиною C и напряженіемъ матеріала получится сравненіемъ общей разсчетной ф-лы:

$$M=716\,200 \cdot \frac{N}{n}=T \cdot 0{,}2 \cdot d^3$$

и данной ф-лы

$$C^3 \cdot \frac{N}{n}=d^3,$$

откуда

$$C^3=\frac{716\,200}{0{,}2 \cdot T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{ж.}$$

$$T=\frac{3\,581000}{C^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{з.}$$

Ф-лою **ж** опредѣляется величина коэф. C по заданному напряженію T, а ф-лою **з**—обратно, причемъ C берется изъ ф-лы, опредѣляющей d въ мм., а T получается въ кг. на кв. мм

Таблица 14-я. Величины **C** въ ф-лѣ $d = C . \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$.

Гдѣ примѣняется желѣзный валъ.	Величина **C** въ *мм.*	Величина **C** въ *дм.*	Соотвѣтственное *T* въ кг. на кв. мм.
Легкія ременныя передачи къ станкамъ.	120	4,72	2,07
„	125	4,92	1,84
„	127	5,0	1,75
„	130	5,12	1,63
Комбинаціи ременныхъ передачъ и легкихъ зубчатыхъ	140	5,51	1,30
„	150	5,91	1,06
Легкія канатныя передачи . . .	155	6,1	0,96
Тяжелыя канатныя, ременныя, зубчатыя передачи	160	6,3	0,87
„	170	6,7	0,73

Сравнивая величины T въ табл. 11 и 14, видимъ, что здѣсь онѣ берутся иногда много ниже допускаемыхъ. Причина этого уже разъяснена въ концѣ § 58.

№ 38. Стальной полый валъ съ внѣшн. діам 102 *мм.* и толщиной стѣнки 10 *мм.*, разсчитанный съ напряженіемъ 3 *кг.*, замѣнить желѣзнымъ сплошнымъ валомъ, заставляя послѣдній работать съ напряженіемъ 1,75 *кг.*

Пользуясь ф-лами **100** и **101**, напишемъ условіе, выраженное въ заданіи:

$$1,75 \,.\, 0,2 \,.\, d^3 = 3 \,.\, 0,2 \,.\, \frac{102^4 - 82^4}{102}, \text{ откуда } d = 102 \text{ мм.}$$

Отношеніе вѣсовъ этихъ валовъ будетъ

$$\frac{102^2 - 82^2}{102^2} \cdot \frac{7,8}{7,5} = 0,326,$$

т. е. стальной полый валъ при этихъ равносильныхъ условіяхъ работы будетъ вѣсить только *одну треть* противъ желѣзнаго сплошного.

№ 39. Какова будетъ поверхность, ограничивающая тѣло равнаго сопротивленія при крученіи, если предположить равномѣрную раздачу момента по всей длинѣ вала?

Въ этой задачѣ предполагается, что кривая распредѣленія моментовъ по длинѣ вала м. б выражена прямою AC (фиг. 85). На разстояніи x отъ праваго конца вала *тот* будетъ

$$m = M \,.\, \frac{x}{l}.$$

Если діаметръ вала въ этомъ сѣченіи будетъ y, то

$$M \cdot \frac{x}{l} = T \cdot 0{,}2 \quad y^3.$$

Для сѣченія B при $x = l$ получимъ

$$M = T \cdot 0{,}2 \cdot d^3, \text{ откуда } \frac{y^3}{d^3} = \frac{x}{l},$$

т. е. поверхность, ограничивающая тѣло равнаго сопротивленія при крученіи, была бы кубическимъ параболлоидомъ вращенія.

Къ выполненію этой формы обращаться однако никогда не приходится, п. ч. случая непрерывной равномѣрной раздачи *тот* по закону, выражаемому прямой AC, не встрѣчается надобности осуществлять. Измѣненіе момента по длинѣ вала обыкновенно происходитъ по закону, выражаемому ломаной линіей *1,2.. .7,8* (фиг. 83). Но если и въ этомъ случаѣ точки *C,1,2....7,8,B* (фиг. 83) будутъ лежать на одной прямой, то тѣло равнаго сопротивленія будетъ, такъ сказать, вписано въ *ступенчатую форму равной крѣпости.*

Въ этой задачѣ мы снова находимъ указаніе, как. обр. возможно уменьшить вѣсъ вала при раздачѣ значительной величины момента и при большей длинѣ вала. Ранѣе мы видѣли, что для этого нужно сдѣлать *дробленіе* работы между отдѣльными валами, а здѣсь усматриваемъ, что, исполняя каждый изъ отдѣльныхъ валовъ, можно выполнить его въ видѣ *ступенчатаго тѣла равной крѣпости*, болѣе или менѣе близко подходящаго къ идеальной формѣ.

62. **Опредѣленіе угла закручиванія для цилиндра.** *a*) *Случай дѣйствія одной пары силъ на всей длинѣ цилиндра.* Пусть имѣемъ цилиндръ съ осью OO_1 (фиг 81), закручиваемый дѣйствіемъ вращательнаго момента $M = const.$ На поверхности такого цилиндра вызывается напряженіе H, на разстояніи r отъ оси — напряженіе h, а на разстояніи единицы отъ оси — напряженіе h_0:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r} = h_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{i.}$$

Изъ деформируемаго цилиндра выдѣлимъ цилиндрическую поверхность съ радіусомъ $Of = O_1d = 1$ (фиг 86).

Пусть fd будетъ образующая этого цилиндра, а f_1d — винтовая линія, въ которую обращается образующая при закручиваніи цилиндра. Тогда дуга ff_1 (фиг. 86) будетъ измѣрять собою уголъ закручиванія Θ. Развернувши эту цилиндрическую поверхность, относительное положеніе образующей df, винтовой линіи df_1 и дуги ff_1 получимъ въ томъ видѣ, какъ представляетъ нижняя часть фиг. 86: здѣсь ff_1, ee_1 суть сдвиги въ различныхъ точкахъ образующей относительно ея первоначальнаго положенія. Если сдѣлать $O_1k = de = 1$, то дуга ee_1 будетъ измѣрять при сдвигѣ уголъ перекашиванія φ. Изъ чертежа (фиг. 86):

$$ff_1 : df = ee_1 : de, \text{ или } \Theta = l \cdot \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{k.}$$

Зависимость между угломъ перекашиванія φ и напряженіемъ h_0 на поверхности разсматриваемаго цилиндра напишется по ф-лѣ **79** (§ 49):

$$h_0 = G \, . \, \varphi.$$

Но

$$h_0 = \frac{H}{R} = \frac{M}{I_0}, \text{ поэтому}$$

$$\theta = \frac{M \, . \, l}{G \, . \, I_0} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{104.}$$

Опредѣляя теперь уголъ закручиванія, напишемъ:

$$\theta^0 = \frac{180}{\pi} . \theta = \frac{180}{\pi} . \frac{M \, . \, l}{G \, . \, 0{,}1 \, . \, d^4} \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{104{,}a.}$$

Сравнивая эту ф-лу съ ф-лой **а** въ § 56, видимъ между ними полнѣйшее тождество. При этомъ выясняется и значеніе коэф. **в**:

$$\text{в} = \frac{1800}{\pi \, . \, G}, \text{ откуда } G = \frac{1800}{\pi \, . \, \text{в}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{105.}$$

Измѣряя величины угловъ закручиванія, представляется возможнымъ выяснить величину постояннаго **в** для каждаго изъ матеріаловъ, а по нему помощію ф-лы **105** находится и велилина *коэф. упругости 2-го рода.* Такимъ образомъ было обнаружено, что для наиболѣе употребительныхъ матеріаловъ (желѣза, стали и чугуна) отношеніе $G : E$ колеблется между $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$, т. е. 0,4 и 0,375, что весьма близко къ результату, полученному въ § 54 (зад. № 30, ф-ла 84 *a*).

Измѣненіе величины угла закручиванія по мѣрѣ удаленія отъ сѣченія O_1 на фиг. 81 можно выразить графически въ видѣ прямой KS, отложивши $LS = \theta$.

б) *Случай дѣйствія нѣсколькихъ паръ въ различныхъ сѣченіяхъ*
Пусть цилиндръ 00_1 (фиг. 87) закручивается тремя парами силъ съ моментами M_1 M_2 M_3: изъ нихъ моментъ $M_1 = OF = Eg$ проявляетъ свое дѣйствіе одинъ между сѣченіями O и g на длинѣ l_1, въ сѣченіи g прибавляется второй моментъ $M_2 = DE$, такъ что

$$Dg = Cf = M_1 + M_2;$$

дѣйствіе суммы этихъ моментовъ распространяется на длинѣ $l_2 = fg$; наконецъ въ сѣченіи f прибавляется 3-й моментъ $M_3 = BC$, и на длинѣ $O_1f = l_3$ дѣйствуютъ уже всѣ 3 момента, такъ что

$$Bf = AO_1 = M_1 + M_2 + M_3.$$

Законъ распредѣленія моментовъ указываетъ ломаная линія *ABCDEF*.

Уголъ закручиванія θ_3 на длинѣ l_3 получится такъ:

$$\theta_3 = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{G \, . \, I_0} . \, l_3.$$

Измѣненіе величины угла между сѣченіями O_1 и f выразитъ прямая O_1a, если

$$af = \theta_3.$$

Между сѣченіями f и g уголъ закручиванія будетъ

$$\theta_2 = \frac{M_1 + M_2}{G \cdot I_0} \cdot l_2.$$

Измѣненіе угла закручиванія на длинѣ l_2 выразитъ прямая ab, если

$$bg = \theta_1 + \theta_2.$$

Наконецъ, уголъ закручиванія на длинѣ gO получится такъ

$$\theta_1 = \frac{M_1}{G \cdot I_0} \, l_1,$$

а измѣненіе угла выразитъ прямая bc, если

$$Oc = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_0$$

$$\theta_0 = \frac{1}{G \cdot I_0} \cdot \Big[M_1 (l_1 + l_2 + l_3) + M_2 (l_2 + l_3) + M_3 \; l_3 \Big] \; . \; . \quad \mathbf{106.}$$

Если бы кривая моментовъ состояла изъ n одинаковыхъ ступеней, т. е. весь моментъ M раздавался бы поровну во всѣхъ n сѣченіяхъ, и въ каждомъ отдавалась бы величина

$$m = \frac{M}{n},$$

а сѣченія были бы размѣщены на равныхъ разстояніяхъ

$$\imath = \frac{l}{n},$$

то полный уголъ закручиванія по ф-лѣ **106** составится бы такъ:

$$\theta_0 = \frac{m \cdot \lambda}{G \cdot I_0} \Big[n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1 \Big]$$

$$\theta_0 = \frac{m \cdot \lambda}{G \cdot I_0} \cdot \frac{n + 1}{2} \cdot n = \frac{M \cdot l}{G \cdot I_0} \cdot \frac{n + 1}{2n} \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{107}$$

При увеличеніи n до безконечности ступеньчатая кривая моментовъ обращается въ прямую AO (фиг. 88), засѣкающую $AO_1 = M$, а ломаная прямая O_1abc (фиг. 87), указывающая законъ измѣненія угловъ закручиванія, обращается въ параболу O_1K. Выраженіе

$$\frac{n + 1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2},$$

Оно обращается въ $\frac{1}{2}$ при $n = \infty$, и тогда θ_0 будетъ, очевидно, половиною того угла закручиванія, который получился въ случаѣ a) отъ постояннаго момента. Если проведемъ на фиг 88 прямую O_1S такъ же,

какъ и на фиг. 81 проведена прямая угловъ Θ, т. е. сдѣлаемъ на фиг. 88.

$$OS = \Theta, \text{ тогда } OK = \Theta_0 = \frac{\Theta}{2}.$$

Если на фиг. 81, 87 и 88 величина *тот* M одна и та же, валы сдѣланы изъ одного матеріала и съ одинаковой крѣпостью, тогда уголъ δ будетъ одна и та же величина, а парабола O_1K (фиг. 88) должна касаться прямой O_1S.

Ур-іе параболы O_1K (фиг. 88) получается весьма просто. Въ произвольномъ сѣченіи a, отстоящемъ на разстояніе x отъ праваго конца вала, выраженіе момента будетъ

$$M_x = M \cdot \frac{x}{l}$$

На безконечно маломъ разстояніи dx величину момента можно считать постоянною и равною M_x. Безконечно малая величина угла закручиванія $d\theta$ на длинѣ, равной dx, напишется такъ:

$$d\theta = \frac{M_x \cdot dx}{G \cdot I_0} = \frac{M}{G \cdot I_0 \cdot l} \cdot x \cdot dx.$$

Интегрируя это уравненіе по θ въ предѣлахъ отъ нуля до θ, а по x — въ предѣлахъ отъ нуля до x, получимъ

$$\theta = \frac{M}{G \cdot I_0} \cdot \frac{x^2}{2l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{108.}$$

Это и есть ур-іе параболы O_1cK (фиг 88), отнесенной къ осямъ yKx, причемъ $cd = \theta$. Сдѣлавши $x = l$, получаемъ

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \, \frac{M \cdot l}{G \; I_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{108,a.}$$

Сравненіе ф-лъ **108 а** и **104** и приводитъ насъ къ тому заключенію, которое было сдѣлано выше, и по которому—*въ случаѣ равномѣрной раздачи момента по длинѣ вала, на концѣ его получается только половина угла закручиванія, вызываемаго при передачѣ полнаго момента съ одного конца вала на другой.*

63. **Опредѣленіе діаметра вала по углу закручиванія.** Когда вмѣстѣ съ валомъ вращаются значительныя массы, оживленныя большой скоростью, и въ особенности перемѣнной скоростью, тогда при разсчетѣ вала обращаютъ вниманіе также и на его упругую деформацію, измѣряемую величиною угла закручиванія вала на концѣ его. Для величины этого угла устанавливается опредѣленная норма. Будемъ называть величину угла закручиванія въ градусахъ, приходящуюся на 1 мт. длины вала, его *круткою* и обозначать чрезъ φ, тогда

$$\varphi = \frac{\theta^0}{l^{mt}}.$$

По ф-лѣ **104 а** имѣемъ:

$$d^4 = \frac{1800}{\pi \cdot G} \cdot \frac{M . l\ ^m/_m}{\Theta} = \frac{1800\ 000}{\pi \cdot G} \cdot \frac{M}{\psi}.$$

Внося въ это выраженіе вмѣсто M его величину въ *кг.-мм.* (на основ. ф-лы **102**)

$$M\ \textit{кг.-мм.} = 716\ 200 . \frac{N}{n},$$

вмѣсто ψ допускаемую величину крутки

$$\psi = \frac{1^0}{4},$$

и $G = 7700$ *кг.* на кв. *мм.*, получимъ:

$$d = 120 . \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{109}.$$

Если бы для крутки вала была дана какая-либо другая величина, тогда діаметръ надо высчитывать по ф-лѣ болѣе общаго вида

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{4 . \psi . n}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{109,a}.$$

Часто ф-лу **109** смѣшиваютъ съ ф-лою типа

$$d = \mathbf{C} \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ . \ . \ . \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{110},$$

въ которой для самыхъ легкихъ приводныхъ валовъ съ ременной передачей величины коэф. **C** назначается тоже *120* (см. зад. 37, § 61)

Ф-ла **110** съ надлежащимъ коэф. **C** въ ней предусматриваетъ надлежащую крѣпость вала, т. е. полученіе у него на поверхности такой величины напряженія, которая была бы не выше допускаемой, а ф-лой **109 а** предусматривается, чтобы упругая деформація вала не превосходила данной допускаемой величины, когда валу приходится работать въ условіяхъ, отмѣченныхъ въ началѣ этого §.

Въ болѣе трудныхъ случаяхъ работы вала требуютъ, чтобы ψ было не болѣе $\frac{1}{5} - \frac{1^0}{6}$.

Изъ осторожности разсчетъ вала всегда надо дѣлать по обѣимъ ф-ламъ—**110** и **109,а** и принимать за исполняемую величину діаметра—большую изъ двухъ величинъ, которыя будутъ получены.

64. **Задачи. № 40.** Легкій приводный валъ ременной передачи имѣетъ рабочую длину 3 *мт.* и былъ разсчитанъ по ф-лѣ **110** съ коэф. **C** $= 120$. Опредѣлить крутку вала при $N = 10$ и $n = 120$.

$$d = 120 \sqrt[3]{\frac{10}{120}} = 52\ \textit{мм.}$$

$$M = 716\ 200 \cdot \frac{10}{120} = 59\ 683\ \textit{кг.-мм.}$$

По **104,а**:

$$\theta^\circ = \frac{1800}{\pi} \cdot \frac{59\,683 \cdot 3000}{7700 \cdot 52^4} = \text{ок. } 1^\circ 11'.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что уголъ закручиванія у вала чрезмѣрно великъ, и что валъ слѣдовало бы разсчитывать по ф-лѣ 109, тогда:

$$d_1 = 120\sqrt[4]{\frac{10}{120}} = 65 \text{ мм.}$$

№ 41. Валъ отъ канатнаго привода заимствуетъ работу въ 60 *л. с.* при 120 обор. Опредѣлить его діаметръ.

По ф-лѣ **109** имѣемъ

$$d_1 = 120\sqrt[4]{\frac{60}{120}} = 101 \text{ мм.}$$

Въ ф-лѣ **110** примемъ $\mathbf{C} = 155$ (см. зад. № 37, § 61):

$$d = 155\sqrt[3]{\frac{60}{120}} = 123 \text{ мм}$$

За исполняемый діам. можно поэтому принять 125 *мм.*

№ 42. Правый и лѣвый конецъ вала защемлены; на разстояніи l_1 отъ лѣвой опоры и l_2 отъ правой передается валу моментъ M Опредѣлить крутящій моментъ для лѣвой и правой части вала?

Отв. $M_1 : M_2 = l_2 : l_1.$

65. **Приращеніе напряженія при крученіи, вслѣдствіе неравномѣрнаго вращенія массъ.** Предположимъ, что, при передачѣ валомъ работы между двумя данными сѣченіями, въ одномъ изъ нихъ можетъ происходить измѣненіе живой силы вращающейся массы m, вслѣдствіе измѣненія скорости вращенія ея съ v_0 на v_1. Развивающаяся при этомъ работа будетъ потрачена на упругую деформацію вала, который получитъ приращеніе угла закручиванія, равное α; величина послѣдняго пусть будетъ такова, что $\theta + \alpha$ представляетъ собою все еще упругую деформацію. Если *томъ* пары силъ, развивающей ту же работу, что и данная живая сила, назовемъ чрезъ $Q_1 . D$, гдѣ D — плечо пары, то мы должны имѣть:

$$m \cdot \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = \mathbf{A} = Q_1 . D . \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{а.}$$

Моментъ $\mathbf{M} = Q_1 . D$ представляетъ собою ту самую величину, дѣйствіемъ которой вызвано появленіе *добавочнаго* угла закручиванія α, поэтому

$$\alpha = \frac{\mathbf{M} . l}{G . I_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{б.}$$

$$A = \frac{\mathbf{M}^2 . l}{G . I_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{в.}$$

Подъ дѣйствіемъ момента **м** вызовется на поверхности цилиндра къ существующему напряженію H еще *добавочное* напряженіе τ, опредѣляемое р-вомъ

$$\text{м} = \tau \cdot \frac{I_0}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{г}.$$

Соединяя равенства **в** и **г**, получимъ:

$$A = \frac{\tau^2 . l}{G} \cdot \frac{I_0}{R^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{д}$$

$$I_0 : R^2 = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 : \frac{d^2}{4} = \frac{F}{2},$$

если F—площадь сѣченія вала. Послѣ этого ф-ла **а** приметъ видъ:

$$\mathbf{A} = m \cdot \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = \frac{\tau^2 . F . l}{2G} \ldots\ldots\ldots \text{е},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2G . \mathbf{A}}{F . l}} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{111},$$

т. е. *приращеніе напряженія у вала, происходящее вслѣдствіе появленія приращенія живой силъ массъ, равняется корню квадратному изъ дроби, у которой числитель = произведенію удвоеннаго коэффиціента упругости 2-го рода на величину приращенія живой силы, а знаменатель — рабочій объемъ вала, т. е. объемъ его между двумя данными конечными сѣченіями вала — воспроизводящимъ живую силу и воспринимающимъ ее.*

Если $v_0 = 0$, то $$\tau = v_1 \cdot \sqrt{\frac{G . m}{F . l}} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{112},$$

т. е *напряженіе матеріала, которое развивается при внезапномъ пусканіи вала въ ходъ или внезапной остановкѣ его, равно произведенію двухъ величинъ, изъ коихъ 1-я есть наибольшая скорость, пріобрѣтенная массою, вращающеюся вмѣстѣ съ валомъ, при трогайіи ихъ съ мѣста, или скорость передъ внезапною остановкою вала, а 2-я величина равна корню квадратному изъ дроби, числитель которой = произведенію вращающейся массы на коэф. упругости 2-го рода, а знаменатель—рабочій объемъ вала.*

Ур-іе крѣпости вала въ этомъ случаѣ будетъ писаться такъ:

$$T = \text{или болѣе } H + \tau \ldots\ldots\ldots \mathbf{113},$$

гдѣ напряженіе H опредѣляется по ф-лѣ **92**:

$$H = M \cdot \frac{R}{I_0}.$$

Но такъ какъ при разсчетѣ валовъ весьма трудно назначить возможную величину τ, поэтому валы тяжелыхъ передачъ по ф-лѣ **99** всегда и разсчитываются съ пониженнымъ допускаемымъ напряженіемъ **T** (см. § 58 и зад. № 37, таб. 14).

Здѣсь выяснилось, какое большое влiянiе оказываетъ *рабочiй объемъ* вала на урегулированiе величины внезапныхъ напряженiй, вызываемыхъ при измѣненiи живой силы массъ, вращающихся вмѣстѣ съ валомъ; при этомъ *пользу приносятъ не единичныя и случайныя утолщенiя вала, а равномѣрное увеличенiе размѣровъ его живого или разсчетнаго сѣченiя на всемъ протяженiи, гдѣ происходитъ воздѣйствiе живой силы.*

Ф-лы **111** и **112** указываютъ въ то же время, что величина τ зависитъ отъ G, и въ этомъ отношенiи величина добавочнаго напряженiя должна получаться значительно менѣе въ чугунныхъ валахъ чѣмъ въ желѣзныхъ и стальныхъ. Въ этомъ обстоятельствѣ кроется между прочимъ одна изъ причинъ, почему въ турбинахъ съ вертикальнымъ валомъ и верхнимъ фонарнымъ подпятникомъ (надъ водою) полый турбинный валъ, облегающiй стоякъ, и до сихъ поръ выполняется изъ чугуна, а не изъ стали, не взирая на столь отвѣтственную роль, выпадающую во всемъ устройствѣ турбины на долю этого вала.

66. Разсчетъ вала на одновременное дѣйствiе растягивающей и крутящей нагрузки. Пусть имѣемъ валъ, на который передается растягивающая нагрузка P и крутящiй моментъ M. Тогда по ф-лѣ *Баха* (ф-ла **96** въ § 55,*в*):

$$H = h\left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{2x \, . \, t}{h}\right)^2}\right]$$

Здѣсь

$$h = P : F$$

$$t = M \, . \, W_0$$

$$\frac{t}{h} = \frac{M}{W_0} : \frac{P}{F} = \frac{4\,M}{P \, . \, d}, \text{ т. к.}$$

для круга . . . . $W_0 : F = \frac{\pi \, . \, d^3}{16} : \frac{\pi}{4} \; d^2 = \frac{d}{4}$

$$H = \frac{P}{F} \cdot Ж, \text{ гдѣ}$$

$$Ж = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{8x \, . \, M}{P \, . \, d}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{114.}$$

Разсчетное ур-iе будетъ

$$F = \text{или болѣе} \frac{P}{Z \; Ж} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{115.}$$

Величина $Ж$ всегда болѣе *1*. Так. обр мы видимъ, что *разсчетъ на одновременное дѣйствiе растягивающей и крутящей нагрузки сводится къ разсчету на дѣйствiе одной лишь растягивающей нагрузки, но съ напряженiемъ, меньшимъ обычно допускаемаго, и это уменьше-*

ніе дълается въ зависимости отъ величины обьихъ нагрузохъ и способа ихъ воздъйствія.

Ф-ла **114** показываетъ въ то же время, что $Ж$ есть функція d, діам. искомаго вала. Чтобы сдѣлать рѣшеніе вопроса опредѣленнымъ, въ ф-лу **114** вмѣсто d вносятъ или ту величину діаметра, которая получится изъ разсчетнаго ур-ія на одно растяженіе, или ту, которая будетъ получена по данному крутящему моменту, но непремѣнно большую изъ нихъ.

67. **Задачи. № 43.** Валъ винтового подъемнаго механизма растягивается усиліемъ $P=10$ *tn* и требуетъ для своего вращенія момента въ 70 *кг.-мт.* Передача плавная. Опредѣлить размѣры сѣченій, которыя выносятъ на себѣ дѣйствіе и растягивающей, и крутящей нагрузки.

Допустимъ $\left.\begin{array}{l} Z=6{,}5 \text{ кг. на кв. мм.} \\ t=3{,}5 \;\;\text{„ „ „ „} \end{array}\right\}$ для желѣза.

Если бы надо было вести разсчетъ на одно растяженіе, площадь поперечнаго сѣченія была бы

$$F=\frac{10000}{6{,}5}=1538;\ d=45 \text{ мм.}$$

Если бы разсчетъ вели на одно крученіе, имѣли бы:

$$70\,000=3{,}5\,.\,0{,}2\,.\,d^3;\ d=47 \text{ мм.}$$

Въ ф-лу **114** надо вносить эту послѣднюю величину:

$$Ж=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\sqrt{1+\left(\frac{8\,.\,1{,}5\,.\,70\,000}{10\,000\,.\,47}\right)^2}=1{,}66,$$

т. к. по ф-лѣ **97** (§ 55,*в*)

$$x=\frac{4}{5}\ \frac{Z}{t}=\frac{4}{5}\cdot\frac{6{,}5}{3{,}5}=1{,}5.$$

Послѣ этого окончательно

$$F=\frac{10\,000}{6{,}5:1{,}66}=2546 \text{ кв. мм.}$$

$$d= \text{ или болѣе } 57 \text{ мм.}$$

№ 44. На желѣзномъ валу 50 *мм.* діам. и 3 *мт.* рабочею длиною находится приведенная масса, соотвѣтствующая 300 *кг.* Опредѣлить напряженіе при пусканіи такого вала въ ходъ.

Здѣсь

$$F=\frac{\pi}{4}\cdot 50^2=1964 \text{ кв. мм.}$$

$$l=3000 \text{ мм.}$$

$$G=8000 \text{ кг. на кв. мм.}$$

$$m=\frac{300 \text{ кг.}}{9808 \text{ мм.}}$$

$$\tau = v_1 \cdot \sqrt{\frac{8000.300}{1964.3000.9808}} = \frac{v_1}{49{,}5},$$

т. е. на каждые 49,5 *мм.* начальной скорости на окружности приведенной массы получится напряженіе на поверхности вала въ 1 *кг.*

68. **Крученіе призматическихъ тѣлъ.** Изрѣдка приходится встрѣчаться въ машиностроительной практикѣ съ провѣркою крѣпости крученія у призматическихъ тѣлъ, имѣющихъ болѣе или менѣе сложное очертаніе поперечнаго сѣченія. Это встрѣчается при выполненіи такихъ тѣлъ отливкою ихъ изъ чугуна. Распредѣленіе напряженій въ поперечномъ сѣченіи призмы происходитъ при этомъ совершенно другимъ образомъ, чѣмъ при кругломъ сѣченіи цилиндра; поэтому теорія крученія круглаго цилиндра совсѣмъ не м. б распространяема на тѣла призматическія, а теорія крученія послѣднихъ и ея результаты не имѣютъ никакого отношенія къ круглому цилиндру.

Весьма цѣнныя теоретическія и опытныя изслѣдованія надъ чугунными призматическими тѣлами были сдѣланы проф. *Бахомъ* и подробно изложены въ его сочиненіи *Elasticitat & Festigkeit.* Мы приведемъ здѣсь только окончательные результаты этихъ изслѣдованій.

Какая бы форма поперечнаго сѣченія ни была, разсчетное ур-іе крутимой призмы можно писать такъ:

$$M = T \cdot \mathbf{W}_0,$$

гдѣ M—крутящій моментъ, T—допускаемое напряженіе, а $\mathbf{W}_0$—модуль сопротивленія, указанный *Бахомъ.*

Точно также

$$\Theta = \frac{M \cdot l}{G} \cdot \mathbf{A},$$

гдѣ Θ — уголъ закручиванія призмы и $\mathbf{A}$ — функція размѣровъ, выясненная *Бахомъ.* Имъ же опытнымъ путемъ найдено и отношеніе

$$\mathbf{B} = T : Z.$$

Сѣченіе эллиптическое сплошное. Длина осей эллипса — большой $2a$, а малой — $2b$.

$$\mathbf{W}_0 = \frac{\pi}{2} \cdot a \cdot b^2; \quad \mathbf{A} = \frac{a^2 + b^2}{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}; \quad \mathbf{B} = 1 - 1{,}25.$$

Сѣченіе эллиптическое полое. Внѣшнія оси—$2a$ и $2b$, внутреннія $2a_0$ и $2b_0$, отношеніе

$$\frac{a_0}{a} = \frac{b_0}{b} = m$$

$$\mathbf{W}_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a \cdot b^3 - a_0 \cdot b_0^3}{b}; \quad \mathbf{B} = 0{,}8 - 1{,}0;$$

$$\mathbf{A} = \frac{a^2 + b^2}{\pi \cdot a^3 \cdot b^3 (1 - m^4)}.$$

Сѣченіе прямоугольное сплошное. Большая сторона—a, малая—b

$$W_0 = \frac{2}{9} \cdot a \cdot b^2;\ B = 1,4 - 1,6;\ C = \frac{b^2 + a^2}{a^3 \cdot b^3};$$

$\frac{a}{b} = 1$	2	4	8
$C = 3,56$ . . .	3,50	3,35	3,21.

Сѣченіе крестообразное (фиг. 89):

$$W_0 = \frac{2}{9}\ (h + h_1 - a) \cdot a^2;\ B = 1,4 - 1,6.$$

Сѣченіе угловое (фиг. 90):

$$W_0 = \frac{2}{9}\ (h + h_1 - a) \cdot a^2;\ B = 1,4 - 1,6.$$

Сѣченіе корытообразное (*швеллеръ*) *и двутавровое* (фиг. 91 и 92):

$$W_0 = \frac{2}{9}\ (h + 2b_0) \cdot a^2;\ B = 1,4 - 1,6$$

$$a = b - b_0 = \frac{h - h_0}{2}.$$

Вопросы для повторенія главы о крученіи.

Результаты опытовъ надъ крученіемъ круглаго ц ра Распредѣленіе напряженій въ поперечномъ сѣченіи, условія равновѣсія, разсчетное ур-іе Отношеніе различныхъ матеріаловъ къ сопротивленію крученія Модуль сопротивленія для сплошного и полаго сѣченія Если изъ чугуннаго цилиндра вырѣжемъ сердцевину съ діаметромъ $= \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ отъ внѣшняго, насколько уменьшится его вѣсъ и сопротивленіе крученію. Гдѣ находится опасное сѣченіе крутимаго цилиндра при одной дѣйствующей парѣ, при двухъ, при трехъ и т д, какой видъ имѣетъ кривая моментовъ и кривая измѣненія угловъ закручиванія во всѣхъ этихъ случаяхъ? Зависимость между N, n и M Дробленіе работы между отдѣльными валами, выполненіе каждаго изъ нихъ съ *min* вѣса Формулы для разсчета вала, ихъ видъ, переходъ отъ однихъ мѣръ къ другимъ въ этихъ ф лахъ Оставляя всѣ условія работы вала и пусканія его въ ходъ прежними, как обр уменьшить напряженіе при пусканіи вдвое, втрое и т д Какъ дѣлается разсчетъ на совмѣстное растяженіе и крученіе, ур іе крѣпости Какая разница получится, если будемъ прикладывать къ цилиндру закручивающую пару силъ, или одну силу на вдвое большемъ плечѣ отъ оси? Перечислить всѣ выгоды полыхъ валовъ, невыгода ихъ при разсмотрѣніи вопроса о пусканіи вала въ ходъ сравнительно съ равнокрѣпкими имъ сплошными валами

СВОДЪ

главныхъ формулъ и данныхъ изъ главы о крученіи.

$\frac{\textit{Max}\ \text{напряженія.}}{\text{Напряженіе въ данной точкѣ.}} = \frac{\text{Разстояніе крайней}}{\text{Разстояніе данной}}$ точки сѣченія отъ оси крученія.

$\frac{H}{h} = \frac{R}{r}$ . . . . **85.** § 57

Модуль сопротивленія сѣченія—въ *мм.* 3-й степени. $= \frac{\text{Полярный моментъ инерціи сѣченія — въ } \textit{мм.} \text{ 4-й степени.}}{\text{Радіусъ цилиндра—въ } \textit{мм.}}$ . . . . § 57.

$W_0 = I_0 : R$ . . . .

Разсчетное ур-іе:

Допускаемое напряженіе въ *кг.* на кв. *мм.* $\frac{=}{>} \frac{\text{Крутящій моментъ въ } \textit{кг.-мм.}}{\text{Модуль сопротивленія—въ } \textit{мм.} \text{ 3-й степени.}}$ . . . . . **99.**

$T =$ или болѣе $M : W_0$ . . . .

Для круглаго сплошного сѣченія:

Полярный моментъ инерціи площади круга. $= \frac{\text{Четвертая степень діаметра.}}{10}$ . . . . **89.** § 53, *в.*

$I_0 = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 = 0,1 \cdot d^4$ . . . .

Модуль сопротивленія площади круга при крученіи. $=$ 0,2 $\times$ Кубъ діаметра. . . . **100.** § 59.

$W_0 = I_0 \cdot R = 0,2 \cdot d^3$ . . .

Модуль сопротивленія въ *мм.* $= 1000 \times$ Модуль сопротивленія въ *смт.*

Крутящій моментъ въ *кг.-мтр.* $= 716{,}2 \times \dfrac{\text{Работа въ лошад. сил.}}{\text{Число оборотовъ въ мин.}}$

$$M = 716{,}2 \cdot \frac{N}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{102.} \ \S\ 60.$$

Дуга закручиванія (отвлеч. ч.). $= \dfrac{\text{Крутящій моментъ въ кг.-мм.} \times \text{Длина цилиндра въ мм.}}{\text{Коэф. упругости 2-го рода въ кг. на кв. мм.} \times \text{Полярный моментъ инерціи сѣченія цилиндра — въ мм. 4-й степени.}}$

$$\theta = \frac{M \cdot l}{G \cdot I_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{104.} \ \S\ 62.$$

Разсчетное уравненіе для случая одновременнаго растяженія и крученія:

Допускаемое напряженіе при разсчетѣ на растяженіе. $\overline{\overline{>}}$ Коэф. *Ж* $\times \dfrac{\text{Растягивающая нагрузка}}{\text{Площадь сѣченія.}}$

$$Z = \text{ или болѣе } Ж \cdot \frac{P}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Ж = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{8x}{P} \cdot \frac{M}{d}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots$$

ЧАСТЬ II.

Сопротивленіе тѣлъ сгибанію.

Въ нижеслѣдующемъ изложена теорія сгибанія *призматическаго бруса съ прямолинейной осью*, т. е. тотъ частный случай общей теоріи сгибанія, который имѣетъ наибольшее значеніе въ практикѣ машиностроенія, инженернаго и строительнаго дѣла и даетъ результаты, ближе всего отвѣчающіе опытнымъ даннымъ. Мы предполагаемъ при этомъ, что поперечное сѣченіе сгибаемаго бруса имѣетъ по крайней мѣрѣ *одну* ось симметріи, самое же очертаніе сѣченія при соблюденіи этого условія можетъ быть произвольнымъ. Въ теоріи сгибанія такой брусъ для краткости мы будемъ называть *балкой*.

Сгибаніе балки можно вызвать и *продольной* нагрузкой, и *поперечной*.

Въ случаѣ сгибанія балки отъ дѣйствія продольной нагрузки всѣ поперечныя сѣченія балки испытываютъ перемѣщенія двоякаго рода, во-1хъ, отъ сгибанія, и во-2-хъ, отъ растяженія или сжатія, смотря по тому, въ какую сторону направлено дѣйствіе нагрузки. Въ чистой же формѣ, не осложненной явленіями добавочнаго растяженія или сжатія, сгибаніе балки происходитъ при дѣйствіи *поперечной нагрузки*, сгибающей балку и нагружающей ее въ плоскости симметріи. Этотъ послѣдній случай мы и будемъ разсматривать далѣе.

Такой способъ симметричнаго нагруженія балки поперечными силами является наиболѣе разумнымъ, позволяетъ осуществить балку съ наименьшими возможными для нея размѣрами при данной степени надежности постройки, даетъ наибольшую гарантію правильности разсчета въ смыслѣ наилучшаго согласованія его съ опытными данными и долженъ быть примѣняемъ въ практикѣ по преимуществу.

A. Зависимость между нагрузкой и силами сопротивленія при сгибаніи.

1. **Положенія, на которыхъ основана теорія сгибанія.** Съ практической точки зрѣнія только такая теорія имѣетъ надлежащую цѣну, ко-

торая основана на положеніяхъ, подтверждаемыхъ путемъ опыта наиболѣе близко.

Теоріи сгибанія не сразу посчастливилось въ этомъ отношеніи. Начало теоретической разработки вопроса о сгибаніи балки болѣе нежели на 2 столѣтія предшествовало опытнымъ изслѣдованіямъ его и неоднократно основано было на совершенно произвольныхъ положеніяхъ, которыя казались составителямъ теорій наиболѣе простыми, естественными, правильными, но при провѣркѣ оказывались безусловно невѣрными.

Имѣющая нынѣ всеобщее примѣненіе въ практикѣ теорія сгибанія основана на слѣдующихъ положеніяхъ:

а. Балка на всемъ своемъ протяженіи предполагается состоящею изъ однороднаго матеріала [1]).

б. Провѣсъ согнутой оси балки относительно первоначальнаго ея положенія, называемый **стрѣлою прогиба,** *предполагается весьма небольшимъ* [2])

в. Поперечныя сѣченія балки, бывшія до сгибанія плоскими, предполагаются сохраняющими плоскую форму и послѣ сгибанія [3]).

г. Продольныя волокна [4]) *балки при сгибаніи обращаются въ кривыя* **эквидистантныя,** *т. е. на всемъ протяженіи балки сохраняющія между собою одинаковое разстояніе,—то же самое, которое было между ними до сгибанія балки* [5]).

д. Продольныя волокна балки, располагающіяся при сгибаніи балки на выпуклой ея сторонѣ, **растягиваются,** *а на вогнутой—* **сжимаются.**

Это положеніе было доказано *Дюгамелемъ* цѣлымъ рядомъ опытовъ съ деревянными балками сжатыя волокна у нихъ перерѣзаются (всѣ или часть ихъ) въ нѣсколькихъ мѣстахъ по длинѣ балки прорѣзы аккуратно расклиниваются деревянными пластинками, и затѣмъ цѣлыя балки и съ вырѣзами нагружаются до излома балки, оказывается, что ломающій грузъ для всѣхъ этихъ балокъ нужно имѣть одинъ и тотъ же, разница въ результатахъ заключается въ предѣлахъ допускаемыхъ ошибокъ при измѣреніяхъ, ломающій грузъ быстро уменьшается по мѣрѣ погруженія прорѣза въ область растянутыхъ волоконъ.

Практическое примѣненіе результатовъ этихъ опытовъ въ 1883 г, въ 1 ю мою заграничную командировку, я встрѣтилъ на одной изъ водопроводныхъ

---

[1]) Это положеніе ближе всего осуществляется на практикѣ въ балкахъ изъ мягкаго желѣза и стали. Уклоненія отъ него всегда имѣютъ мѣсто *въ деревянныхъ балкахъ*, вслѣдствіе естественныхъ условій наростанія и неодинаковой плотности годовыхъ колецъ, и *въ чугунныхъ балкахъ*, вслѣдствіе образованія *корки* на поверхности литья при его остываніи, твердой и мало тягучей.

[2]) Отношеніе длины балки къ стрѣлѣ прогиба въ потолочныхъ балкахъ съ мало измѣняющейся нагрузкой бываетъ въ деревянныхъ балкахъ отъ 200 до 400, въ чугунныхъ—отъ 1000 до 1500 и въ желѣзныхъ—отъ 600 до 1000 Величина этого отношенія зависитъ также отъ способа нагруженія балки, надежности ея постройки и отношенія длины ея къ высотѣ сѣченія.

[3]) Это положеніе подтверждается опытомъ только при соблюденіи предыдущихъ условій При большихъ же стрѣлахъ прогиба, не допускаемыхъ въ долговѣчныхъ сооруженіяхъ, но получаемыхъ въ лабораторныхъ опытахъ при значительномъ выгибѣ балки, сѣченіе искривляется

[4]) Такъ называемъ мы для краткости всѣ продольныя матеріальныя линіи балки.

[5]) Это положеніе весьма близко подтверждается опытомъ только при соблюденіи 1-го и 2-го условій

станцій въ Парижѣ (*Place d'Alma, 1*). На станціи были въ работѣ 2 паровыхъ насоса Паровые цилиндры—простого дѣйствія, діам. 1,805 *мт.*, ходъ 2,25; скальчатые насосы также простого дѣйствія, діам. 1,05 *мт*, ходъ 2,35; оборотовъ въ минуту—8; передача отъ парового поршня къ насосному плунжеру дѣлается коромысломъ, длина котораго 9,29 *мт.* и высота сѣченія надъ осью 1,6 *мт.* Въ 1883 г. машины эти расходовали въ часъ на 1 эффективную силу до 2,5 *кг.* каменнаго угля (*charbon d'Aniche*) послѣ того, какъ въ ихъ устройствѣ были введены различныя усовершенствованія; а когда машины были только что поставлены въ 1865 г, онѣ расходовали до 7 *кг.* угля. Въ 1874 г у одной изъ машинъ сломалось коромысло какъ разъ надъ осью. Нагруженное коромысло выгибается всегда въ одну сторону: сжатыя волокна—внизу, растянутыя вверху. Ремонтъ его былъ сдѣланъ, пользуясь результатами опытовъ Дюгамеля: возлѣ втулки были поставлены сравнительно весьма слабыя желѣзныя скобы. а дѣйствіе растянутыхъ волоконъ было передано на желѣзные шпренгели, и коромысло продолжало работать такъ же, какъ и прежде.

е. Область растянутыхъ волоконъ раздѣлена отъ области сжатыхъ волоконъ **нейтральнымъ слоемъ,** *въ которомъ лежатъ волокна, не получившія при сгибаніи ни удлиненія, ни укороченія.*

Проф. падуанскаго университета, знаменитый математикъ, физикъ и астрономъ, *Галилео Галилей* въ теоріи сгибанія, предложенной имъ въ 1630 г, дѣлалъ допущеніе, что *всѣ продольныя волокна согнутаго бруса одинаково растянуты.* Положеніе это ни на чемъ не было основано, просто казалось ему естественнымъ; но опытъ опровергаетъ это положеніе. а потому и самая теорія его представляетъ интересъ только съ исторической точки зрѣнія, какъ курьезное заблужденіе ученаго, который въ другихъ случаяхъ всегда выставлялъ на видъ необходимость провѣрки теоретическихъ заключеній путемъ опыта.

Около 1680 г. французскій академикъ *Маріоттъ* и знаменитый, нѣмецкій математикъ *Лейбницъ* предложили другую теорію сгибанія, въ которой нейтральный слой также произвольно былъ предположенъ совпадающимъ съ крайними вогнутыми волокнами, и всѣ волокна, кромѣ лежащихъ въ нейтральномъ слоѣ, вытянутыми пропорціонально разстояніямъ ихъ отъ нейтральнаго слоя.

Вѣрное положеніе нейтральнаго слоя при сгибаніи было указано французскимъ академикомъ *Parent* въ 1713 г.

ж. Нейтральный слой проходитъ чрезъ центры тяжести всѣхъ поперечныхъ сѣченій балки.

Теоретическое доказательство этого положенія было дано въ 1821 году французскимъ академикомъ *Навье*, знаменитымъ профессоромъ механики въ Парижскихъ спеціальныхъ техническихъ школахъ, весьма много потрудившимся надъ созданіемъ теоріи упругости.

Подтвержденіе этого положенія съ помощію точныхъ, научно обставленныхъ опытовъ надъ деревянными и чугунными балками было сдѣлано въ 40-хъ годахъ французскимъ академикомъ *Мореномъ.*

2. **Опредѣленіе вытяжки и напряженія произвольно взятаго волокна согнутой балки.** Пусть ac и bd (фиг. 93) будутъ два безконечно близкихъ сѣченія согнутой балки, ab—волокно въ ея нейтральномъ слоѣ, mn—произвольное растянутое волокно, отстоящее отъ нейтральнаго слоя на длину $am = z$. Если обозначимъ радіусъ кривизны дуги ab чрезъ r, тогда можно написать:

$$\frac{mn}{ab} = \frac{r+z}{r}, \text{ или } \frac{mn - ab}{ab} = \frac{z}{r}.$$

Въ этомъ равенствѣ числитель 1-й части представляетъ удлиненіе, полученное волокномъ mn при сгибаніи, а знаменатель—первоначальную длину этого волокна, поэтому вся 1-я часть послѣдняго равенства бу-

детъ *вытяжкой,* или *относительнымъ удлиненіемъ* произвольнаго волокна. Назовемъ вытяжку чрезъ i, тогда:

$$i = z : r. \qquad \qquad 1.$$

Если бы разсматриваемое волокно было свободно, т. е. вытягивалось независимо отъ остальныхъ, тогда нормальное напряженіе его h можно было бы вычислить, умножая i на *коэффиціентъ упругости* E при растяженіи, на основаніи закона *Гука* *), т. е.

$$h = E . i. \qquad \qquad 2.$$

На самомъ же дѣлѣ волокна согнутаго тѣла не свободны, и постоянство коэф. упругости у всѣхъ волоконъ балки является допущеніемъ, которое можно сдѣлать безъ большой погрѣшности только въ случаѣ однородныхъ и мягкихъ матеріаловъ, каковы—мягкое желѣзо и мягкая сталь, по своимъ свойствамъ близко подходящая къ желѣзу.

Называя чрезъ dF—безконечно малую площадь поперечнаго сѣченія волокна, нормальную силу X_1, растягивающую волокно, напишемъ такъ:

$$X_1 = h . dF = E . \frac{z}{r} . dF \qquad \qquad 3.$$

Эти формулы, одинаково приложимыя къ растянутымъ и сжатымъ волокнамъ согнутой балки, показываютъ, что *чѣмъ далѣе отстоитъ взятое волокно отъ нейтральнаго слоя, тѣмъ большее сопротивленіе оказываетъ оно сгибанію балки,* или иначе, *вытяжка и нормальное напряженіе волокна прямо пропорціональны разстоянію его отъ нейтральнаго слоя.* Наиболѣе напряженными волокнами будутъ крайнія cd и $m_1 n_1$ (фиг. 93). Если разстояніе крайняго волокна отъ нейтральнаго слоя назовемъ

$$am_1 = e_1 \text{ и } ac = e_2$$

и соотвѣтственныя имъ напряженія—чрезъ H_1 и H_2, то

$$\frac{h}{z} = \frac{H_1}{e_1} = \frac{H_2}{e_2} = \frac{E}{r}. \qquad \qquad 4.$$

Если выражать линейные размѣры въ *мм.*, площади въ кв. *мм.*, нагрузки въ *кг.*, то h, H_1, H_2 и E будутъ выражены въ *кг.* на кв. *мм.*, X_1 — въ *кг.*, а i будетъ отвлеченное число.

3. **Условія равновѣсія внѣшней нагрузки и внутреннихъ силъ сопротивленія при сгибаніи.** Предполагаемъ, что нагрузка на балку сдѣлана въ вертикальной плоскости нормально къ оси балки, и что эта

---

*) Высказанная имъ въ 1678 г. гипотетическая формула—„*вытяжка пропорціональна напряженію*"—на простѣйшихъ деформаціяхъ тѣлъ провѣрена опытнымъ путемъ и легла въ основу всей теоріи упругости, какъ опытный законъ. Названіе коэф. упругости отношенію h къ i дано было въ 1807 г. профессоромъ *Юнгомъ*; имъ же было разъяснено и практическое значеніе этой величины.

плоскость въ то же время является дѣлящею каждое поперечное сѣченіе балки на двѣ симметричныя части. Когда произойдетъ сгибаніе балки, т. е. установится равновѣсіе между внутренними силами и внѣшней нагрузкой, представимъ себѣ балку по произвольному сѣченію AC (фиг. 94) какъ бы разсѣченною на двѣ части, правую и лѣвую; замѣнивъ дѣйствіе лѣвой части на правую внутренними силами, разсмотримъ условія равновѣсія правой части. При этомъ мы предполагаемъ, что воображаемое нами раздѣленіе балки на двѣ части не нарушаетъ равновѣсія балки, а ст. б. и отдѣльныхъ частей ея.

При составленіи условій равновѣсія оси координатъ выбираемъ так. обр.: начало координатъ o беремъ въ центрѣ тяжести сѣченія AC, ось ox направляемъ по оси бруса, нормально къ сѣченію AC; плоскость xoz, въ которой приложена внѣшняя нагрузка, совмѣщаемъ съ плоскостью симметріи тѣла, если таковыхъ плоскостей—одна; тогда ось oy будетъ лежать въ нейтральномъ слоѣ.

Допуская, что выпуклая часть балки находится ниже нейтральнаго слоя xoy, а вогнутая—выше него, мы должны будемъ къ сѣченію AC ниже оси oy приложить нормальныя силы растяженія, а выше ея — нормальныя силы сжатія, съ которыми воздѣйствовала отнятая (лѣвая) часть на оставшуюся (правую), и затѣмъ приложить къ правой части всѣ 6 условій равновѣсія твердаго тѣла:

$$\begin{array}{l|l} \Sigma\, X = 0 & \Sigma\,(X.y - Y.x) = 0 \\ \Sigma\, Y = 0 & \Sigma\,(Y.z - Z.y) = 0 \\ \Sigma\, Z = 0 & \Sigma\,(Z.x - X.z) = 0 \end{array}$$

1-е условіе равновѣсія. Внѣшняя нагрузка на ось ox проекціи не даетъ, а потому необходимо, чтобы алгебраическая сумма проекцій всѣхъ внутреннихъ силъ на ось ox была равна нулю. Это послѣднее условіе равносильно тому, что *сумма силъ растяженія въ данномъ сѣченіи должна равняться суммѣ силъ сжатія.* Необходимость этого положенія была указана еще академикомъ *Parent* въ 1713 г. Если сумма силъ растяженія будетъ X', а силъ сжатія—X'', тогда это условіе требуетъ существованія равенства:

$$X' = X'' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{5}$$

Пользуясь формулой **3**, это равенство можно представить такъ:

$$\Sigma\, X_1 = \frac{E}{r} \cdot \Sigma\, z.dF = 0. \qquad \ldots\ldots\ldots \mathbf{6}.$$

Оно представляетъ собою тождество, п. ч. 2-й множитель, какъ статическій моментъ площади поперечнаго сѣченія балки, взятый относительно оси oy, проходящей чрезъ центръ тяжести площади, всегда равенъ нулю.

2-е условіе равновѣсія удовлетворяется само собою, потому что внутреннія и внѣшнія силы проекцій на ось oy не даютъ.

Проекціи всѣхъ внутреннихъ силъ на оси координатъ будемъ называть чрезъ X_1, Y_1, Z_1, а проекціи всѣхъ внѣшнихъ силъ — X_2, Y_2, Z_2.

3-е условіе равновѣсія будетъ:

$$\Sigma Z_1 + \Sigma Z_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{7.}$$

Но такъ какъ алгебраическая сумма проекцій внѣшнихъ силъ на ось *oz* не равна нулю, поэтому равенство **7** требуетъ существованія въ поперечномъ сѣченіи *AC* внутреннихъ тангенціальныхъ силъ, уравновѣшивающихъ собою дѣйствіе внѣшнихъ силъ.

Алгебраическую сумму проекцій на ось *oz* для внѣшней нагрузки, расположенной по одну сторону отъ произвольно взятаго сѣченія называемъ для краткости *сѣкущимъ усиліемъ* или *силой сдвига* для даннаго сѣченія. Такъ какъ сѣкущее усиліе ΣZ_2 приложено къ балкѣ въ плоскости симметріи ея, поэтому нужно допустить, что и внутреннія тангенціальныя силы ΣZ_1 распредѣлены симметрично по всей площади сѣченія *AC* (фиг. 94).

4-е условіе равновѣсія удовлетворяется само собою. Выраженіе алгебраической суммы моментовъ $\Sigma X_1 . y$ обращается въ нуль, вслѣдствіе симметріи сѣченія *AC* относительно оси *oz*; благодаря этому, вся эта алгебраическая сумма будетъ состоять изъ слагаемыхъ, которыя попарно будутъ одинаковы по величинѣ, но съ разными знаками у плечъ *y*. Выраженія $\Sigma X_2 . y$, $\Sigma Y_1 . x$ и $\Sigma Y_2 . x$ порознь обращаются въ нуль, потому что X_2, Y_2 и Y_1 равны нулю.

5-е условіе равновѣсія также удовлетворяется само собою, потому что силы Y_1 и Y_2 равны нулю, плечи *y* для силъ Z_2 равны нулю, а силы Z_1 даютъ относительно оси *ox* моменты, равные по величинѣ, но противоположные по знаку.

6-е условіе равновѣсія. $\Sigma Z_1 . x = 0$, потому что силы Z_1 лежатъ въ плоскости *yoz*, и плечи ихъ относительно оси *oy* равны нулю. Алгебраическая сумма моментовъ относительно оси *oy* для внѣшнихъ силъ, расположенныхъ по одну сторону разсматриваемаго сѣченія, называется *сгибающимъ моментомъ* въ данномъ сѣченіи. Называемъ его чрезъ *M*.

Тогда

$$M = \Sigma Z_2 . x$$

$\Sigma X_2 . z$ есть нуль, ибо всѣ $X_2 = 0$. Для составленія $\Sigma X_1 . z$ пользуемся равенствомъ **3**, и тогда 6-е условіе равновѣсія представится въ такомъ видѣ:

$$M - \frac{E}{r} . \Sigma z^2 . dF = 0.$$

Если написать

$$\Sigma z^2 . dF = I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{8,}$$

тогда получаемъ:

$$M = \frac{E . I}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{9.}$$

Величина I представляетъ собою алгебраическую сумму произведенiй изъ всѣхъ элементовъ площади на квадраты ихъ разстоянiй отъ оси oy и называется *экваторiальнымъ моментомъ инерцiи* площади сѣченiя относительно оси oy. Эта ось oy называется *осью инерцiи* поперечнаго сѣченiя балки. Какъ видно изъ предыдущаго, *ось инерцiи сѣченiя лежитъ въ нейтральномъ слоѣ балки*, другими словами, *ось инерцiи произвольнаго поперечнаго сѣченiя согнутой балки надо проводить чрезъ центръ тяжести сѣченiя перпендикулярно къ направленiю сгибающихъ внѣшнихъ силъ.*

Такъ какъ въ теорiи сгибанiя приходится имѣть дѣло все время съ однимъ только экваторiальнымъ моментомъ инерцiи и никогда — съ полярнымъ, поэтому во всемъ дальнѣйшемъ изложенiи величину I мы будемъ называть просто *моментомъ инерцiи* безъ всякаго наименованiя

Послѣ этого равенство **9** слѣдуетъ читать такъ: *въ произвольномъ сѣченiи согнутой балки сгибающiй моментъ равенъ произведенiю коэффицiента упругости матерiала на моментъ инерцiи сѣченiя, раздѣленному на радiусъ кривизны въ данномъ сѣченiи.*

Выводъ условiй равновѣсiя согнутой балки на основанiи шести ур-iй статики былъ предложенъ въ 1773 г. знаменитымъ французскимъ ученымъ *Куломбомъ*, которымъ разработано также и нѣсколько другихъ отдѣловъ теорiи упругости.

4. **Разсчетное ур-iе сгибаемой балки.** Равновѣсiе внутреннихъ и внѣшнихъ силъ при сгибанiи балки требуетъ существованiя р-въ **7** и **9**. Разсмотрѣнiю р-ва **7**, т. е зависимости между нагрузкой и внутренними тангенцiальными силами, будетъ посвящена впослѣдствiи особая глава, здѣсь же пока мы обратимъ главное вниманiе только на крѣпость растянутыхъ и сжатыхъ волоконъ бруса.

Посредствомъ ф-лы **4** можно ввести въ ф-лу **9** напряженiя наиболѣе растянутыхъ и наиболѣе сжатыхъ волоконъ, написавши, что

$$M = \frac{H_1}{e_1} \cdot I = \frac{H_2}{e_2} \cdot I \quad \dots \dots \quad \mathbf{9,a}$$

Если вмѣсто H_1 и H_2 будутъ внесены въ это ур-iе *допускаемыя напряженiя материала* при сгибанiи, тогда мы получимъ разсчетныя ур-iя для растянутой и сжатой части согнутаго бруса.

Безопасное напряженiе для крайнихъ растянутыхъ волоконъ

$$B_1 = \text{или болѣе} \frac{M \cdot e_1}{I} \quad \dots \dots \dots \quad \mathbf{10,}$$

а для крайнихъ сжатыхъ волоконъ

$$B_2 = \text{или болѣе} \frac{M \cdot e_2}{I} \quad \dots \dots \dots \quad \mathbf{11.}$$

Безопасная величина сгибающаго момента, которую можетъ воспринять растянутая часть балки, будетъ

$$M_1 = \text{или менѣе} \frac{B_1}{e_1} \cdot I \quad \dots \dots \quad \mathbf{10,a,}$$

а сжатая

$$M_{,} = \text{или менѣе } \frac{B_2}{e_2}\ I \ldots\ldots \quad \mathbf{11{,}a}$$

Наименьшая изъ этихъ двухъ величинъ моментовъ и будетъ та, которую можно безопасно передать на данную балку. Какъ видно, эта наименьшая величина момента зависитъ отъ формы поперечнаго сѣченія балки (т. е. отъ разстояній e_1 и e_2) и отъ величины допускаемыхъ напряженій матеріала.

Если поперечное сѣченіе балки имѣетъ не одну, а двѣ оси симметріи, изъ коихъ одна лежитъ въ плоскости сгибанія, а другая въ нейтральномъ слоѣ, тогда разстоянія крайнихъ, наиболѣе растянутыхъ и наиболѣе сжатыхъ волоконъ отъ нейтральнаго слоя будутъ одинаковы, т. е.

$$e_1 = e_2 = e, \text{ поэтому } H_1 = H_2 = H,$$

и вмѣсто ур-ія **9,а** получимъ слѣдующее

$$M = \frac{H}{e} \cdot I \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{9{,}в.}$$

Обозначимъ

$$\frac{I}{e} = W \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{12}$$

и будемъ называть это отношеніе *модулемъ сопротивленія сѣченія балки*. Слѣд., *модуль сопротивленія сѣченія балки съ двумя осями симметріи есть отношеніе момента инерціи сѣченія ея относительно нейтральнаго слоя къ полувысотѣ балки.*

Разсчетное ур-іе балки съ двумя осями симметріи въ ея сѣченіи можно писать въ такомъ видѣ:

Безопасное напряженіе матеріала

$$B = \text{или болѣе } \frac{M}{W} \ldots\ldots \quad \mathbf{13,}$$

безопасная величина сгибающаго момента

$$M = \text{или менѣе } B \,.\, W \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{13{,}a}$$

безопасная (наименьшая возможная) *величина модуля* сопротивленія сѣченія

$$W = \text{или болѣе } \frac{M}{B} \ldots\ldots \quad \mathbf{13{,}б.}$$

Эти ф-лы совершенно аналогичны съ тѣми, которыя имѣли въ теоріи крученія, съ тою лишь разницею, что здѣсь модуль сопротивленія сѣченія вычисляется по экваторіальному моменту инерціи, а не полярному. Другая существенная разница заключается въ томъ, что ф-лы **13** должны быть примѣняемы къ такому сѣченію балки, въ которомъ выраженіе сгибающаго момента имѣетъ наибольшее значеніе по абсолютной величинѣ.

Такое сѣченіе балки называютъ *опаснымъ* или *разсчетнымъ*, а выраженіе сгибающаго момента въ этомъ сѣченіи называютъ *разсчетнымъ моментомъ* балки.

Чтобы имѣть возможность производить разсчеты балокъ на сгибаніе, надо знать для нихъ величины модулей W, надо выяснить, гдѣ находится опасное сѣченіе балки, и какова величина разсчетнаго сгибающаго момента.

Б. Модули сопротивленія поперечнаго сѣченія при сгибаніи балки.

5. **Модуль сопротивленія прямоугольнаго сѣченія.** Стороны прямоугольника — a и h (фиг. 95), ось инерціи yy параллельна сторонѣ a.

Найдемъ сначала моментъ инерціи I_1 прямоугольника $ymny$, у котораго высота $e = 0,5 \, . \, h$. Элементъ площади выдѣлимъ въ видѣ прямоугольника съ основаніемъ a и безконечно малой высотой dz; разстояніе центра тяжести его площади отъ оси yy пусть будетъ z. Тогда $dF = a \, . \, dz$, и по **8** получимъ:

$$I_1 = \int_0^e a \, . \, z^2 \, . \, dz = \frac{a \, . \, e^3}{3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{14},$$

т. е. *моментъ инерціи площади прямоугольника относительно одной изъ сторонъ его = одной трети произведенія 1-й степени этой стороны на кубъ другой стороны.*

Если I будетъ моментъ инерціи всей площади прямоугольника mp относительно нейтральной линіи yy, то по смыслу вопроса

$$I = 2I_1 = \frac{2a \, . \, e^3}{3} = \frac{a \, . \, h^3}{12} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{15},$$

т. е. *моментъ инерціи площади прямоугольника относительно нейтральной линіи = одной двѣнадцатой произведенія 1-й степени той стороны, которая параллельна нейтральной линіи, на кубъ другой стороны.*

Модуль сопротивленія по **12** будетъ:

$$W = \frac{a \, . \, h^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{a \, . \, h^2}{6} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{16},$$

т. е. *модуль сопротивленія при сгибаніи балки прямоугольнаго сѣченія = одной шестой произведенія 1-й степени той стороны, которая параллельна нейтральной линіи, на квадратъ другой стороны.* Изъ этого видно, что прямоугольныя балки выгодно при сгибаніи ставить „*на ребро*“, т. е. плоскость сгибанія дѣлать параллельной большему изъ двухъ размѣровъ сѣченія. Если бы положить балку „плашмя“, или повернуть сѣченіе ея на 90^0, тогда модуль сопротивленія балки былъ бы

$$W_1 = \frac{h \, . \, a^2}{6}; \quad \frac{W}{W_1} = \frac{h}{a},$$

т. е. *модули сопротивленія одной и той же балки, поставленной на*

ребро и положенной плашмя, относятся между собою, какъ большая сторона сѣченія къ малой. Въ такомъ же отношеніи между собою будутъ находиться и наибольшіе сгибающіе моменты, которые безопасно будетъ выносить на себѣ каждая изъ балокъ. На этомъ основаніи въ практикѣ, гдѣ только возможно, стараются нагрузить прямоугольную балку въ плоскости, параллельной большей изъ ея сторонъ.

Если бы требовалось построить балку съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, сопротивляемость котораго, при данномъ расположеніи сѣченія относительно направленія дѣйствія нагрузки, зависѣла бы въ одинаковой степени отъ каждой изъ сторонъ сѣченія, тогда, какъ видно по **13,a**, нужно разсчетный моментъ сдѣлать прямо пропорціональнымъ высотѣ балки. Такой примѣръ въ практикѣ имѣемъ при опредѣленіи прочныхъ размѣровъ зубьевъ у зубчатыхъ колесъ.

6. **Модуль сопротивлеиія сѣченій, производимыхъ изъ прямоугольнаго.** *а) Полая или пустотѣлая балка* прямоугольнаго сѣченія имѣетъ въ разрѣзѣ видъ, указанный на фиг. 96, гдѣ A—внѣшняя ширина сѣченія, A_1—внутренняя, H—внѣшняя высота, H_1—внутренняя, yy—нейтральный слой. Моментъ инерціи такого сѣченія напишется въ видѣ разности моментовъ инерціи внѣшняго и внутренняго очертанія, и разстояніе крайнихъ точекъ сѣченія отъ нейтральной линіи $e = 0,5H$, поэтому

$$W = \frac{A.H^3 - A_1.H_1^3}{6.H} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{17.}$$

б) *Двутавровая балка* съ двумя осями симметріи имѣетъ сѣченіе, показанное на фиг. 97: A — ширина *полки* или *подошвы*, t—ея толщина, H — высота всей балки, d—толщина ея вертикальной *стѣнки*, yy—нейтральная линія. Модуль сопротивленія этой балки изобразится той же формулой **17**, если въ ней замѣнить A_1 чрезъ $(A - d)$ и H_1 чрезъ $H - 2t$. Пользуясь тою же формулою **17** можно написать сразу также и модуль сопротивленія балки съ крестообразнымъ сѣченіемъ, имѣющимъ двѣ оси симметріи.

7. **Модуль сопротивленія чечевицеобразнаго сѣченія**, очерченнаго дугами круга (фиг. 98). Такая форма сѣченія является весьма цѣлесообразною для спицъ маховиковъ, передающихъ работу на пріемный валъ посредствомъ ремня или каната при весьма большой скорости послѣднихъ, нерѣдко превышающей 30 *mt.* (около 100 фут.) въ сек. Спицы съ такимъ сѣченіемъ отлично разсѣкаютъ воздухъ, а для облегченія ихъ дѣлаютъ полыми съ круглымъ очертаніемъ полости.

Пусть дуга mn будетъ описана изъ центра o радіусомъ r, полувысота сѣченія $o_1n = b$ и полуширина его $o_1m = a$. Нейтральной линіей сѣченія будетъ ось om, если on располагается въ плоскости вращенія маховика.

Мы вычислимъ моментъ инерціи I_1 площади mo_1n, т. е. $\frac{1}{4}$ чечевицеобразнаго сѣченія. Для этого выберемъ элементъ площади въ видѣ прямоугольника съ высотою z и безконечно-малою шириною dy, отстоящій отъ центра o на разстояніи y (фиг. 98). Моментъ инерціи этого элемента площади относительно оси om будетъ $\frac{1}{3} . dy . z^3$. Если взять сумму подобныхъ элементарныхъ моментовъ инерціи, измѣняя z отъ нуля до b, а y—отъ r до $c = 00_1$ соотвѣтственно, тогда мы получимъ I_1, т. е.

$$I_1 = \frac{1}{3}\int_c^r z^3 . dy.$$

Зависимость между координатами y и z въ кругѣ выражается такъ:

$$y = \sqrt{r^2 - z^2};\quad dy = \frac{-z . dz}{\sqrt{r^2 - z^2}},$$

$$I_1 = +\frac{1}{3}\int_0^b \frac{z^4 . dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

Введемъ новое перемѣнное α, подъ условіемъ

$$z = r . Sn\alpha,$$

измѣняющееся въ предѣлахъ отъ нуля до φ при измѣненіи z отъ нуля до b. Тогда

$$z^4 = r^4 . Sn^4\alpha;\qquad dz = r . Cs\alpha . d\alpha$$

$$\sqrt{r^2 - z^2} = r . Cs\alpha$$

$$I_1 = +\frac{r^4}{3}\int_0^\varphi Sn^4\alpha . d\alpha \quad . . . . A$$

$$-\int Sn^4\alpha . d\alpha = T = \int Sn^3\alpha . dCs\alpha$$

$$T = Sn^3\alpha . Cs\alpha - \int Cs\alpha . 3\, Sn^2\alpha . Cs\alpha . d\alpha =$$

$$= Sn^3\alpha . Cs\alpha - \int (1 - Sn^2\alpha) . 3\, Sn^2\alpha . d\alpha =$$

$$= Sn^3\alpha . Cs\alpha - 3\int Sn^2\alpha . d\alpha + 3\int Sn^4\alpha . d\alpha;$$

$$4\, T = Sn^3\alpha . Cs\alpha - 3 . \int \frac{1 - Cs\, 2\alpha}{2} . d\alpha$$

$$T=\frac{Sn^3\alpha\ \ Cs\alpha}{4}-\frac{3}{8}\left(\alpha-\frac{Sn2\alpha}{2}\right). \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{B}.$$

Полученное выраженіе вносимъ въ формулу **А** и вставляемъ оба предѣла:

$$I_1=\frac{r^4}{3.8}\left[-2Sn^3\varphi\ \ Cs\varphi+3\varphi-3Sn\varphi.Cs\varphi\right]. \quad \ldots \quad \mathbf{18}.$$

Въ этой формулѣ

$$Sn\varphi=\frac{b}{r};\ Cs\varphi=\sqrt{1-\frac{b^2}{r^2}}.$$

Для полученія момента инерціи площади всего чечевице-образнаго сѣченія I нужно написать

$$I=4I_1.$$

Модуль сопротивленія этого сѣченія получится такъ:

$$W=\frac{I}{e}=\frac{4I_1}{b}.$$

8. **Модуль сопротивленія круглаго сѣченія.** Круглое сѣченіе можно получить преобразованіемъ чечевицеобразнаго, если допустить въ частномъ случаѣ, что

$$b=r,\ \text{тогда}\ \varphi=\frac{\pi}{2}\ldots.Cs\varphi=0.$$

Называя діаметръ круглаго сѣченія чрезъ d, изъ **18** получимъ:

$$I_1=\frac{\pi.r^4}{16},\ \text{откуда}$$

$$\left.\begin{aligned}I&=\frac{\pi.r^4}{4}=\frac{\pi.d^4}{64}\\ W&=\frac{\pi.d^3}{32}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{19},$$

т. е. *модуль сопротивленія балки съ круглымъ сѣченіемъ = произведенію площади сѣченія на восьмую долю діаметра его.*

Если брусъ будетъ полый съ наружнымъ діам. d_1 и внутреннимъ d_0, тогда модуль сопротивленія, очевидно, будетъ имѣть слѣдующее выраженіе:

$$W_1=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{d_1^4-d_0^4}{d_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{20}.$$

9. **Модуль сопротивленія эллиптическаго сѣченія** (фиг. 99). Полуоси его $om=a$ и $on=b$, нейтральная линія — om, ур-іе вѣтви mn —

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\ \text{откуда}$$

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-y^2).$$

Опредѣляя моментъ инерціи площади отрѣзка *mon*, мы можемъ написать

$$I_1 = \frac{1}{3}\int_0^a z^3 . dy = \frac{b^3}{3a^3}\int_0^a \sqrt{(a^2 - y^2)^3} . dy$$

Введемъ сюда новое перемѣнное β подъ условіемъ:

$$y = a . Cs\beta; \quad a^2 - y^2 = a^2 . Sn^2\beta,$$

$$dy = -a . Sn\beta . d\beta;$$

когда $y = 0 \ldots\ldots \beta = \frac{\pi}{2}$

„ $y = a \ldots\ldots \beta = 0$

$$I_1 = \frac{a . b^3}{3} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sn^4\beta . d\beta.$$

Интегралъ этого вида былъ полученъ нами въ § 7. Результатъ былъ отмѣченъ буквою **B**. Внося въ это выраженіе предѣлы, получимъ

$$\left. \begin{aligned} I = 4I_1 = \frac{\pi . a . b^3}{4} \\ W = \frac{\pi . a . b^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{21},$$

т. е. *модуль сопротивленія балки съ эллиптическимъ сѣченіемъ = произведенію площади сѣченія на восьмую долю высоты сѣченія.*

То же самое выраженіе I для эллипса съ полуосями b и a можетъ быть выведено и другимъ путемъ, пользуясь соотношеніемъ между ординатою эллипса и ординатою круга, вписаннаго въ эллипсъ.

Опишемъ изъ центра O (фиг. 100) двѣ окружности, одну радіусомъ $On = b$, а другую — радіусомъ $Om = a$ Проведемъ произвольный радіусъ векторъ OAB. Если $AC \parallel On$ и $BC \parallel Om$, тогда точка C принадлежитъ эллипсу, построенному на полуосяхъ a и b.

При линіи BC выдѣлимъ прямоугольный элементъ площади съ шириною dy и высотою $DC = z$ въ эллипсѣ и $AD = z_1$ въ кругѣ радіуса a. Моментъ инерціи $\frac{1}{4}$ площади эллипса, т. е. площади $mCnO$ будетъ

$$I_1 = \int_0^a \frac{z^3 . dy}{3}.$$

Изъ чертежа (фиг. 100) имѣемъ:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{OB}{OA}, \text{ или}$$

$$\frac{z}{z_1} = \frac{b}{a}, \text{ откуда } z = z_1 . \frac{b}{a},$$

$$I_1 = \frac{b^3}{a^3}\int_0^a \frac{z_1^3 \, . \, dy}{3} = \frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{\pi \quad a^4}{16} = \frac{\pi \, . \, a \, . \, b^3}{16},$$

такъ какъ интегралъ, входящій въ послѣднее выраженіе, есть моментъ инерціи четверти площади круга, описаннаго радіусомъ a.

В. Разсчетные сгибающіе моменты и стрѣлы прогиба призматическихъ балокъ.

10. **Сгибающій моментъ.** Алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ силъ, расположенныхъ по одну сторону отъ разсматриваемаго сѣченія согнутой балки, наз. *сгибающимъ моментомъ* въ данномъ сѣченіи. Величина момента получится, очевидно, всегда одна и та же, брать ли моментъ всѣхъ погрузокъ, расположенныхъ справа отъ даннаго сѣченія, или же слѣва: мы разсматриваемъ балку послѣ того, какъ установилось равновѣсіе внѣшней погрузки и внутреннихъ силъ сопротивленія, когда, слѣдовательно, за центръ моментовъ можетъ быть принятъ центръ тяжести произвольнаго сѣченія балки, и алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ внѣшнихъ нагрузокъ относительно этого центра должна быть = нулю. Поэтому сгибающій моментъ пишутъ для нагрузокъ, расположенныхъ или справа или слѣва отъ даннаго сѣченія, и часто отдаютъ предпочтеніе тому изъ этихъ выраженій, которое имѣетъ болѣе простой внѣшній видъ.

Пусть точка приложенія нагрузки P_1, сосредоточенной въ одномъ сѣченіи, находится отъ конца балки A (фиг 101) на разстояніи l_1, а произвольное сѣченіе N балки—на разстояніи x, тогда моментъ силы P_1 относительно центра тяжести (сокращенно—ц. т.) сѣченія N напишется весьма просто, умножая силу на ея плечо, т. е. сгибающій моментъ въ сѣченіи N будетъ $P_1(x - l_1)$.

Посмотримъ теперь, какъ слѣдуетъ писать *выраженіе сгибающаго момента отъ равномѣрной нагрузки*, которую на всемъ протяженіи AN можно представлять себѣ въ видѣ вѣсомаго слоя одинаковой ширины и высоты. Нагрузка, приходящаяся на линейную единицу длины балки (1 мм), пусть будетъ p. Возьмемъ на разстояніи y отъ сѣченія N безконечно-тонкій элементъ этой нагрузки шириною dy; на этой ширинѣ будетъ распредѣлена нагрузка $p \, . \, dy$, которую можно принимать за сосредоточенный грузъ и писать для него моментъ относительно ц. т. сѣченія N въ видѣ $p \, . \, y \, . \, dy$; тогда для всей нагрузки, распредѣленной на длинѣ x, сгибающій моментъ можно разсматривать, какъ алгебраическую сумму предыдущихъ выраженій, распространяя суммированіе по y въ предѣлахъ отъ нуля до x. Результатъ вычисленія, очевидно, будетъ $0{,}5 \, . \, p \, . \, x^2$. Его можно разсматривать, какъ произведеніе $p \, . \, x$ на $0{,}5 \, . \, x$; но $p \, . \, x$ есть вся равномѣрная нагрузка, распредѣленная на длинѣ

x, а 0,5 . x есть разстояніе ц. т. ея отъ ц. т. сѣченія N, слѣдовательно, *когда нужно писать моментъ равномѣрной нагрузки относительно ц. т. даннаго сѣченія, тогда нагрузку нужно представлять себѣ какъ бы сосредоченной въ ц. т. ея и писать для нея моментъ на общихъ основаніяхъ, какъ для сосредоточеннаго груза.* Поэтому, если на длинѣ $mn = c - b$ (фиг. 101) будетъ равномѣрно распредѣлена такая нагрузка, у которой на единицу длины приходится q килограм., то вся нагрузка будетъ $q \cdot (c - b)$, а моментъ ея относительно ц. т. сѣченія N надо писать такъ:

$$q \cdot (c - b) \cdot \left(x - \frac{b + c}{2}\right).$$

Если теперь представимъ себѣ, что на балку справа отъ сѣченія N дѣйствуютъ сосредоточенные грузы P_1, P_2... и равномѣрныя нагрузки, изъ коихъ одна распредѣлена равномѣрно только на длинѣ mn, а другая—на всемъ протяженіи бруса, тогда сгибающій моментъ для сѣченія N отъ всѣхъ нагрузокъ, расположенныхъ отъ него справа, надо писать такъ:

$$M = P_1(x - l_1) - P_2(x - l_2) + q \cdot (c - b) \cdot \left(x - \frac{b + c}{2}\right) + \frac{p \cdot x^2}{2} \dots \mathbf{22}.$$

Если считать x за абсциссы, а M за ординаты, то ур-іе **22** будетъ представлять собою уравненіе нѣкоторой кривой линіи; ее называютъ *кривою моментовъ.*

Если $p = 0$, тогда кривая моментовъ обращается въ прямую линію, аналитическое выраженіе момента не имѣетъ тогда ни *max*, ни *min*, а сама функція съ увеличеніемъ x или все возрастаетъ, или все убываетъ. Наибольшій сгибающій моментъ будетъ въ этомъ случаѣ имѣть мѣсто для одного изъ сѣченій, въ которомъ сосредоточена внѣшняя нагрузка.

Если же p не равно нулю, тогда кривая моментовъ при данномъ сѣченіи будетъ всегда параболой, независимо отъ того, нагружена ли балка еще и сосредоточенными грузами, или же нѣтъ.

11. **Сѣкущее усиліе.** Если мы возьмемъ 1-ю производную отъ момента M (см. ур-іе 22) по абсциссѣ x, то получимъ:

$$\frac{dM}{dx} = P_1 - P_2 + q \cdot (c - b) + p \cdot x \dots\dots \mathbf{23}.$$

Вторая часть этого послѣдняго равенства представляетъ собою алгебраическую сумму проекцій на ось oz (фиг. 94) всѣхъ нагрузокъ, приложенныхъ къ балкѣ справа отъ сѣченія N на фиг. 101. Въ § 3 (при разсмотрѣніи 3-го условія равновѣсія) такую алг. сумму мы назвали *сѣкущимъ усиліемъ* или *силою сдвига* для даннаго сѣченія. Так. обр. мы видимъ, что *сѣкущее усиліе аналитически представляетъ собою 1-ю производную отъ сгибающаго момента по абсциссѣ сѣченія.*

Если назовемъ сѣкущее усиліе чрезъ V, то

$$V = \frac{dM}{dx} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{24.}$$

Равенство это было доказано инженеромъ *Шведлеромъ* и часто зовется его именемъ.

Уравненіе

$$V = P_1 - P_2 + q(b - c) + p.x$$

выражаетъ зависимость между V и x. Оно представляетъ собою всегда прямую линію, которая можетъ быть названа *прямой сѣкущихъ усилій*.

Если $p = 0$, т. е. равномѣрная нагрузка при данномъ сѣченіи на балкѣ отсутствуетъ, тогда V не зависитъ отъ x, т. е. прямая сѣкущихъ усилій будетъ параллельна оси бруса.

Если же p не равно нулю, тогда прямая сѣкущихъ усилій будетъ наклонна къ оси бруса. Въ этомъ случаѣ прямая сѣкущихъ усилій должна пересѣкать ось бруса при такомъ значеніи x, которое соотвѣтвѣтствуетъ аналитическому *max* или *min* сгибающаго момента (на основ. формулы 24).

12. **Дифференціальное ур-іе упругой линіи.** Кривая, въ которую обращается ось балки послѣ изгиба ея внѣшней нагрузкой, наз. *упругой линіей*. Наибольшая ордината упругой линіи при данномъ способѣ нагруженія наз. *стрѣлой прогиба* или *провѣсомъ* балки. Радіусъ кривизны r упругой линіи въ данномъ сѣченіи бруса, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, обратно пропорціоналенъ сгибающему моменту (см. формулу 9).

Съ другой стороны, если x и z будутъ координаты произвольной точки упругой линіи, то

$$r = \pm \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2z}{dx^2}.$$

При весьма маломъ прогибѣ балки, который мы все время имѣемъ въ виду, выраженіе $\frac{dz}{dx}$, представляющее собою tg угла наклоненія касательной къ упругой линіи съ осью абсциссъ (осью бруса), будетъ весьма малой величиной, и квадратомъ ея, который приходится складывать съ единицей, безъ большой погрѣшности можно пренебречь *); тогда, по совокупности съ ур-іемъ **9**, можно будетъ написать:

$$\pm \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{r} = \frac{M}{E.I}.$$

---

*) Это допущеніе аналитически будетъ выражать собою то, что мы не дѣлаемъ разницы между дѣйствительною длиною дуги ds упругой линіи и проекціей dx этой дуги на ось бруса, т е мы допускаемъ, что плечо нагрузки относительно ц т даннаго сѣченія до прогиба и послѣ прогиба балки одно и то же.

Это ур-іе наз. *дифференціальнымъ ур-іемъ упругой линіи*. Интегрируя его 2 раза, мы получимъ ур-іе упругой линіи въ обычномъ его видѣ, какъ аналитическую зависимость между z и x. Обозначимъ для краткости

$$E.I = A \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{25.}$$

Тогда въ болѣе общемъ видѣ дифференціальное ур-іе упругой линіи можно писать такъ:

$$\pm A.\frac{d^2z}{dx^2} = \pm M \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{26.}$$

13. **Выборъ знаковъ въ дифференціальномъ ур-іи упругой линіи** дѣлается такимъ образомъ, чтобы знакъ у ординаты z, полученный изъ ур-ія упругой линіи, былъ одинаковъ съ тѣмъ знакомъ, который слѣдуетъ приписать ординатѣ z согласно выбранному расположенію осей координатъ. Оба эти знака будутъ совершенно согласны, если соблюдать слѣдующія правила:

1) знакъ у 1-й части ур-ія 26 нужно поставить въ зависимость отъ знака у радіуса кривизны, который считается за $(+r)$, если направленіе радіуса кривизны, проведенное отъ точки на кривой до центра кривизны, идетъ въ сторону положительной оси ординатъ, и наоборотъ;

2) знакъ у 2-й части ур-ія 26 нужно поставить въ зависимость отъ способа воздѣйствія сгибающаго момента на данное сѣченіе балки, считая за $(+M)$ тотъ моментъ, который стремится *согнуть* балку, а за $(-M)$ такой моментъ, который стремится *разогнуть* балку въ разсматриваемомъ сѣченіи.

При соблюденіи этихъ правилъ разногласія вычисленія съ чертежемъ получаться не будетъ.

14. **Интегральное ур-іе упругой линіи** получится, если объинтегрируемъ ур-іе 26-е два раза. Пусть OC (фиг. 102) будетъ часть упругой линіи, отнесенной къ осямъ координатъ xOz. Предположимъ, что на упругой линіи существуетъ такая точка C, обѣ координаты которой намъ извѣстны и равны a и h, т. е.

$$\text{при} \quad x = a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; z = h.$$

Возьмемъ у балки произвольное сѣченіе N на разстояніи x отъ начала координатъ и на разстояніи y отъ точки C. Сгибающій моментъ въ этомъ сѣченіи пусть будетъ M. Не обращая вниманія на знаки въ ур-іи 26, интегрируемъ его въ предѣлахъ отъ нуля до x, имѣя въ виду, что по фиг. 102

$$\text{при} \;\; x = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{dz}{dx} = tg\,\alpha$$

$$A\left(\frac{dz}{dx} - tg\,\alpha\right) = \int_0^x M.dx$$

Интегрируемъ это послѣднее ур-іе еще разъ между тѣми же предѣлами, замѣчая, что при $x = 0$ и $z = 0$, поэтому

$$A(z - x \cdot tg\alpha) = \int_0^x dx \int_0^x M dx = K.$$

Для нахожденія этого двойного интегралла пользуемся извѣстной формулой:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Въ нашемъ случаѣ надо положить

$$dv = dx; \quad v = x,$$

$$u = \int_0^x M \cdot dx; \quad du = M \cdot dx,$$

тогда получимъ

$$K = x \cdot \int_0^x M \cdot dx - \int_0^x x \cdot M \cdot dx.$$

Если полученное нами выраженіе мы отнесемъ къ точкѣ C, тогда нужно внести въ него h вмѣсто z, a — вмѣсто x. Одновременно съ этимъ введемъ новое значеніе абсциссы, а именно y вмѣсто x подъ условіемъ:

$$y + x = a; \quad dx = -dy,$$

при $\quad x = 0 \ldots \quad y = a,$

„ $\quad x = a \ldots \quad y = 0$, тогда

$$A \cdot (h - a \cdot tg\alpha) = -a \cdot \int_a^0 M \cdot dy + \int_a^0 M(a - y) dy,$$

или

$$\pm A \cdot (h - a \cdot tg\alpha) = \int_0^a M \cdot y \cdot dy \; . \; . \; . \; . \; . \qquad .27.$$

Это и есть искомое интегральное ур-іе упругой линіи. Въ немъ h и a — координаты произвольной точки на кривой. Въ 1-й части равенства нужно брать передъ A знакъ или плюсъ, или минусъ, смотря по тому, какое значеніе имѣетъ ордината h по чертежу. Знаки у момента вписываются *по 2-му правилу § 13*.

Далѣе мы разсмотримъ цѣлый рядъ примѣровъ на разсчетъ призматическихъ балокъ при разныхъ способахъ ихъ нагруженія, встрѣчающихся въ практикѣ. Въ каждомъ изъ этихъ примѣровъ мы будемъ рѣшать нижеслѣдующіе вопросы:

1) какой видъ имѣютъ кривая моментовъ и прямая силъ сдвига,

2) къ какому сѣченію относится разсчетная величина сгибающаго момента *),

3) какой видъ имѣетъ ур-іе крѣпости балки,

4) чему равна безопасная нагрузка на балку при данныхъ размѣрахъ ея,

5) чему равна безопасная длина балки при данной нагрузкѣ на нее и данномъ модулѣ сопротивленія,

6) какой видъ имѣетъ ур-іе упругой линіи, есть ли у нея точки перегиба и проч.,

7) какую величину имѣетъ стрѣла прогиба и

8) какъ выражается отношеніе допускаемой стрѣлы у балки къ допускаемой длинѣ послѣдней.

---

15. **Балка защемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ и нагружена сосредоточеннымъ грузомъ P на свободномъ концѣ** (фиг. 103). *a*. Длина балки $CD = l$. Беремъ произвольное поперечное сѣченіе балки N на разстояніи y отъ свободнаго конца и обозначаемъ сгибающій моментъ въ этомъ сѣченіи чрезъ M, а сѣкущее усиліе—чрезъ V. Тогда

$$M = P \, . \, y$$

будетъ ур-іе прямой моментовъ DC_1, проходящей чрезъ ц т крайняго свободнаго конца балки, засѣкающей въ сѣченіи N ординату $NN_1 = M$, а въ ущемленномъ сѣченіи C наибольшую возможную ординату

$$M_1 = P \, . \, l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{28}.$$

Это выраженіе сгибающаго момента и будетъ *разсчетнымъ*, а ущемленное сѣченіе C—*опаснымъ*.

Ур-іе крѣпости такой балки будетъ (см. форм. 13 *a* въ § 4):

$$P \, . \, l = B \, . \, W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{29}.$$

Безопасная нагрузка P_1 опредѣлится такъ:

$$P_1 = B \, . \, W : l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{30},$$

а *безопасная длина* l_1' балки при данной нагрузкѣ будетъ:

$$l_1 = B \, . \, W : P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{31}.$$

Сѣкущее усиліе (см. ф-лу 24) будетъ

$$V = P = NN_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{32}.$$

Прямая сѣкущихъ усилій ($N_2 C_2$) будетъ параллельна несогнутой оси бруса CD, и всѣ поперечныя сѣченія согнутой балки будутъ одинаково опасны относительно поперечнаго сдвига.

Разсчетный моментъ балки M_1 представляетъ собою въ этомъ случаѣ также и *моментъ защемленія* конца C, или иначе *опорный мо-*

---

*) Это сѣченіе наз. *разсчетнымъ* или *опаснымъ*.

ментъ, съ которымъ конецъ C долженъ быть удерживаемъ на мѣстѣ, чтобы не происходило вывертыванія балки, т. е. отклоненія упругой линіи CO отъ первоначальной несогнутой ея оси CD въ точкѣ C. Кромѣ опорнаго момента M_1, стѣна должна оказать еще сопротивленіе, равное нагрузкѣ P, но противоположное ей по направленію. Если писать сгибающій моментъ въ сѣченіи N для всѣхъ силъ, расположенныхъ слѣва отъ сѣченія N, то мы должны взять опорный моментъ и затѣмъ моментъ сопротивленія опоры, т. е.

$$M = M_1 - P \,.\, x = P(l-x),$$

что, очевидно, тождественно съ прежнимъ выраженіемъ момента $P.y$.

б. При нахожденіи *стрѣлы прогиба* беремъ прямоугольныя оси координатъ yoz (фиг. 103), располагая начало ихъ въ ц. т. O крайняго свободнаго провисшаго сѣченія балки, и направляя ось Oy параллельно несогнутой оси бруса, а ось Oz — по вертикали вверхъ, чтобы всѣ ординаты упругой линіи имѣли положительное значеніе. Мы предполагаемъ, что *защемленіе балки совершенное*, т. е., что при вертикальной стѣнѣ несогнутая ось балки CD горизонтальна, а согнутая ось CO касается CD въ мѣстѣ защемленія, т. е.

при $$y = l, \text{ или } x = 0 \ldots . \ tg\alpha = 0 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{33.}$$

Выраженіе стрѣлы прогиба м. получить по ф-лѣ **27** (см. § 14) непосредственно, если въ ней положить

$$a = l \text{ и } M = +P.\, y,$$

т. к. внѣшняя нагрузка P въ сѣченіи N загибаетъ балку (см. § 13). Тогда

$$+A.h = \int_0^l P.\, y^2.dy = \frac{Pl^3}{3}, \text{ откуда}$$

$$h = \frac{1}{3}\cdot\frac{P.l^3}{E.I} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{34,}$$

т. е. *стрѣла прогиба прямо пропорціональна 1-й степени нагрузки, кубу длины балки, и обратно пропорціональна коэф. упругости матеріала балки и моменту инерціи сѣченія.*

в. Для вычисленія *допускаемой стрѣлы прогиба* f_1 въ ур-іе 34 вмѣсто $P.l$ нужно будетъ внести $B.I:e$ (по форм. 29 и 13 а), тогда получимъ:

$$f_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{B}{E}\cdot\frac{l^2}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{35,}$$

т. е. *допускаемая стрѣла прогиба прямо пропорціональна 1-й степени возможнаго въ матеріалѣ напряженія, квадрату длины балки, и обратно пропорціональна коэф. упругости матеріала балки и полувысотѣ сѣченія ея* (наибольшему размѣру сѣченія, расположенному параллельно плоскости дѣйствія силъ или въ самой этой плоскости).

Если принять

для дерева $B = 1$ кг./кв. мм., $E = 1000$ кг./кв. мм.

„ чугуна $B = 2,5$ „ $E = 10000$ „

„ желѣза $B = 7,5$ „ $E = 20000$ „

тогда при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ $l^2 : e$ допускаемыя стрѣлы прогиба для дерева, чугуна и желѣза будутъ относиться между собою, какъ

$$1 : \frac{2,5}{10} : \frac{7,5}{20}, \text{ или } 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{2,66}$$

г. Если для воспринятія нагрузки P будутъ задѣланы въ стѣну двѣ параллельныя балки одинаковой длины, изъ одного и того же матеріала, но различныхъ размѣровъ въ сѣченіи, тогда, для одинаковости ихъ прогиба на свободномъ концѣ требуется, чтобы общая нагрузка была распредѣлена между балками въ отношеніи прямо пропорціональномъ моментамъ инерціи ихъ сѣченій (по ф-лѣ 34). А если при одинаковомъ прогибѣ этихъ двухъ балокъ требуется отъ нихъ и одинаковая крѣпость, т. е. существованіе одного и того же допускаемаго напряженія матеріала въ опасномъ сѣченіи, тогда, какъ указываетъ форм. 35, требуется имѣть у нихъ еще и одинаковую высоту, т. е. распредѣленіе нагрузокъ между обѣими балками д. б. сдѣлано прямо пропорціонально модулямъ сопротивленія ихъ сѣченій. Если C_1D_1 и C_2D_2 (фиг. 104) въ планѣ будутъ двѣ такія балки съ модулями W_1 и W_2, тогда на поперечной соединительной балкѣ $D_1 D_2$ точку приложенія T для общей нагрузки P надо избрать такъ, чтобы существовало равенство.

$$W_1 . m = W_2 . n$$

д. Если для воспринятія нагрузки P будутъ задѣланы въ стѣны двѣ балки C_1D и C_2D (фиг. 105), сходящіяся на свободныхъ своихъ концахъ подъ прямымъ угломъ, тогда величины нагрузокъ P_1 и P_2, вызывающихъ въ каждой изъ этихъ балокъ одинаковый прогибъ на концѣ будутъ связаны между собою такимъ ур-іемъ:

$$\frac{P_1 . l_1^3}{E_1 . I_1} = \frac{P_2 . l_2^3}{E_2 . I_2},$$

гдѣ чрезъ l_1 и l_2 обозначена длина обѣихъ балокъ, E_1 и E_2 — коэф. упругости ихъ, I_1 и I_2 — моменты инерціи. Ур-ія крѣпости каждой изъ нихъ напишутся въ такомъ видѣ:

$$P_1 . l_1 = B_1 . \frac{I_1}{e_1}; \; P_2 . l_2 = B_2 . \frac{I_2}{e_2}.$$

Соединяя эти ф-лы съ предыдущею, найдемъ:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{B_1}{B_2} . \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

Если обѣ балки изъ одного и того же матеріала, и желаютъ построить ихъ съ одинаковою степенью надежности, то $B_1 = B_2$ и $E_1 = E_2$; тогда

$$\frac{e_1}{e_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2,$$

т. е. *высоты балокъ изъ одного и того же матеріала, сходящихся подъ угломъ, воспринимающихъ на себя общую нагрузку и разсчитываемыхъ съ одной и той же надежностью, должны быть пропорціональны квадратамъ ихъ длины.* При этихъ условіяхъ отношеніе между нагрузками выразится такъ:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3.$$

e. Уравненіе упругой линіи. Согнутая ось бруса пусть будетъ CO (фиг. 103). Отнесемъ ее къ прежнимъ осямъ координатъ *yoz*. Чтобы примѣнить къ этому случаю ур-іе **26** (см. § 12), надо рѣшить вопросъ о знакахъ. Радіусъ кривизны въ сѣченіи N пойдетъ въ сторону отрицательной оси z-овъ, поэтому въ 1-й части ур-ія **26** надо поставить знакъ минусъ; затѣмъ моментъ силы P относительно ц. т. сѣченія N является загибающимъ балку, поэтому во 2-ой части ур-ія **26** надо поставить знакъ плюсъ (см. § 13). На основаніи этого мы получимъ:

$$-A.\frac{d^2z}{dy^2} = +P.y.$$

Интегрируемъ это ур-іе 2 раза, вводя каждый разъ произвольныя постоянныя c и c_1

$$-A.\frac{dz}{dy} = P.\frac{y^2}{2} + c \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{а},$$

$$-A.z = \frac{P}{2}.\frac{y^3}{3} + c.y + c_1 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{б}$$

Для опредѣленія постояннаго c надо отнести ф-лу **а** къ такой точкѣ на кривой, въ которой бы мы знали величину $tg\alpha$; мы имѣемъ такую точку, а именно C, для которой

$$\text{при} \quad y = l \ldots \frac{dz}{dy} = 0 = \frac{P.l^2}{2} + c,$$

откуда

$$c = -\frac{P.l^2}{2}.$$

Для нахожденія постояннаго c_1 отнесемъ формулу **б** къ началу координатъ O, гдѣ при $y = 0$ и $z = 0$, а тогда видимъ, что $c_1 = 0$. Послѣ этого ф-ла **б** приметъ видъ:

$$A.z = \frac{P}{2}.y.\left(l^2 - \frac{y^2}{3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{в}.$$

Это и есть искомое ур-іе упругой линіи. *Max* ординаты $z = h$ мы получимъ, дѣлая въ этомъ ур-іи $y = l$. Результатъ будетъ тождественъ съ ф-лой **34**.

ж. Воспользуемся тѣмъ же примѣромъ и докажемъ, что результатъ, данный въ ф-лѣ **34**, не зависитъ отъ расположенія осей координатъ. Новое начало ихъ возьмемъ въ точкѣ C, ось x-овъ направимъ по несогнутой оси бруса CD, а ось z-овъ по линіи CC_2 (внизъ). Тогда радіусъ кривизны въ сѣченіи N будетъ направленъ въ сторону положительной оси z-овъ, и моментъ силы P будетъ загибающимъ балку въ сѣченіи N, стало быть, на основаніи § 13, ф-ла 26 здѣсь будетъ имѣть видъ.

$$+ A \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} = + P(l - x).$$

Интегрируя это ур-іе 2 раза, получимъ:

$$A \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{P(l-x)^2}{2} + c_2 \ldots\ldots\ldots \text{д.}$$

$$A \cdot z = + \frac{P}{2} \frac{(l-x)^3}{3} + c_2 \cdot x + c_3 \ldots\ldots\ldots \text{е.}$$

Для нахожденія c_2 примѣняемъ ф-лу **д** къ точкѣ C, гдѣ при

$$x = 0 \ldots \frac{dz}{dx} = 0 = -\frac{Pl^2}{2} + c_2,$$

откуда

$$c_2 = \frac{P \cdot l^2}{2}.$$

Для нахожденія c_3 примѣнимъ къ точкѣ C ф-лу **е**, дѣлая

$$\text{при } x = 0 \ldots z = 0 = \frac{P \cdot l^3}{6} + c_3,$$

$$\text{откуда } c_3 = -\frac{P \cdot l^3}{6}.$$

Послѣ этого ур-іе **е** приметъ видъ:

$$A \cdot z = \frac{P \cdot (l-x)^3}{6} + \frac{P \cdot l^2}{2} \cdot x - \frac{P \cdot l^3}{6}.$$

Max величины $z = h$ въ этомъ случаѣ будетъ имѣть мѣсто при $x = l$, и результатъ будетъ тождественъ съ ф-лой **34**.

16. **Балка защемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ и нагружена по всей длины равномѣрно** (фиг. 106). *а.* Длина балки CD (фиг. 12) пусть будетъ l. Беремъ произвольное сѣченіе балки N на разстояніи y отъ свободнаго конца и обозначаемъ сгиб. мом. въ этомъ сѣченіи чрезъ M, а сѣкущее усиліе чрезъ V. Тогда, обозначая нагрузку, приходящуюся на единицу длины балки, чрезъ p, будетъ имѣть:

$$M = \frac{p \cdot y^2}{2}$$

Видимъ, что кривою моментовъ будетъ въ этомъ случаѣ парабола $C_1 D$, проходящая чрезъ ц. т. крайняго свободнаго конца балки. Вершина параболы будетъ въ D, а ея ось Dz. Наибольшая возможная ордината этой кривой будетъ

$$CC_1 = M_2 = \frac{p \cdot l^2}{2} = Q \cdot \frac{l}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36$$

Это выраженіе сгибающаго момента и будетъ *разсчетнымъ*, а ущемленное сѣченіе C — *опаснымъ*. Ур-іе крѣпости такой балки будетъ:

$$\frac{Q \cdot l}{2} = B \cdot W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37$$

Безопасная нагрузка P_2 опредѣлится такъ:

$$P_2 = 2 \cdot B \cdot W : l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 38,$$

а *безопасная длина балки* l_2 при данной нагрузкѣ будетъ:

$$l_2 = 2 \ B \cdot W : Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 39$$

Сравнивая формулы 30 и 38, 31 и 39, видимъ, что и безопасная нагрузка, и безопасная длина балки здѣсь будутъ вдвое болѣе чѣмъ въ 1-мъ случаѣ.

Прямая сѣкущихъ усилій $C_2 D$ будетъ, очевидно, имѣть ур-іе:

$$V = \frac{dM}{dy} = p \cdot y,$$

т. е. наиболѣе опаснымъ сѣченіемъ относительно сдвига будетъ ущемленное сѣченіе C.

Дѣйствіе стѣны на балку сказывается моментомъ защемленія M_2 и сопротивленіемъ, равнымъ Q, но направленнымъ кверху.

Напишемъ сгиб. мом. для сѣченія N отъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ балкѣ, *слѣва* отъ него:

$$M = \frac{Q \cdot l}{2} - Q \cdot x + \frac{p \cdot x^2}{2},$$

но $Q = p \cdot l$, поэтому

$$M = \frac{p}{2} (l^2 - 2 \, l \, x + x^2) = \frac{p \cdot y^2}{2},$$

т. е. безразлично, писать ли моментъ для всѣхъ силъ, расположенныхъ справа отъ даннаго сѣченія, или же слѣва.

б. При нахожденіи стрѣлы прогиба беремъ прямоугольныя оси координатъ $y\,O\,z$ (фиг. 106), располагая начало ихъ въ ц. т. O крайняго свободнаго конца балки, и направляя ось Oy параллельно несогнутой оси бруса, а ось Oz — по вертикали вверхъ, чтобы всѣ ординаты упругой линіи CO были положительны. При совершенномъ защемленіи балки въ сѣченіи C,

при $y = l$ и $x = o$ .. $tg\,\alpha = o$.

Выраженіе стрѣлы прогиба h м. получить изъ ф-лы 27, если въ ней положить

$$a = l \text{ и } M = + \frac{p \cdot y^2}{2},$$

выбравъ знаки на основ. §§ 13 и 14. Тогда

$$+ A.h = \int_0^l \frac{p \cdot y^2}{2} \cdot y \, dy = \frac{p \cdot l^4}{8}, \text{ откуда}$$

$$h = \frac{1}{8} \cdot \frac{Q \cdot l^3}{E \cdot I} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{40}$$

И здѣсь м. было бы привести то же самое заключеніе, которое было сдѣлано по поводу ф-лы **34**.

в. Для вычисленія допускаемой стрѣлы прогиба f_2 въ ф-лу **40** вмѣсто 0,5. $Q \cdot l$ надо внести $B.I : e$ (на основ. ф-лы **37**):

$$f_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{B \cdot l^2}{E \cdot e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{41}$$

Сравнивая ф-лу **35** съ **41**, видимъ, что безопасная стрѣла прогиба будетъ получаться во 2-мъ случаѣ менѣе, чѣмъ въ 1-мъ, въ отношеніи 3 : 4.

Заключенія § 15, *г* и *д* одинаково приложимы и къ этому способу нагруженія.

г. Для полученія ур-ія упругой линіи беремъ оси координатъ такъ, какъ говорено ранѣе (§ 16 *б*). Вопросъ о знакахъ разрѣшаемъ на основ. § 13 и получаемъ:

$$- A \cdot \frac{d^2z}{dy^2} = + \frac{p \cdot y^2}{2}.$$

Послѣ двухъ интеграцій получимъ:

$$- A \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{p}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + c_1$$

$$- A \cdot z = \frac{p}{6} \cdot \frac{y^4}{4} + c_1 \cdot y + c_2$$

Для точки O при $y = 0$ и $z = 0$, поэтому и $c_2 = 0$.

Для нахожденія c_1 переносимъ сѣченіе N въ C, гдѣ

$$\text{при } y = l \ldots \ldots \frac{dz}{dy} = 0 = \frac{pl^3}{6} + c_1,$$

$$\text{откуда } c_1 = - \frac{pl^3}{6}, \text{ тогда}$$

$$A \cdot z = \frac{p}{6} \left(l^3 \cdot y - \frac{y^4}{4} \right).$$

Это и есть искомое ур-iе упругой линiи. *Max* ординаты $z=h$ получится, дѣлая $y=l$. Результатъ вычисленiя будетъ тождественъ съ ф-лой **40**.

Въ видѣ примѣра можно сдѣлать нахожденiе ур-iя упругой линiи, отнесенной къ осямъ координатъ DCC_2, или же къ осямъ CDO. При осяхъ DCC_2 съ началомъ C ур-iе будетъ

$$A.z=\frac{p}{24}(6l^2-4x.l+x^2).x^2,$$

а при осяхъ CDO съ началомъ D ур-iе будетъ:

$$A.z=\frac{p}{24}(y^4-24l^3.y+3l^4).$$

17. Балка защемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ, нагрузка равномѣрно возрастаетъ по мѣрѣ приближенiя къ защемленному концу (фиг. 107). *a.* Нагрузка представляется графически въ видѣ одинаковой ширины вѣсомаго слоя, высота котораго измѣняется по закону прямой линiи DH. Если на всю длину балки приходится нагрузка Q, выражаемая площадью треугольника CDH, а на произвольной длинѣ y располагается нагрузка q, выражаемая площ. треугольника NDK, то

$$\frac{q}{Q}=\frac{y^2}{l^2} \text{ и } q=\frac{Q}{l^2}.y^2.$$

Выраженiе сгибающаго мом. M для произвольнаго сѣченiя N нужно будетъ писать, умножая нагрузку q на растоянiе $\frac{y}{3}$ центра тяжести ея отъ сѣченiя N. Аналитическое доказательство этого предложенiя м. б. сдѣлано подобно тому, какъ это было указано въ § 10 для равномѣрной нагрузки. Поэтому

$$M=q.\frac{y}{3}=\frac{Q}{3l^2}.y^3.$$

Кривая моментовъ будетъ въ этомъ случаѣ кубическою параболою C_1D (фиг. 107), которая засѣкаетъ въ ущемленномъ сѣченiи ординату CC_1, равную по величинѣ разсчетному моменту

$$M_3=\frac{Q.l}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{42.}$$

Ур-iе крѣпости такой балки будетъ (см. форм. 13 въ § 4):

$$\frac{Q.l}{3}=B.W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{43.}$$

Безопасная нагрузка P_3 опредѣлится такъ:

$$P_3=3B.W:l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{44,}$$

и *безопасная длина балки* будетъ:

$$l_3=3B'.W:P_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{45.}$$

Сравнивая между собою ф-лы **30**, **38** и **44**, находимъ:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 2 : 3,$$

а по ф-ламъ **31**, **39** и **45** получаемъ

$$l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 2 : 3.$$

Кривая сѣкущихъ усилій будетъ параболою DC_2, ур-іе которой получится такъ:

$$V = \frac{dM}{dy} = \frac{Q}{l^2} \cdot y^2 = q,$$

т. е. здѣсь, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, наиболѣе опаснымъ сѣченіемъ по отношенію къ сдвигу будетъ ущемленное сѣченіе C, въ которомъ $V = Q$.

б. Для нахожденія стрѣлы прогиба беремъ прямоугольныя оси координатъ yOz (фиг. 107), располагая начало ихъ въ ц. т. O крайняго свободнаго провисшаго конца, и направляя ось Oy параллельно несогнутой оси бруса, а ось Oz — по вертикали вверхъ. При совершенномъ защемленіи балки въ сѣченіи C,

$$\text{при } y = l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; tg\alpha = 0.$$

Выраженіе стрѣлы прогиба h м. получить изъ ф-лы 27, если въ ней положить

$$a = l \text{ и } M = \frac{Q}{3l^2} \cdot y^3,$$

выбравъ знаки на основ. §§ 13 и 14. Тогда

$$+A.h = \frac{Q}{3l^2} \cdot \int_0^l y^4 . dy = \frac{Q . l^3}{15}$$

$$h = \frac{1}{15} \cdot \frac{Q . l^3}{E . I} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{46.}$$

И здѣсь м. привести то же самое заключеніе, которое было сдѣлано по поводу ф-лы 34.

Для вычисленія допускаемой стрѣлы прогиба f_3 въ ф-лу 46 вмѣсто $Ql : 3$ надо внести $B.I : e$ (на основ. ф-лы 43):

$$f_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{B . l^2}{E . e} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{47.}$$

Сравненіе ф-лъ 35, 41 и 47 показываетъ, что

$$f_1 : f_2 : f_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}.$$

в. Для полученія ур-ія упругой линіи беремъ оси координатъ CDO (фиг. 107) съ началомъ D, положительной осью y-овъ, направленной по линіи DC влѣво, и положительной осью z-овъ — по вертикали DO внизъ.

Примѣняемъ ф-лу **26** (см. § 12), соблюдая правило знаковъ (§ 13):

$$+A.\frac{d^2z}{dy^2}=+\frac{Q}{3l^2}.y^3$$

$$A.\frac{dz}{dy}=\frac{Q}{3l^2}.\frac{y^4}{4}+c$$

$$A.z=\frac{Q}{12.l^2}.\frac{y^5}{5}+c.y+c_1.$$

Въ сѣченіи C при $y=l$ . . . . . $\frac{dz}{dy}=0=\frac{Ql^2}{12}+c,$

откуда $c=-\frac{Q.l^2}{12}.$

Въ томъ же сѣченіи C при $y=l$ . . . . . . $z=0$, поэтому

$$o=\frac{Q.l^3}{60}-\frac{Q.l^3}{12}+c_1, \text{ или}$$

$$c_1=\frac{Q.l^3}{15}.$$

При взятомъ расположеніи осей координатъ CDO произвольное постоянное c_1, очевидно, всегда будетъ равно вычисляемой стрѣлѣ прогиба.

Ур-іе упругой линіи будетъ:

$$E.I.z=\frac{Q}{60.l^2}(y^5-5l^4.y+4l^5).$$

При $y=0$, оно даётъ $z=h$, стрѣлкѣ, которую мы вычислили ранѣе по ф-лѣ **46**.

Въ видѣ задачи м. продѣлать то же вычисленіе, взявъ другое расположеніе осей координатъ: при осяхъ yOz (фиг. 107) ур-іе упругой линіи будетъ:

$$A.z=\frac{Q}{60.l^2}(5l^4.y-y^5),$$

а при осяхъ DCC_2 (фиг. 107) получимъ:

$$A.z=\frac{Q}{60.l^2}\left[(l-x)^5+5l^4.x-l^5\right].$$

Оба эти ур-ія при соотвѣтственныхъ значеніяхъ y и x даютъ то же самое выраженіе стрѣлы, что и выше (ф-ла 46).

18. **Балка защемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ, нагрузка равномѣрно убываетъ по мѣрѣ приближенія къ защемленному концу** (фиг. 108). Нагрузка представляется въ видѣ одинаковой ширины вѣсомаго слоя, высота котораго измѣняется по закону прямой линіи CH (фиг. 108). Если на всю длину l балки приходится нагрузка, выражаемая площадью треугольника CDH, а на произвольной длинѣ $CN=x$ расположена будетъ нагрузка q, выражаемая площадью треугольника CNN_1, то

$$q=\frac{Q}{l^2}.x^2.$$

Моментъ защемленія балки въ сѣченіи C напишется такъ:

$$M_4 = Q \cdot \frac{2}{3} l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{48.}$$

Выраженіе сгибающаго момента M въ произвольномъ сѣченіи балки можно писать безразлично отъ силъ, дѣйствующихъ на сѣченіе или справа, или слѣва. Въ данномъ случаѣ M проще писать для силъ, расположенныхъ слѣва отъ сѣченія N, причемъ все выраженіе алгебраической суммы будетъ состоять изъ трехъ слагаемыхъ, а именно: изъ момента защемленія M_4, изъ момента сопротивленія силы Q, направленной кверху и выражающей собою сопротивленіе стѣны, и изъ момента нагрузки q, дѣйствующаго за одно съ M_4:

$$M = M_4 - Q \cdot x + q \cdot \frac{x}{3}, \text{ или}$$

$$M = \frac{Q}{3l^2}\left(x^3 - 3l^2 \cdot x + 2l^3\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{49.}$$

Это и есть ур-іе кривой моментовъ C_1D (фиг. 108). При $x = l$, получимъ $M = 0$, т. е. кривая проходитъ чрезъ точку D, а при $x = 0$ находимъ $M = M_4$, моменту защемленія.

Сѣкущее усиліе получимъ по ф-лѣ **24**:

$$\frac{dM}{dx} = V = \frac{Q}{l^2}(x^2 - l^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{50.}$$

При $x = l \ldots V = 0$, т. е. кривая моментовъ C_1D въ точкѣ D касается линіи CD. Кривая сѣкущихъ усилій DC_2 будетъ параболою, вершина которой находится въ C_2, а осью ея служитъ вертикаль CC_2. При $x = l \ldots V = 0$, а при $x = 0 \ldots V = Q$; на знакъ минусъ мы при этомъ не обращаемъ вниманія, такъ какъ онъ характеризуетъ собою только аналитическое свойство V, какъ функціи x, убывающей по мѣрѣ возрастанія x.

Разсчетное ур-ге этой балки будетъ:

$$\frac{2}{3} Q \cdot l = B \cdot W \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{51.}$$

Безопасная нагрузка P_4 для такой балки будетъ:

$$P_4 = \frac{3}{2} \cdot B \cdot W : l \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{52,}$$

а *безопасная длина* l_4 опредѣлится такъ:

$$l_4 = \frac{3}{2} \cdot B \cdot W : P_4 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{53.}$$

Сравнивая между собою ф-лы **30, 38, 44** и **52,** находимъ:

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = 1 : 2 : 3 : 1{,}5.$$

Въ такомъ же отношеніи между собою будутъ находиться и безопасныя длины балокъ (см ф-лы **31, 39, 45** и **53**). Изъ этого видно, что по условіямъ крѣпости разсмотрѣнный нами способъ нагруженія балки занимаетъ промежуточное мѣсто между 1-мъ и 2-мъ случаемъ.

Найдемъ теперь ур-іе упругой линіи CO (фиг. 108). Отнесемъ ее къ осямъ координатъ DCC_2 съ началомъ въ C, располагая положительную ось x-овъ по горизонтали вправо, а положительную ось z-овъ по вертикали внизъ. Соблюдая правило знаковъ (§ 13), примѣняемъ ф-лу **26** (§ 12):

$$+A \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = +\frac{Q}{3l^2}(x^3 - 3l^2 \cdot x + 2l^3),$$

$$A \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{Q}{3l^2}\left(\frac{x^4}{4} - 3l^2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2l^3 \cdot x\right) + c,$$

$$A \cdot z = \frac{Q}{3l^2}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{3l^2}{2}\,\frac{x^3}{3} + 2l^3 \cdot \frac{x^2}{2}\right) + c \cdot x + c_1.$$

При выбранномъ нами расположеніи осей координатъ оба произвольныя постоянныя, очевидно, будутъ равны нулю, потому что

$$\text{при } x = 0 \ldots . \frac{dz}{dx} = 0 \text{ и } z = 0.$$

Поэтому ур-іе упругой линіи будетъ

$$A \cdot z = \frac{Q}{60 \cdot l^2}(x^5 - 10 \cdot l^2 \cdot x^3 + 20l^3 \cdot x^2).$$

Стрѣлу прогиба h мы получимъ, сдѣлавши въ этомъ ур-іи $x = l$, тогда

$$h = \frac{11}{60} \cdot \frac{Q}{E}\frac{l^3}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{54}.$$

Для вычисленія допускаемой стрѣлы прогиба f_4 соединяемъ ф-лы **51** и **54** въ одну:

$$f_4 = \frac{11}{40} \cdot \frac{B \cdot l^2}{E \cdot e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{55},$$

т. е. и въ смыслѣ образованія стрѣлы прогиба этотъ случай занимаетъ мѣсто между 1-мъ и 2-мъ способомъ нагруженія.

19. **Балка свободно лежитъ на двухъ опорахъ и нагружена однимъ сосредоточеннымъ грузомъ** (фиг. 109). *a*. Плечи нагрузки P пусть будутъ a и b, причемъ $a + b = l = CD$. Сопротивленія опоръ называемъ чрезъ T и S, тогда:

$$T = P \cdot \frac{b}{l}\,; \quad S = P \cdot \frac{a}{l} \cdot$$

Замѣняя дѣйствіе опоръ на балку силами S и T, мы можемъ вовсе отвлечься отъ опоръ и разсматривать балку, какъ подверженную дѣйствію трехъ сосредоточенныхъ грузовъ S, P и T.

Если на разстояніи x отъ лѣвой опоры возьмемъ сѣченіе N, тогда сгиб. мом. M въ этомъ сѣченіи будетъ

$$M = T \cdot x.$$

т. е. при измѣненіи x въ предѣлахъ отъ нуля до a сгибающіе моменты на лѣвомъ плечѣ балки будутъ измѣняться по закону прямой линіи CH, если условно примемъ

$$HF = M_5 = T \cdot a = P \cdot \frac{a \cdot b}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{56.}$$

M_5 буд. представлять собою наибольшее значеніе сгиб. мом. на лѣвомъ плечѣ балки. Возьмемъ затѣмъ произвольное сѣченіе ея N_1 на правомъ плечѣ, на разстояніи x_1 отъ опоры C, и напишемъ для этого сѣченія выраженіе момента M_1 отъ нагрузокъ T и P, расположенныхъ слѣва отъ сѣченія N_1:

$$M_1 = T \cdot x_1 - P(x_1 - a), \text{ или}$$

$$M_1 = P \cdot a - x_1 (P - T).$$

Это выраженіе показываетъ, что сгиб. моменты на правомъ плечѣ балки измѣняются также по закону прямой линіи, Не трудно убѣдиться, что этою прямою будетъ HD. въ выраженіи M_1 абсцисса x_1 можетъ измѣняться только въ предѣлахъ отъ a до l, наибольшее значеніе M_1 будетъ имѣть мѣсто при наименьшемъ значеніи x_1, т. е. при $x_1 = a$, когда $M_1 = T \cdot a = M_5$; если же сдѣлать $x_1 = l$, то $M_1 = P \cdot a - l \cdot S = 0$. Слѣд., *опаснымъ или разсчетнымъ сѣченіемъ балки, свободно лежащей на опорахъ и нагруженной сосредоточеннымъ грузомъ, будетъ всегда сѣченіе, проходящее чрезъ точку приложенія внѣшней нагрузки.* Поэтому выраженіе *56* будетъ разсчетнымъ моментомъ такой балки, а ур-іе крѣпости ея напишется такъ:

$$\frac{P \cdot a \cdot b}{l} = B \ W \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{57.}$$

Выяснимъ, какое расположеніе нагрузки будетъ наиболѣе опаснымъ, предполагая, что плечо $a = u$ мы можемъ измѣнять. Перемѣнную величину разсчетнаго момента обозначимъ въ этомъ случаѣ чрезъ m, тогда

$$m = \frac{P \cdot u \cdot (l - u)}{l}$$

$$\frac{dm}{du} = \frac{P}{l}(l - 2u) = 0,$$

$$\text{откуда} \quad u = \frac{l}{2} = l - u,$$

т. е. *наиболѣе опасное расположеніе нагрузки на балкѣ будетъ такое, когда она сосредоточена въ срединѣ длины балки.* Ур-іе крѣпости балки въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\frac{P \cdot l}{4} = B \cdot W \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{58,}$$

Безопасная нагрузка P_5 опредѣлится такъ:

$$P_5 = 4B \cdot W \cdot l \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{59,}$$

а *безопасная длина* балки будетъ

$$l_5 = 4B \, . \, W : P_5 \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{60.}$$

Сравнивая между собою ф-лы **30**, **38**, **44** и **59**, находимъ, что

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_5 = 1 : 2 : 3 : 4.$$

Въ такомъ же отношенiи между собою находятся и безопасныя длины балокъ.

Ур-iе прямой сѣкущихъ усилiй на лѣвомъ плечѣ балки получимъ, взявши

$$\frac{dM}{dx} = V = T = CC_1,$$

а на правомъ плечѣ —

$$\frac{dM_1}{dx_1} = V_1 = T - P = - S = FK.$$

Прямыя, проведенныя чрезъ точки C_1 и K параллельно несогнутой оси бруса, будутъ искомыми.

б. Мы видѣли, что въ сѣченiяхъ N и N_1 сгибающiе моменты выражаются различно, а потому упругая линiя здѣсь должна состоять изъ двухъ вѣтвей CF_1 и F_1D, имѣющихъ различныя ур-iя. Въ дифференцiальной формѣ мы ихъ напишемъ по ф-лѣ 26 (§ 12), соблюдая правило знаковъ по § 13. Отнесемъ обѣ кривыя къ системѣ осей DCC_1, располагая начало координатъ въ точкѣ C и направляя оси x и x_1 по горизонтали вправо, а оси z и z_1 — по вертикали внизъ, тогда (см. § 13):

для кривой CF_1

$$-A \, . \frac{d^2 z}{dx^2} = + T \, . \, x$$

$$-A \, . \frac{dz}{dx} = T \, . \frac{x^2}{2} + c_1 \, . \quad \ldots\ldots \quad \text{ф.}$$

$$-A \, . \, z = \frac{T}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + c_1 \, . \, x + c_2 \quad \ldots\ldots \quad \text{ю,}$$

а для кривой F_1D.

$$-A \, . \frac{d^2 z_1}{dx_1^{\,2}} = T \, . \, x_1 - P \, . (x_1 - a).$$

$$-A \, . \frac{dz_1}{dx_1} = T \, . \frac{x_1^{\,2}}{2} - P \, . \frac{(x_1 - a)^2}{2} + c_3 \quad \ldots\ldots \quad \text{я.}$$

$$-A \, z_1 = \frac{T}{2} \cdot \frac{x_1^{\,3}}{3} - \frac{P}{2} \cdot \frac{(x_1 - a)^3}{3} + c_3 \, . \, x_1 + c_4 \quad \ldots \quad \text{ѳ.}$$

Для нахожденiя 4-хъ произвольныхъ постоянныхъ нужно написать 4 условiя, выражающiя различныя свойства упругой линiи CF_1D.

1-е условiе. При $x = 0$ въ точкѣ $C \ldots\ldots z = 0$, откуда по ур-iю ю выходитъ, что и $c_2 = 0$.

2-е условіе. Обѣ вѣтви упругой линіи въ точкѣ F_1 имѣютъ общую касательную, т. е. балка изгибается безъ перелома въ точкѣ F_1. Это положеніе, подтверждаемое опытомъ, можно выразить такъ:

$$\text{при } x = x_1 = a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{dz}{dx} = \frac{dz_1}{dx_1},$$

тогда изъ сравненія условій *ф* и *я*, находимъ, что $c_1 = c_3$.

3 е условіе. Обѣ вѣтви упругой линіи въ точкѣ F_1 имѣютъ общую ординату, т. е. при $x = x_1 = a \ldots z_1 = z$, тогда изъ сравненія ф-лъ **ю** и **ѳ** получается:

$$c_1 . a + c_2 = c_3 . a + c_4, \text{ или } c_4 = c_2 = 0.$$

4-е условіе. Правая вѣтвь кривой проходитъ чрезъ точку D, т. е. при $x_1 = l \ldots z_1 = 0$. Тогда изъ ф-лы **ѳ**

$$0 = \frac{T . l^3}{6} - \frac{P . b^3}{6} + c_3 . l,$$

но

$$T = \frac{P . b}{l}, \text{ поэтому}$$

$$c_3 = - \frac{T}{6} . (l^2 - b^2) = c_1,$$

$$l^2 - b^2 = a^2 + 2ab = k^2.$$

Послѣ этого ф-лы **ф** и **ю** примутъ видъ:

$$- A . \frac{dz}{dx} = \frac{T}{2} . \left(x^2 - \frac{k^2}{3}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{ф} \; .$$

$$- A . z = \frac{T}{6} . (x^3 - k^2 . x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \textbf{ю} \; .$$

в. Наибольшая ордината h упругой линіи будетъ имѣть мѣсто при такомъ значеніи x_2, когда

$$x_2 = \frac{k}{\sqrt{3}} = a . \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} . \frac{b}{a}}.$$

Если $b < a$, тогда $x_2 < a$, и полученное рѣшеніе будетъ отвѣчать на вопросъ; если же x_2 получится болѣе a, то этимъ рѣшеніемъ воспользоваться мы не можемъ, такъ какъ ур-ія **ф** и **ю** мы можемъ примѣнять къ нашей балкѣ, измѣняя x только въ предѣлахъ отъ нуля до a; тогда придется обратиться къ ур-іямъ **я** и **ѳ** и стрѣлу прогиба искать въ правой вѣтви упругой линіи F_1D.

Для случая $x_2 < a$ имѣемъ:

$$A . h = \frac{T}{9} . \frac{k^3}{\sqrt{3}}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $a = b = 0{,}5 \, . \, l$, т. е. балка равноплечая, получимъ

$$T = \frac{P}{2}; \; k^2 = 3a^2 \text{ и}$$

$$A.h=\frac{1}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{P}{2}.a^3.3\sqrt{3},\text{ откуда}$$

$$h=\frac{1}{48}\cdot\frac{P.l^3}{E.I}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathbf{61}.$$

Допускаемую стрѣлу прогиба $f_{в}$ получимъ, соединяя ф-лы **58** и **61** въ одну:

$$f_{в}=\frac{1}{12}\cdot\frac{B.l^2}{E.e}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathbf{62}.$$

Результатъ, представляемый ф-лою **61**-ю, возможно провѣрить также и на основаніи ф-лы **34** (см. § 15), ибо разсмотрѣнная нами балка на половинѣ своей длины по существу дѣла должна изгибаться совершенно такъ же, какъ балка, ущемленная въ срединѣ своей длины и нагруженная на свободномъ концѣ (на опорѣ) грузомъ $\frac{P}{2}$. Если поэтому въ ф-лу **34** вмѣсто P внесемъ $\frac{P}{2}$ и вмѣсто l подставимъ $\frac{l}{2}$, тогда получимъ

$$h=\frac{1}{3.E.I}\cdot\frac{P}{2}\cdot\frac{l^3}{8},$$

что тождественно съ ф-лой **61**-й.

г. Опредѣленіе произвольнаго постояннаго c_1 въ ур-іи **ф** можетъ быть сдѣлано еще и другимъ способомъ, пользуясь ур-іемъ **27** (§ 14) для упругой линіи. Это ур-іе можетъ прямо дать величину $tg\alpha$, или *девіаціи*, если выразить сгиб. моментъ въ функціи $y=l-x$ (фиг. 109).

$$M=S.y-P(y-b)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathbf{t}.$$

Это выраженіе болѣе нуля, $tg\alpha$ тоже положителенъ (фиг. 109) при взятомъ расположеніи осей, поэтому, чтобы имѣть его болѣе нуля, въ 1-й части формулы **27** нужно будетъ взять передъ всѣмъ выраженіемъ знакъ минусъ. Затѣмъ вмѣсто a въ ф-лу **27** мы внесемъ l, т. е. начальной и конечной точками упругой линіи примемъ точки C и D. Внося въ это ур-іе вмѣсто M его величину изъ ф-лы **t**, нужно будетъ имѣть въ виду, что въ ней членъ $P(y-b)$ появляется только при значеніяхъ y, измѣняющихся отъ b до l; сообразно съ этимъ назначаются и предѣлы интегрированія во 2-й части ф-лы **27**:

при $y=l\ldots.z=h=0$, поэтому

$$A.l.tg\,\alpha=\int_0^l S.y^2.dy-\int_b^l P\,(y-b).y.dy=$$

$$=S.\frac{l^3}{3}-P.\left[\frac{l^3-b^3}{3}-b.\frac{l^2-b^2}{2}\right]\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathbf{u}$$

$$A.l.tg\,\alpha=P.\left[\frac{a}{l}\cdot\frac{l^3}{3}-\frac{l^3}{3}+\frac{b^3}{3}+b.\frac{l^2}{2}-\frac{b^3}{2}\right]=$$

$$= P.\left[l^2 \left(\frac{a}{3} - \frac{l}{3} + \frac{b}{2} \right) - \frac{b^3}{6} \right] = \frac{P.b}{6} (l^2 - b^2)$$

Послѣ этого не трудно найти и c_1 въ ф-лѣ **ф** этого §. Если сдѣлаемъ въ ней $x = o$, тогда $\frac{dz}{dx} = tg\,\alpha$, поэтому

$$- A.tg\,\alpha = - \frac{P.b}{6.l} (l^2 - b^2) = c_1$$

Такое именно выраженіе для c_1 мы и получили въ 4-мъ условіи этого §. Такимъ образомъ мы придемъ къ тѣмъ же самымъ ур-іямъ **ф**′ и **ю**′, но много короче.

20. **Балка свободна положена на двѣ опоры и нагружена двумя одинаковыми равномѣрно-распредѣленными нагрузками, прилегающими къ опорамъ балки** (фиг. 110). *a.* Двѣ одинаковыя нагрузки P, P распредѣлены равномѣрно на плечахъ балки длиною $b = CD = FG$. Нагрузка на единицу длины — p, такъ что $P = b.p$. Сопротивленія опоръ будутъ, очевидно, одинаковы и равны P. Прикладывая ихъ къ опорамъ C и G, можно будетъ отвлечься отъ самыхъ опоръ и разсматривать балку, какъ нагруженную 4-мя силами P Упругая линія будетъ CD_1F_1G.

Напишемъ выраженіе сгиб. мом. M для произвольнаго сѣченія N балки, взятаго на разстояніи x отъ точки D:

$$M = b.p.(b - x) - p\frac{(b-x)^2}{2}, \text{ или}$$

$$M = \frac{p}{2}(b^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{63}$$

Это ур-іе кривой моментовъ CD_2 есть ур-іе параболы съ вершиной въ D_2 и осью D_2D_1. Мы можемъ пользоваться этимъ ур-іемъ только при измѣненіи x отъ нуля до b влѣво отъ точки D. Наибольшее значеніе момента $M = M_0$ получится, если сдѣлаемъ $x = 0$, тогда

$$M_0 = \frac{p\ b^2}{2} = \frac{P.b}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{64}$$

Ур-іе прямой силъ сдвига получится такъ:

$$V = \frac{dM}{dx} = -p.x \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{65},$$

т. е. прямая проходитъ чрезъ точку D и засѣкаетъ на вертикали чрезъ точку C длину CC_1, равную сопротивленію опоры.

Напишемъ теперь выраженіе сгиб. мом. M_1 въ произвольномъ сѣченіи N_1 на растояніи x_1 справа отъ точки D, взявъ моменты двухъ силъ — сопротивленія лѣвой опоры и лѣвой нагрузки:

$$M_1 = P.(b + x_1) - P\left(\frac{b}{2} + x_1\right) = \frac{P.b}{2} = M_0 \quad \ldots \quad \mathbf{66},$$

т. е. M_1 постоянно, и всѣ сѣченія между D и F одинаково опасны.

Сѣкущее усиліе $V_1 = 0$, т. е. во всѣхъ сѣченіяхъ между D и F напряженіе отъ сдвига отсутствуетъ.

На основаніи ф-лы **9** (см. § 3) можно сказать, что вѣтвь D_1F_1 упругой линіи будетъ окружностью, и ч. для всѣхъ поперечныхъ сѣченій балки между D и F величина радіуса кривизны r постоянна.

Ур-іе крѣпости такой балки будетъ:

$$\frac{P.b}{2} = B.W \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{67}.$$

б. Для нахожденія ур-ія упругой линіи D_1F_1 расположимъ начало координатъ въ D_1, ось x_1 направимъ по горизонтали *вправо*, а ось z_1 — по вертикали *внизъ*. Соблюдая правило знаковъ (§ 13), по ф-лѣ **26** (см. § 12), пишемъ:

$$-A.\frac{d^2z_1}{dx_1^2} = +\frac{P.b}{2}$$

$$-A.\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{P.b}{2}.x_1 + c_1$$

$$-A.z_1 = \frac{P.b}{2}.\frac{x_1^2}{2} + c_1.x_1 + c_2.$$

Такъ какъ балка нагружена симметрично, поэтому въ рединѣ длины балки касательная къ D_1F_1 будетъ параллельна съ DF, т. е.

при $$x_1 = \frac{l}{2} - b \ldots \frac{dz_1}{dx_1} = 0, \text{ откуда,}$$

$$c_1 = \frac{P.b}{4}(2b - l) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{a}$$

Въ точкѣ D_1 при $x_1 = 0 \ldots z_1 = 0$, поэтому и $c_2 = 0$.

Уравненіе кривой D_1F_1 будетъ:

$$A.z_1 = P.b.x_1.\frac{l - 2b - x_1}{4}$$

Если назовемъ наибольшую ординату кривой D_1F_1 чрезъ f, то ее мы получимъ изъ предыдущаго ур-ія, сдѣлавши въ немъ

$$x_1 = \frac{l}{2} - b = t \text{ , тогда}$$

$$A.f = \frac{P.b}{4}.t\left(l - 2b - \frac{l}{2} + b\right) = \frac{P.b}{4}.t^2 . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{б}.$$

Не трудно видѣть, что то же самое соотношеніе мы получимъ и геометрическимъ путемъ, опредѣляя радіусъ окружности D_1F_1 по ф-лѣ **9**:

$$r = E.I : M = A : M.$$

Съ другой стороны полухорда, перпендикулярная къ діаметру, есть средняя пропорціональная между его отрѣзками, т. е.

$$t^2 = f.(2r - f), \text{ или приблизительно}$$

$$t^2 = 2f.r = 2f.\frac{A}{M}, \text{ откуда}$$

$$A.f = \frac{M.t^2}{2},$$

что тождественно съ ф-лой **б**.

Уголъ, который дѣлаетъ касательная къ D_1F_1 въ точкѣ D_1 съ осью x_1, называемъ чрезъ α, тогда при $x_1 = 0$

$$A.tg\alpha = \frac{P.b}{4}(l - 2b) = -c_1 \quad \dots \dots \dots \quad \text{в.}$$

в. Для нахожденія ур-ія упругой линіи CD_1 располагаемъ начало координатъ въ D_1, направляемъ ось x по горизонтали *влѣво*, а ось z— по вертикали *вверхъ*. Соблюдая правило знаковъ (§ 13), по ф-лѣ **26** пишемъ:

$$+A.\frac{d^2z}{dx^2} = +\frac{p}{2}(b^2 - x^2),$$

$$A.\frac{dz}{dx} = \frac{p}{2}\left(b^2.x - \frac{x^3}{3}\right) + c_3$$

$$A.z = \frac{p}{2}\left(b^2.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}.\frac{x^4}{4}\right) + c_3.x + c_4.$$

При $x = 0$, очевидно, $\frac{dz}{dx} = tg\alpha$.

Кромѣ этого, въ точкѣ D_1 при $x = 0 \dots z = 0$, поэтому и $c_4 = 0$.

Такимъ образомъ, ур-іе кривой CD_1 будетъ:

$$A.z = \frac{p.x^2}{24}(6b^2 - x^2) + \frac{P.b.x}{4}(l - 2b) \quad \dots \dots \dots \quad \text{г.}$$

Наибольшая ордината f_1 этой кривой получится, дѣлая въ предыдущемъ ур-іи $x = b$, тогда

$$A.f_1 = \frac{P.b^2}{24}(6l - 7b). \quad \dots \dots \dots \quad \text{д.}$$

Полная стрѣла прогиба такой балки будетъ $f + f_1 = h$.

г. Въ частномъ случаѣ, когда нагрузка $Q = 2P$ будетъ распредѣлена равномѣрно *по всей длинѣ* балки (фиг. 111), будемъ имѣть:

$$b = \frac{l}{2}, \text{ сопротивленія опоръ } P = \frac{Q}{2}.$$

Точки D_2 и F_2 (фиг. 110) сольются, и обѣ вѣтви параболы CD_2 и F_2G будутъ одною кривою, ур-іе которой вмѣсто **63** будетъ

$$M = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \quad \dots \dots \dots \quad \textbf{63,a.}$$

Разсчетный моментъ, отнесенный къ срединѣ длины балки, будетъ

$$M_0 = \frac{P.l}{4} = \frac{Q.l}{8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{68.}$$

Обѣ прямыя силъ сдвига C_1D и FP (фиг. 110) будутъ составлять продолженіе одна другой.

Ур-іе крѣпости балки будетъ:

$$\frac{Q.l}{8} = B.W \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{69.}$$

Безопасная нагрузка P_6 опредѣлится такъ:

$$P_6 = 8.B.W:l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{70.}$$

Безопасная длина балки l_6 будетъ:

$$l_6 = 8.B.W:P_6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{71}$$

Сравнивая ф-лы 70 и 59, видимъ, что

$$P_6 : P_5 = 2,$$

т. е. *въ случаѣ призматической балки, свободно лежащей на двухъ опорахъ, безопасная для балки нагрузка, распредѣленная по всей длинѣ балки равномѣрно, будетъ вдвое болѣе, чѣмъ безопасная сосредоточенная нагрузка, приложенная въ срединѣ длины балки.* Въ такомъ же отношеніи между собою находятся и безопасныя длины обѣихъ балокъ при заданной для нихъ одинаковой нагрузкѣ.

Вѣтвь D_1F_1 (фиг. 110) упругой линіи въ этомъ случаѣ исчезаетъ, т. е. $f = 0$ и $f_1 = h$. Ф-ла **в** показываетъ, что $\alpha = 0$, т. е. при совпаденіи точекъ F_1 и D_1 на срединѣ длины балки касательная въ этой общей точкѣ будетъ параллельна несогнутой оси балки. Обѣ кривыя CD_1 и F_1G будутъ представлены общимъ ур-іемъ **г** въ такомъ видѣ:

$$A.z = \frac{p.x^2}{24}\left(\frac{3}{2}\,l^2 - x^2\right).$$

Дѣлая $x = \frac{l}{2}$, находимъ

$$A.f_1 = \frac{p}{24}\cdot\frac{l^4}{4}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{24.16}\cdot p.\,l^4$$

$$f_1 = \frac{5}{384}\cdot\frac{Q.l^3}{E.I} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{72.}$$

Соединяя ф-лы 68 и 72, найдемъ допускаемую стрѣлу прогиба

$$f_6 = \frac{5}{48}\cdot\frac{B.l^2}{E.e}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{73.}$$

Сравнивая ф-лы 62 и 73, видимъ, что

$$f_5 : f_6 = 4 : 5,$$

т. е. *въ случаѣ балки, свободно лежащей на двухъ опорахъ безопасная стрѣла прогиба равномѣрно-нагруженной балки на 25°/₀ больше, чѣмъ въ случаѣ балки, нагруженной въ срединѣ длины ея сосредоточенной нагрузкой той же величины.*

Случай равномѣрнаго распредѣленія нагрузки по всей длинѣ балки имѣетъ въ практикѣ настолько большое значеніе и такъ часто встрѣчается, что, независимо отъ всего вышеизложеннаго въ § 20 по отношенію къ фиг. 110, нужно умѣть провести все вычисленіе въ стройномъ порядкѣ также и по отношенію къ фиг. 111

Отсчитывая абсциссы отъ точки C вправо, получимъ слѣдующіе результаты;

$$M = q \cdot y \cdot \frac{2b - y}{2}$$

$$V = q \cdot (b - y)$$

$$A \cdot z = q \cdot y \cdot \frac{y^3 - 4 \cdot b \cdot y^2 + 8b^3}{24}.$$

При $y = b = \frac{l}{2}$ получимъ.

$$M_D = \frac{q \cdot b^2}{2} = \frac{Q \cdot l}{8}$$

$$A \cdot h = \frac{q \cdot b}{24} \cdot 5 \cdot b^3 = \frac{5}{384} \cdot Q \cdot l^3.$$

21. **Балка свободно лежитъ на двухъ опорахъ и нагружена на части длины равномѣрно, но не симметрично** (фиг. 112). *a.* Схема нагруженія балки представлена на фиг. 112: a и b — неодинаковыя плечи балки, c — длина нагруженной части балки, Q — вся нагрузка, распредѣленная на этой длинѣ, q — нагрузка, приходящаяся на единицу длины бруса, такъ что $Q = q \cdot c$. Чрезъ y называемъ разстояніе ц. т. O нагрузки Q отъ правой опоры, т. е.

$$y = b + \frac{c}{2}.$$

Сопротивленія опоръ назовемъ чрезъ S и T. По законамъ статики получимъ:

$$\left.\begin{aligned} S &= Q \frac{y}{l} \\ T &= Q \cdot \frac{l - y}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ \text{a}$$

Въ произвольномъ сѣченіи N на разстояніи x отъ лѣвой опоры ур-іе сгиб. мом. будетъ

$$M = S \cdot x,$$

а ур-іе сѣкущаго усилія —

$$V = \frac{dM}{dx} = S = CC_1 \text{ (на фиг. 112).}$$

Кривая моментовъ на плечѣ CD будетъ прямою CD_2, гдѣ

$$M_2 = DD_2 = S \, . \, a.$$

Прямая сѣкущихъ усилій будетъ C_1D_1, параллельная оси бруса CK.

Въ произвольномъ сѣченіи N_1 (между D и H) на разстояніи x_1 отъ лѣвой опоры выраженіе сгиб. мом. будетъ:

$$M_1 = S \, . \, x_1 - q \, . \, \frac{(x_1 - a)^2}{2} \, ,$$

а ур-іе прямой сѣкущихъ усилій D_1H_1 на длинѣ DH напишется такъ:

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = S - q \, (x_1 - a) \, .$$

Въ этихъ двухъ послѣднихъ ур-іяхъ x_1 измѣняется въ предѣлахъ отъ a до $a + c$. Если сдѣлать $x_1 = a$, то получимъ $V_1 = S = V$, т. е. кривая моментовъ (парабола) $D_2F_1H_2$ въ точкѣ D_2 касательна къ прямой моментовъ CD_2. Положеніе вершины F_1 параболы опредѣлитъ точка F пересѣченія прямой силъ сдвига съ осью бруса. Обѣ эти точки д. б. на одной вертикали. Абсцисса x_1 точки F опредѣлится изъ ур-ія .... $V_1 = 0$, т. е.

$$x_1 - a = \frac{S}{q} = DF$$

$$x_1 = \frac{S}{q} + a = CF$$

При такомъ значеніи x_1 сгиб. мом. будетъ max; назовемъ этотъ моментъ чрезъ m; тогда

$$m = S \left(a + \frac{S}{q} \right) - \frac{q}{2} \, . \, \frac{S^2}{q^2} \, , \text{ или}$$

$$m = S \, . \, a + \frac{S^2}{2q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad б$$

Ур-іе крѣпости такой балки будетъ

$$m = B \, . \, W$$

б. Если мы будемъ измѣнять плечи a и b у балки, оставляя длину c нагруженной части постоянною, то сопротивленіе опоры будетъ перемѣнною величиною, будетъ функціею разстоянія y между ц. т. O нагрузки и правой опорой K. Найдемъ такое расположеніе нагрузки, при которомъ сгиб. мом. m будетъ max. Соединяя ф-лы **а** и **б**, находимъ:

$$m = \frac{Q \, . \, a}{l} \, . \, y + \frac{Q^2}{2q \, . \, l^2} \, . \, y^2 \, ,$$

$$\text{но } a = l - \frac{c}{2} - y = \gamma - y$$

$$\text{и } Q = q \, . \, c, \text{ поэтому}$$

$$m = \frac{Q \cdot y}{2l^2}(2\gamma \cdot l - 2l \cdot y + cy).$$

Для нахожденія *max* беремъ 1-ю производную отъ *m* по *y* и приравниваемъ ее нулю:

$$m = \frac{Q}{2l^2}(2\gamma \cdot l - 4l \cdot y + 2c \cdot y) = 0, \text{ откуда}$$

$$\gamma \cdot l = (2l - c) \cdot y, \text{ или}$$

$$y = \frac{l}{2}, \text{ или } a = b = \frac{l - c}{2},$$

т. е. *наиболѣе* **невыгодное** *расположеніе нагрузки на балкѣ будетъ такое, когда балка равноплечая.* При этомъ

$$S = T = \frac{Q}{2}.$$

Называя наибольшій сгиб. мом въ этомъ случаѣ чрезъ M_0, найдемъ по ф-лѣ *б*:

$$M_0 = \frac{Q}{2}\left(a + \frac{c}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{74.}$$

Въ случаѣ равномѣрнаго распредѣленія нагрузки по всей длинѣ имѣемъ $a = 0$, $c = l$ и

$$M_0 = \frac{Q \cdot l}{8},$$

что тождественно съ ф-лою **68**, которую мы имѣли выше.

Кривая моментовъ на правомъ плечѣ HK (фиг. 112) будетъ, очевидно, прямою H_2K, касательною къ параболѣ $D_2F_1H_2$ и проходящею чрезъ точку опоры K.

Прямая сѣкущихъ усилій на правомъ плечѣ балки будетъ прямою H_1T, параллельною съ осью бруса и отстоящею отъ оси на разстояніе

$$HH_1 = S - Q = -T.$$

в. Въ другомъ частномъ случаѣ, когда нагрузка прилегаетъ къ одной изъ опоръ, напр., къ лѣвой опорѣ C, но длина $DH = c$ будетъ менѣе l, прямой моментовъ CD_2 и прямой сѣкущихъ усилій C_1D_1 мы имѣть не будемъ, точка D_2 совпадаетъ съ C. Этотъ случай получится изъ предыдущаго, если сдѣлаемъ $a = 0$, тогда абсцисса опаснаго сѣченія

$$CF = \frac{S}{q}$$

и разсчетный моментъ

$$m = \frac{S^2}{2q}.$$

Если при этомъ сдѣлаемъ $c = b = \frac{l}{2}$, то $y = \frac{3}{4}$.

$$S = \frac{3}{4}Q \text{ и } T = \frac{1}{4}Q,$$

$$OF = \frac{3}{4} c = \frac{3}{8} l \text{ и}$$

$$m = \frac{S}{2} \cdot \frac{S}{q} = \frac{3}{8} Q \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{16} \cdot Q . l.$$

г. Ур-iе упругой линии и стрѣлу прогиба найдемъ только для случая, представляющаго наибольшую опасность для призматической балки, т. е. когда нагруженiе ея сдѣлано симметрично, иначе

$$a = b, \quad S = T = \frac{Q}{2}$$

Располагая начало координатъ въ точкѣ C (фиг. 112), направляя оси x и x_1 по несогнутой оси бруса CK вправо, а оси z и z_1 — по вертикали внизъ, и соблюдая правило знаковъ (§ 13), дифференцiальныя ур-iя въ частяхъ CD и DH напишемъ въ такомъ видѣ:

$$\text{для } CD \ldots -A \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} = S . x$$

$$\text{„ } DH \ldots -A \cdot \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = S . x_1 - \frac{q}{2} (x_1 - a)^2.$$

Интегрируя каждое изъ этихъ ур-iй по 2 раза, получимъ:

$$-A \cdot \frac{dz}{dx} = S . \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$-A \cdot z = \frac{S}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + c_1 . x + c_2$$

$$-A \cdot \frac{dz_1}{dx_1} = S . \frac{x_1^2}{2} - \frac{q}{2} \frac{(x_1 - a)^3}{3} + c_3$$

$$-A \cdot z_1 = \frac{S}{2} \cdot \frac{x_1^3}{3} - \frac{q}{6} \frac{(x_1 - a)^4}{4} + c_3 . x_1 + c_4.$$

Если сдѣлаемъ $x = x_1 = a$, то на вертикали чрезъ точку D обѣ вѣтви упругой линiи будутъ имѣть общую ординату и общую касательную, т. е.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz_1}{dx_1} \ldots c_1 = c_3,$$

$$z = z_1 \ldots c_2 = c_4.$$

При $x = 0 \ldots z = 0$, а потому и $c_2 = 0 = c_4$.

Затѣмъ вслѣдствiе симметрiи упругой линiи при $x_1 = \frac{l}{2}$, или

при $x_1 - a = \frac{c}{2}$, получимъ:

$$\frac{dz_1}{dx_1} = o = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{q}{6} \cdot \frac{c^3}{8} + c^3 \text{, или}$$

$$c_3 = \frac{Q}{48} (c^2 - 3 l^2) \text{, откуда}$$

$$A \cdot z_1 = -\frac{Q}{12} \cdot x_1^3 + \frac{q}{24}(x_1 - a)^4 - \frac{Q \cdot x_1}{48}(c^2 - 3\,l^2)$$

Для полученія стрѣлы прогиба f надо сдѣлать въ этомъ ур-іи $x_1 = \frac{l}{2}$

$$A \cdot f = \frac{Q}{384}(c^3 - 4\,l \cdot c^2 + 8\,l^3) \quad \ldots\ldots\ \mathbf{75}$$

Если нагрузка будетъ распредѣлена равномѣрно по всей длинѣ балки, тогда $c = l$ и

$$A \cdot f = \frac{5}{384} \cdot Q \cdot l^3,$$

что вполнѣ согласно съ ф-лой **72**; при этомъ безопасная стрѣла прогиба f_6 будетъ опредѣляться по ф-лѣ *73* (§ 20):

$$f_6 = \frac{5}{48} \cdot \frac{B \cdot l^2}{E \quad e} = \frac{1}{9{,}6} \cdot \frac{B \cdot l^2}{E \cdot e}$$

Если ф-лу **75** примѣнить къ другому частному случаю, когда вся нагрузка сосредоточена въ одной точкѣ, тогда нужно будетъ сдѣлать $c = o$:

$$A \cdot f = \frac{8}{384} \cdot Q \cdot l^3 = \frac{1}{48} \cdot Q \cdot l^3,$$

что согласно съ ф-лой **61**. Въ этомъ частномъ случаѣ изъ ф-лы 74 (§ 21 *б*) получимъ

$$M_0 = \frac{Q}{2}\ a = \frac{Q \cdot l}{4},$$

т е. получимъ ф-лу **58** (см. § 19, *а*). Опредѣляя въ этомъ случаѣ допускаемую стрѣлу прогиба, мы нашли по ф-лѣ *62*-й (§ 19, *в*):

$$f_5 = \frac{1}{12} \cdot \frac{B \cdot l^2}{E \cdot e}$$

Въ промежуточныхъ частныхъ случаяхъ между этими двумя крайними мы найдемъ и промежуточныя значенія для разсчетнаго мом $M_\circ$ и допускаемой стрѣлы прогиба. Такъ, напр., при $c = \frac{l}{2}$ и $a = \frac{l}{4}$ найдемъ по **74**-й:

$$M_\circ = \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{4} + \frac{l}{8}\right) = \frac{3}{16}\,Q \cdot l = \frac{1}{5{,}33}\,Q \cdot l = B\quad W,$$

а по **75**-й ф-лѣ:

$$A \cdot f = \frac{Q}{384}\left(\frac{l^3}{8} - 4\,l \cdot \frac{l^2}{4} + 8\,l^3\right) = \frac{7{,}125}{384} \cdot Q \cdot l^3.$$

Безопасная стрѣла прогиба будетъ

$$f' = \frac{7{,}125}{72}\ \frac{B \cdot l^2}{E \cdot e} = \frac{1}{10{,}15} \cdot \frac{B \cdot l^2}{E \cdot e}$$

Если $c = \frac{l}{3}$, то $a = \frac{l}{3}$, и тогда

$$M_0 = \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{3} + \frac{l}{12}\right) = \frac{5}{24}\,Q\,.\,l = \frac{1}{4{,}8}\,Q\,.\,l = B\,.\,W$$

$$A\,.\,f = \frac{Q}{384}\left(\frac{l^3}{27} - 4l\,.\,\frac{l^2}{9} + 8l^3\right) = \frac{7{,}6}{384}\,.\,Q\,.\,l^3$$

$$f'' = \frac{7{,}6}{80}\,.\,\frac{B\,.\,l^2}{E\,.\,e} = \frac{1}{10{,}53}\,.\,\frac{B\,.\,l^2}{E\;\;e}$$

Если $c = \frac{l}{4}$, то $a = \frac{3}{8}l$, и тогда

$$M_0 = \frac{Q}{2}\left(\frac{3}{8}l + \frac{l}{16}\right) = \frac{7}{32}\,Q\,.\,l = B\,.\,W$$

$$A\,.\,f = \frac{Q}{384}\left(\frac{l^3}{64} - 4l\,.\,\frac{l^2}{16} + 8l^3\right) = \frac{7{,}77}{384}\,.\,Q\,.\,l^3$$

$$f''' = \frac{7{,}77}{84}\,.\,\frac{B\,.\,l^2}{E\,.\,e} = \frac{1}{10{,}81}\,.\,\frac{B\,.\,l^2}{E\,.\,e}\,.$$

д. Пользуясь ф-лами **61** (§ 19) и **72** (§ 20), мы можемъ рѣшить вопросъ объ опредѣленіи сопротивленій опоръ у балки, положенной свободно на 3 опоры, лежащія на одной горизонтали. Рѣшеніе этого вопроса съ помощію 2-хъ ур-ій статики не представляется возможнымъ, т. к. изъ нихъ надо опредѣлять 3 неизвѣстныя величины. Опредѣленность подобнаго рѣшенія существуетъ только до тѣхъ поръ, пока опоръ будетъ двѣ; но если подъ балку, лежащую на двухъ опорахъ, мы подведемъ еще 3-ю опору, тогда величина давленія, которое на нее при этомъ будетъ передано, находится въ зависимости отъ того, на какой высотѣ будетъ поставлена эта опора относительно другихъ, т. е. въ какой мѣрѣ будетъ участвовать въ передачѣ давленія упругое сопротивленіе балки. Если 3-я опора будетъ только доведена до соприкосновенія съ поверхностью прогнувшейся балки, лежащей на двухъ опорахъ, тогда на эту 3-ю опору, очевидно, не будетъ передаваться еще никакого давленія, но по мѣрѣ повышенія этой новой опоры она будетъ воспринимать на себя все бóльшее и бóльшее давленіе, разгружая прежнія опоры. Новую опору всегда можно поднять настолько высоко, что все давленіе будетъ передано именно на нее, а крайнія опоры разгрузятся совершенно.

Насъ интересуетъ теперь вопросъ, каковы будутъ давленія на опоры у балки, лежащей на трехъ опорахъ, расположенныхъ на одной горизонтали, если разстоянія между опорами будутъ равны между собою, и нагрузка на балку между смежными опорами будетъ одинакова, равна Q на каждой половинѣ балки и равномѣрно распредѣлена по всей длинѣ ея.

Тогда мы представимъ себѣ сначала, что имѣемъ балку AB (фиг. 113), нагруженную снизу вверхъ силой P въ срединѣ длины

балки; отъ дѣйствія этой силы балка получитъ прогибъ кверху (см. § 19 ф-лу **61**):

$$f' = \frac{1}{48} \cdot \frac{P.l^3}{A}$$

Затѣмъ пусть имѣемъ другую балку CD (фиг. 113), положенную на 2 опоры и нагруженную на длинѣ l равномѣрной нагрузкой $2Q$; отъ дѣйствія ея балка получитъ прогибъ (см. § 20 ф-лу **72**)

$$f'' = \frac{5}{384} \cdot \frac{2Q.l^3}{A}.$$

Если мы совмѣстимъ обѣ эти балки, тогда сила P можетъ замѣнить собою дѣйствіе 3-й опоры для балки. Опредѣлимъ P подъ тѣмъ условіемъ, чтобы всѣ 3 опоры лежали на одной горизонтали; въ нашемъ случаѣ это будетъ значить, что

$$f' = f'', \text{ откуда}$$

$$P = \frac{10}{8} Q.$$

Сопротивленія крайнихъ опоръ балки EFH будутъ поэтому (фиг. 113):

$$Q - \frac{P}{2} = \frac{3}{8} Q.$$

Всѣ сопротивленія опоръ такой балки EFH вписаны на чертежѣ, причемъ ясно, что въ точкѣ F упругая линія будетъ касаться направленія EFH несогнутой оси. Слѣдов., каждую половину балки м. разсматривать, какъ защемленную однимъ концомъ въ F и свободно положенную другимъ концомъ на опору E или H; при этомъ результатъ распредѣленія нагрузки Q на обѣ опоры будетъ тотъ же самый, т. е. на свободный конецъ балки — $\frac{3}{8} Q$, а на ущемленный — $\frac{5}{8} Q$. Необходимость такого именно распредѣленія нагрузки возможно доказать еще и другимъ путемъ, пользуясь ф-лами **34** и **40** (см. §§ 15 и 16). Для этого нужно вообразить себѣ двѣ одинаковой длины балки, защемленныя однимъ концомъ въ стѣнѣ и нагруженныя на свободномъ концѣ силами: одна — сосредоточенною на концѣ силою P кверху, а другая — равномѣрно-распредѣленною по всей длинѣ нагрузкою Q книзу; 1-я балка даетъ кверху прогибъ (ф-ла 34 въ § 15,*б*):

$$h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{P.l^3}{A},$$

а 2-я балка — книзу прогибъ (ф-ла 40 въ § 16,*б*):

$$h_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{Q.l^3}{A}.$$

Если мы желаемъ дѣйствіемъ силы P замѣнить сопротивленіе свободной опоры, то мы совмѣщаемъ обѣ балки. Пусть, напр., свободная опора располагается выше защемленнаго мѣста на высоту h, тогда это буд. означать, что

$$h = h_1 - h_2 = \frac{l^3}{A}\left(\frac{P}{3} - \frac{Q}{8}\right), \text{ откуда}$$

$$P = \frac{3}{8}Q + \frac{3A.h}{l^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{ж.}$$

Если бы свободная опора была поставлена *ниже* ущемленнаго мѣста на высоту h, то во 2-й части ур-ія **ж** надо было бы поставить знакъ *минусъ*. Наконецъ, если обѣ опоры — на одной высотѣ, то $h = 0$ и

$$P = \frac{3}{8}Q,$$

т. е. на свободную опору будетъ передаваться $\frac{3}{8}$ всей нагрузки, а на защемленный конецъ — $\frac{5}{8}$ ея, — тотъ самый результатъ, который мы получили выше.

22. **Балка защемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ, другимъ свободно лежитъ на опорѣ и равномѣрно нагружена по всей длинѣ** (фиг. 114). *a*. Схема нагруженія балки представлена на фиг. 114: C—защемленный конецъ балки, D—свободный, S и T—сопротивленія опоръ. Изъ предыдущаго § намъ извѣстно, что

$$S = \frac{5}{8}Q, \quad T = \frac{3}{8}Q,$$

$$S + T = Q = q\,.\,l.$$

Но тотъ же самый результатъ можно получить еще и другимъ способомъ, болѣе быстро и непосредственно. Это даетъ намъ возможность сдѣлать ф-ла 27-я (см. § 14). Примемъ въ ней $a = l$, т. е. будемъ вести интегрированіе на всей длинѣ балки, тогда для точки $C \ldots h = 0$ и $tg\alpha = 0$, а во 2-й части равенства **27** сдѣлаемъ интегрированіе по x, написавъ выраженіе сгибающаго момента въ произвольномъ сѣченіи N такимъ образомъ:

$$M = T.x - \frac{q.x^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{L.}$$

Тогда

$$0 = \int_0^l \left(T.x - \frac{q.x^2}{2}\right).x.dx, \text{ или}$$

$$0 = T.\frac{l^3}{3} - \frac{q}{2}.\frac{l^4}{4}, \text{ откуда}$$

$$T = \frac{3}{8} Q = \frac{3}{8} q . l.$$

Кривая моментовъ, какъ показываетъ ур-іе **L**, будетъ въ этомъ случаѣ парабола DF_1C_2. При $x = 0$ и $M = 0$, т. е. парабола проходитъ чрезъ точку D. Для нахожденія координаты вершины параболы F_1 беремъ 1-ю производную отъ M по x:

$$V = \frac{dM}{dx} = T - q . x . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{J}.$$

$$V = 0, \text{ если } x_1 = T : q = \frac{3}{8} l = DF.$$

При такомъ значеніи x моментъ M будетъ имѣть аналитическій *max*. Назовемъ его выраженіе чрезъ M_1, тогда

$$M_1 = \left(\frac{3}{8} q . l - \frac{q}{2} . \frac{3}{8} l\right) \frac{3}{8} l = \frac{9}{128} . q . l^2, \text{ или}$$

$$M_1 = \frac{1}{14,22} . Q . l.$$

Парабола моментовъ пересѣчетъ ось балки CD въ точкѣ H, абсцисса которой x_0 найдется, сдѣлавши $M = 0$. Изъ ур-ія **L** получаемъ

$$x_0 = 2\ T ; q = 2 x_1 = DH,$$

т. е. $DF = FH$, какъ и слѣдовало ожидать. При значеніяхъ x, большихъ x_0, сгибающій моментъ, очевидно, будетъ отрицательнымъ, и при $x = l$ мы получаемъ моментъ защемленія

$$M_2 = \frac{3}{8} q . l^2 - \frac{q . l^2}{2} = - \frac{q . l^2}{8}$$

$$M_2 = CC_2 = - \frac{Q . l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{76}.$$

Измѣненіе знака у сгибающаго момента съ плюса на минусъ сопровождается переходомъ момента чрезъ нулевое значеніе его въ точкѣ H. Въ этомъ поперечномъ сѣченіи (см. ф-лу **9**) имѣемъ

$$r = \frac{E . I}{M} = \infty,$$

т. е., если провести вертикаль HH_1, то на упругой линіи она отмѣтитъ точку перегиба кривой H_1, и на протяженіи CH_1 упругая линія будетъ обращена къ оси бруса своею выпуклостію, а на части DH_1— своею вогнутостію.

По абсолютной величинѣ оказывается $M_2 > M_1$, слѣдовательно, опаснымъ сѣченіемъ такой балки будетъ защемленное сѣченіе C, для котораго ур-іе крѣпости напишется такъ:

$$\frac{Q . l}{8} = BW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{77}.$$

Это ур-іе ничѣмъ не отличается отъ ур-ія **69** (§ 20, г), которое мы имѣли для равномѣрно-нагруженной балки съ обоими свободными концами; поэтому безопасная нагрузка и длина балки могутъ быть вычисляемы здѣсь по ф-ламъ **70** и **71**. Другими словами, въ случаѣ балки, равномѣрно нагруженной по всей длинѣ, защемленіе одного конца балки крѣпости ея не увеличиваетъ; балка потребуется тѣхъ же самыхъ размѣровъ, какъ и въ случаѣ обоихъ свободныхъ концовъ у нея; и вся разница между ними до сихъ поръ оказывается только въ другомъ распредѣленій давленій на опоры, въ передачѣ значительно большаго давленія на стѣну, чѣмъ на свободную опору.

Прямая силъ сдвига, представляемая ур-іемъ **J**, будетъ C_1FT, для которой

$$DT = \frac{3}{8}Q, \quad CC_1 = -\frac{5}{8}Q.$$

б. Для полученія ур-ія упругой линіи располагаемъ оси координатъ такимъ образомъ: начало ихъ — въ точкѣ D, ось x—по оси CD *влѣво*, ось z—по вертикали *внизъ*. Принимая во вниманіе правило знаковъ (§ 13), дифф. ур-іе упругой линіи напишемъ такъ:

$$-A \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = T \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{г}.$$

Примѣчаніе. Не нужно думать, что вѣтви CH_1 и H_1D (фиг. 114) упругой линіи будутъ имѣть различныя ур-ія. Легко убѣдиться въ томъ, что это будетъ одна непрерывная кривая. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы взяли произвольное сѣченіе N_1 на такомъ разстояніи x_1 отъ опоры D, которое болѣе DH, тогда сгиб. моментъ въ этомъ сѣченіи имѣлъ бы слѣд. знаки (см. § 13):

$$-\left(T \cdot x_1 - \frac{q \cdot x_1^2}{2}\right),$$

т. е. обратные тѣмъ, которые были въ предыдущемъ ур-іи **г**; но въ сѣченіи N_1 (по тому же § 13) и знакъ у радіуса кривизны долженъ быть плюсъ, а не минусъ; слѣдовательно, когда придется писать дифф. ур-іе для части CH_1, нужно будетъ въ ур-іи **г** измѣнить всѣ знаки на обратные, а составъ ур-ія останется тотъ же; поэтому вся кривая CH_1D будетъ представлена однимъ общимъ ур-іемъ. Это замѣчаніе одинаково относится ко всѣмъ способамъ нагруженія балокъ, при которыхъ сгибающій моментъ переходитъ между опорами чрезъ нулевое значеніе, и въ дальнѣйшемъ изложеніи мы неоднократно будемъ отмѣчать эту особенность упругой линіи съ точками перегиба.

Интегрируемъ теперь ур-іе **г** два раза. Для этого сначала приведемъ его къ слѣд. виду:

$$+A \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{q}{8}(4x^2 - 3l \cdot x)$$

$$A.\frac{dz}{dx}=\frac{q}{8}\left(4.\frac{x^3}{3}-3l.\frac{x^2}{2}\right)+c_1$$

$$A.z=\frac{q}{8}\left(\frac{4}{3}.\frac{x^4}{4}-\frac{3l}{2}.\frac{x^3}{3}\right)+c_1.x+c_2.$$

Въ точкѣ C при $x=l\ldots\ldots\frac{dz}{dx}=0$, слѣд.

$$0=\frac{q.l^3}{8}\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)+c_1,\quad \text{откуда}$$

$$c_1=+\frac{q.l^3}{48}.$$

Въ точкѣ D при $x=0\ldots\ldots z=0$, слѣд. и $c_2=0$.

Послѣ этого предыдущія ур-ія м. написать въ так. видѣ:

$$A.\frac{dz}{dx}=\frac{q}{48}(8x^3-9l.x^2+l^3)$$

$$A.z=\frac{q}{48}(2x^4-3lx^3+l^3.x).$$

Max ординаты мы получимъ при значеніи x, опредѣляющемся изъ ур-ія $\frac{dz}{dx}=0$, но это ур-іе должно имѣть одно рѣшеніе въ видѣ $x=l$, поэтому составляемъ

$$\frac{8x^3-9l.x^2+l^3}{x-l}=8x^2-l.x-l^2=0;$$

откуда

$$x=\frac{1}{16}l\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}l\right)^2+\frac{1}{8}.l^2}.$$

Очевидно, надо взять рѣшеніе по плюсу; оно даетъ

$$x=\frac{1+\sqrt{33}}{16}.l=0{,}4215.l.$$

Вставляя это значеніе x для опредѣленія стрѣлы прогиба f въ ур-іе упругой линіи, найдемъ

$$A.f=\frac{1}{185}.Q.l^3 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{78}.$$

Безопасную стрѣлу прогиба f_7 получимъ, соединяя эту ф-лу съ 77:

$$f_7=\frac{8}{185}.\frac{B.l^2}{E.e}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{79}.$$

Сравнивая ф-лу **73** (§ 20,*г*) и ф-лу **79**, видимъ, что

$$f_7:f_6=\frac{8}{185}:\frac{5}{48}=0{,}415.$$

Слѣд., преимущество ущемленной балки передъ свободной заключается въ томъ, что стрѣла получается у нея почти въ $2^1/_2$ раза менѣе, чѣмъ у балки свободной, при одинаковой ихъ крѣпости.

23. **Балка защемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ, а свободный конецъ ея сгибаютъ 2 сосредоточенные груза.** *a.* Схема нагруженія балки грузами Q и P представлена на фиг 115: a и b — плечи балки; $a + b = l$. Сгибающій мом. для сѣченія N, отстоящаго на разстояніе x отъ точки приложенія силы Q, будетъ

$$M = Q.x.$$

Это ур-іе представляетъ прямую моментовъ D_1F_2. Она засѣкаетъ на вертикали чрезъ точку приложенія силы P моментъ M_2, наибольшій на правомъ плечѣ балки

$$M_2 = Q.a = F_1F_2.$$

Сгиб. мом. въ сѣченіи N_1, отстоящемъ отъ точки приложенія силы Q, на разстояніе x_1 напишется такъ:

$$M_1 = Q.x_1 - P(x_1 - a)$$

Это — ур-іе прямой моментовъ, проходящей чрезъ точку F_2. При различныхъ соотношеніяхъ между величинами грузовъ P и Q и плечъ балки a и b возможны 5 различныхъ расположеній этой прямой моментовъ — CF_2, C_1F_2, C_2F_2, C_3F_2 и C_4F_2 Точка пересѣченія прямой моментовъ съ осью бруса опредѣлится абсциссою x_1, получаемою изъ ур-ія $M_1 = 0$ или

$$P.a - (P - Q).x_1 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$x_1 = \frac{P.a}{P - Q} = D_1H.$$

Удобнѣе слѣдить за измѣненіемъ величины $y = l - x_1 = CH$.

$$y = l - \frac{P.a}{P - Q} = \frac{P.b - Q.l}{P - Q}$$

Если $P.b - Q.l = 0$, т. е. $\frac{P}{Q} = \frac{l}{b}$, то $y = 0$, т. е. прямою моментовъ будетъ CF_2, и моментъ защемленія въ этомъ случаѣ равенъ нулю: опаснымъ сѣч. балки будетъ F_1, и ур-іе крѣпости ея будетъ $Q.a = B.W$.

Прямой C_1F_2 соотвѣтствуетъ такой случай нагруженія, когда $y > 0$, и когда это получается при существованіи соотношеній

$$P.b > Q.l \quad \text{и} \quad P > Q,$$

т. е. когда и числитель, и знаменатель дроби, опредѣляющей y, оба положительны. Напр., $P = 2Q$, тогда нужно имѣть

$$2Q.b > Q.l, \text{ или } 2b > l.$$

Пусть $b = \frac{2}{3}l$, тогда $y = \frac{1}{3}l$.

Величина $y > 0$ можетъ имѣть мѣсто и въ случаѣ прямой моментовъ C_3F_2 Для этого нужно соблюсти слѣд. условія

$$P.b < Q.l \text{ и } P < Q,$$

т. е. и числитель, и знаменатель у дроби y должны быть отрицательны. Напрм., условіе $Q = 2P$ требуетъ, чтобы мы имѣли

$$P.b < 2P.l, \text{ т. е. } b < 2l,$$

а это условіе само собою всегда выполняется; стало быть, важно только соблюсти 2-е условіе—$P < Q$. Пусть и здѣсь $b = \frac{2}{3}l$, тогда получаемъ $y = \frac{4}{3}l$.

Прямой моментовъ F_2C_4 соотвѣтствуетъ такой случай, когда $y < 0$ вслѣдствіе того, что

$$P.b < Q.l \text{ и } P > Q.$$

Алгебраически $y < 0$ можно имѣть и тогда еще, когда

$$P.b > Q.l \text{ и } P < Q,$$

но по смыслу задачи выполнеие такихъ условій невозможно, ибо всегда $b < l$.

Наконецъ прямая моментовъ C_2F_2, параллельная оси бруса, получится тогда, когда $P = Q$ и $y = \infty$, т. е. въ случаѣ дѣйствія на балку пары силъ. При этомъ условіи выходитъ

$$M_1 = P.a = const.,$$

и часть бруса CF_1 будетъ изгибаться по окружности.

б. Какой бы случай мы не имѣли упругая линія FD будетъ имѣть одно ур-іе, а CF—другое, и притомъ вся часть CF будетъ представлена однимъ ур-іемъ, хотя бы на этой линіи была и точка перегиба въ сѣченіи H (см. примѣч въ § 22 *б*).

Для составленія ур-ій упругой линіи выберемъ оси координатъ: начало ихъ — въ D (фиг. 115), оси x и x_1 — по горизонтали *влѣво*, оси z и z_1 — по вертикали *внизъ*. Соблюдая правило знаковъ (§ 13), для части FD напишемъ:

$$\left.\begin{aligned} -A.\frac{d^2z}{dx^2} &= +Q.x = +M \\ -A.\frac{dz}{dx} &= Q.\frac{x^2}{2} + c_1 \\ -A.z &= \frac{Q}{2}.\frac{x^3}{3} + c_1.x + c_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ \mathbf{A}.$$

Такимъ же образомъ для части CF получимъ:

$$-A \cdot \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = +M_1 = Q \cdot x_1 - P(x_1 - a)$$

$$-A \cdot \frac{dz_1}{dx_1} = Q \cdot \frac{x_1^2}{2} - \frac{P \cdot (x_1 - a)^2}{2} + c_3$$

$$-A \cdot z_1 = \frac{Q}{2} \cdot \frac{x_1^3}{3} - \frac{P}{2} \cdot \frac{(x_1 - a)^3}{3} + c_3 \cdot x_1 + c_4$$

Въ точкѣ F при $x = x_1 = a$ . . . $\frac{dz}{dx} = \frac{dz_1}{dx_1}$ . . . $c_1 = c_3$

» » . . . . $z = z_1$ . . . . $c_2 = c_4$.

Въ точкѣ D при $x = 0$ . . . $z = 0$ . . . $c_2 = 0 = c_4$.

Въ точкѣ C при $x_1 = l$ . . . $\frac{dz_1}{dx_1} = 0$, или

$$0 = \frac{Q \cdot l^2}{2} - \frac{P \cdot b^2}{2} + c_3, \text{ откуда}$$

$$c_3 = \frac{P \cdot b^2 - Q \cdot l^2}{2} = c_1$$

Ординату точки C, равную $DD_1 = h$ получимъ, сдѣлавъ $x_1 = l$, тогда

$$-A \cdot h = \frac{Q \cdot l^3}{6} - \frac{P \cdot b^3}{6} + \frac{P \cdot b^2 - Q \cdot l^2}{2} \cdot l, \text{ или}$$

$$A \cdot h = \frac{Q \cdot l^3}{3} - \frac{P \cdot b^2}{6} (3l - b) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{80.}$$

в. Если бы въ этомъ примѣрѣ начало координатъ расположили не въ D, а въ D_1, то разница вышла бы только при опредѣленіи произвольныхъ постоянныхъ. Условія относительно точки F и здѣсь имѣли бы мѣсто, поэтому опять получили бы

$$c_1 = c_3 \quad \text{и} \quad c_2 = c_4.$$

Точно также и c_3 получилось бы изъ условія для точки C, по которому при $x_1 = l$ . . . . $\frac{dz_1}{dx_1} = 0$, слѣд.

$$c_3 = \frac{P \cdot b^2 - Q \cdot l^2}{2} = c_1.$$

Но опредѣленіе c_2 и c_4 здѣсь нужно было бы вести уже иначе, взявъ для точки C . . . . . $x_1 = l$ и $z_1 = 0$, тогда

$$0 = \frac{Q \cdot l^3}{6} - \frac{P \cdot b^3}{6} + c_3 \cdot l + c_4, \quad \text{откуда}$$

$$c_4 = \frac{Q \cdot l^3}{3} - \frac{P \cdot b^2}{6}(3l - b) = c_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{m.}$$

Разстоянie DD_1 здѣсь придется опредѣлить изъ условія:

$$\text{при } x=0 \ldots\ldots z=h=DD_1=-\frac{c_2}{A},$$

что вполнѣ согласно съ ф-лой **80**.

г. Для практики представляетъ особый интересъ такой случай, когда $h=DD_1=0$ (фиг. 115), т. е. когда (по ф-лѣ 80):

$$Q=P.\frac{b^2(3l-b)}{2l^3} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{81.}$$

Вычисленная по этой ф-лѣ величина Q буд. представлять собою сопротивленiе опоры у балки, однимъ концомъ защемленной, а другимъ лежащей свободно на опорѣ и нагруженной однимъ сосредоточеннымъ грузомъ P. Если при этомъ положить $a=b=\frac{l}{2}$, то

$$Q=\frac{5}{16}P,$$

а на другую опору защемленнымъ концомъ будетъ передано $\frac{11}{16}P$. Выраженiе момента M_2 (§ 23*a*) въ точкѣ F_1 будетъ

$$M_2=\frac{5}{16}.P.\frac{l}{2}=\frac{5}{32}P.l;$$

а въ точкѣ C выраженiе момента назыв. чрезъ M_3. Его получимъ, сдѣлавъ въ выраженiи M_1 (§ 23*a*) $x_1=l$:

$$M_3=\frac{5}{16}P.l-P.\frac{l}{2}=-\frac{3}{16}P.l.$$

По абсолютной величинѣ $M_3>M_2$, поэтому опаснымъ сѣченiемъ будетъ C, и *ур-ге крѣпости* для него напишется такъ:

$$\frac{3}{16}P.l=B.W \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{82.}$$

Безопасная нагрузка P_8 получится такъ:

$$P_8=\frac{16}{3}.B.W:l \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{83,}$$

и *безопасная длина балки*

$$l_8=\frac{16}{3}.B.W.P \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{84.}$$

Сравнивая эти формулы съ 59 и 60 (§ 19*a*) для балки съ концами свободными, видимъ, что:

$$P_8:P_5=l_8:l_5=4:3.$$

д. Оси координатъ расположимъ въ этомъ частномъ случаѣ такъ же, какъ въ § 23*b*, тогда (см. ф-лу *m*):

$$c_4=c_2=0 \quad \text{и}$$

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{2}\left(P.\frac{l^2}{4} - \frac{5}{16}P.l^2\right) = -\frac{P.l^2}{32}.$$

По ф-ламъ A въ § 23*б* имѣемъ

$$-A.\frac{dz}{dx} = \frac{P}{32}(5x^2 - l^2).$$

$$-A.z = \frac{P}{32}\left(5.\frac{x^3}{3} - l^2.x\right).$$

Max ординаты, т. е. стрѣла прогиба f, получится при значеніи x, опредѣляемомъ изъ ур-ія $5x^2 - l^2 = 0$, откуда

$$x = l : \sqrt{5};$$

а сама стрѣла будетъ

$$A.f = \frac{P}{32}\cdot\frac{l}{\sqrt{5}}\left(l^2 - \frac{5}{3}\cdot\frac{l^2}{5}\right),\text{ или}$$

$$f = \frac{1}{48\sqrt{5}}\cdot\frac{P.l^3}{E\ J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{85.}$$

Въ случаѣ балки со свободными концами мы имѣли для опредѣленія стрѣлы ф-лу **61** (см. § 19*b*).

Безопасную стрѣлу прогиба f_8 получимъ, соединяя ур-ія *82* и *85*:

$$f_8 = \frac{1}{9\sqrt{5}}\cdot\frac{B}{E}\,\frac{l^2}{e}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{86.}$$

Отношеніе безопасныхъ стрѣлъ прогиба у балки съ обоими свободными концами и у балки съ однимъ свободнымъ, а другимъ — защемленнымъ при одинаковой ихъ крѣпости — получится, сравнивая ф-лы **62** (§ 19*b*) и **86**:

$$f_5 : f_8 = 3\sqrt{5} : 4 = 1{,}652.$$

А если у обѣихъ балокъ будутъ одинаковые размѣры, взятые по размѣрамъ балки со свободными обоими концами, то отношеніе стрѣлъ будетъ равно $\sqrt{5} = 2{,}236$.

24. **Балка своими концами свободно положена на двѣ опоры и нагружена двумя сосредоточенными грузами между опорами.** *a.* Схема нагруженія балки двумя грузами P_1 и P_2 представлена на фиг. 116: a_1 и a_2 — плечи нагрузокъ относительно опоры C; b_1 и b_2 — относительно опоры D, такъ что

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = l.$$

Сопротивленія опоръ по правиламъ статики выразятся такъ:

$$V = \frac{P_1.b_1 + P_2.b_2}{l},$$

$$U = \frac{P_1.a_1 + P_2.a_2}{l}.$$

Въ произвольномъ сѣченіи N балки на разстояніи x отъ лѣвой опоры сгиб. мом. будетъ

$$M = V . x ,$$

т. е. прямая моментовъ будетъ CE_1, пересѣкающая ось бруса въ C, а прямая силъ сдвига будетъ параллельна оси бруса и отстоять отъ нея на разстояніе V.

Въ произвольномъ сѣченіи N_1 на разстояніи x_1 отъ лѣвой опоры сгиб. мом. будетъ

$$M_1 = V . x_1 - P_1 (x_1 - a_1) , \text{ или}$$

$$M_1 = P_1 . a_1 - (P_1 - V) . x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \text{ ю}$$

Прямая моментовъ при измѣненіи x_1 въ предѣлахъ отъ a_1 до a_2 будетъ E_1F_1. Начиная съ точки E_1 моменты могутъ или все возрастать, или все убывать, или наконецъ оставаться постоянными. Это будетъ зависѣть отъ знака у разности $P_1 - V$ въ ф-лѣ ю:

$$P_1 - V = \frac{P_1 (a_1 + b_1) - P_1 . b_1 - P_2 . b_2}{l} = \frac{P_1 . a_1 - P_2 . b_2}{l}$$

Слѣд., если $P_1 . a_1 > P_2 . b_2$, тогда и $P_1 - V > O$, поэтому M_1 будетъ убывать съ увеличеніемъ x_1, опасное сѣченіе балки будетъ E, и ур-іе крѣпости для него —

$$V . a_1 = B . W.$$

Если $P_1 . a_1 < P_2 . a_2$, тогда $P_1 - V < o$, величина M_1 будетъ возрастать съ увеличеніемъ x_1, опасное сѣченіе балки будетъ въ F, и ур-іе крѣпости для него —

$$U . b_2 = B . W_2 .$$

Наконецъ, если $P_1 . a_1 - P_2 . b_2$, то $V = P_1$ и $U = P_2$, т. е. *если заданныя нагрузки обратно пропорціональны внѣшнимъ плечамъ балки, то величина сопротивленія опоры = величинѣ смежно расположенной съ нею нагрузки, и сгибающій моментъ въ сѣченіяхъ между точками приложенія нагрузокъ сохраняетъ тогда постоянную величину*, не взирая на несимметрію нагруженія балки (фиг. 117).

На части бруса EF сѣкущее усиліе $V_1 = V - P_1$. Оно м. б., какъ видно, и больше нуля, и меньше нуля, и равно нулю.

Выполненіе условія $P_1 a_1 = P_2 b_2$ у балки *съ одинаковыми плечами* a_1 и b_2 требуетъ, чтобы и силы P_1 и P_2 были одинаковы (фиг. 118).

Въ обоихъ послѣднихъ случаяхъ часть балки EF будетъ гнуться по дугѣ круга (см. ф-лу 9 въ § 3), всѣ сѣченія балки между E и F будутъ равноопасны, и ур-іе крѣпости балки будетъ:

$$P_1 . a_1 = P_2 . b_2 = B . W.$$

Безопасная нагрузка

$$P_1 = P_2 = B . W : a,$$

т. е. она совсѣмъ не зависитъ отъ длины балки, а только отъ внѣшнихъ плечъ балки Это свойство балки нагруженной двумя грузами, является весьма цѣннымъ и позволяетъ осуществлять длинныя балки весьма легкими.

Безопасная длина балки въ этомъ случаѣ не м. б. опредѣлена изъ ур-ія крѣпости; ее придется опредѣлять по заданной допускаемой стрѣлѣ прогиба.

б. Выводъ ур-ій упругой линіи и опредѣленіе стрѣлы прогиба мы приведемъ здѣсь для того частнаго случая, когда $P_1 = P_2 = P$ и $a_1 = b_2 = d$; тогда $V = U = P$ (фиг. 118).

Начало координатъ беремъ въ точкѣ C (фиг. 118), оси x и x_1 направляемъ по оси балки CD, а оси z и z_1 — по вертикали *внизъ*.

Соблюдая правило знаковъ (§ 13), дифф. ур-іе упругой линіи CE_1 пишемъ такъ:

$$-A\ \frac{d^2z}{dx^2} = P \cdot x$$

$$-A \cdot \frac{dz}{dx} = P \cdot \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$-A \cdot z = \frac{P}{2}\ \frac{x^3}{3} + c_1 \cdot x + c_2.$$

Для кривой E_1F_1 ур-ія будутъ:

$$-A \cdot \frac{d^2z_1}{dx_1^{\,2}} = P \cdot d$$

$$-A \cdot \frac{dz_1}{dx_1} = P \cdot d\ \ x_1 + c_3$$

$$-A \cdot z_1 = P\ \ d \cdot \frac{x_1^{\,2}}{2} + c_3 \cdot x_1 + c_4.$$

Въ точкѣ C при $x = 0$ . . . . $z = 0$, потому и $c_2 = 0$.

Въ точкѣ E_1 при $x = x_1 = d$ . . . . . . $\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{dz}{dx}$, поэтому

$$\frac{P \cdot d^2}{2} + c_1 = P \cdot d^2 + c_3, \quad \text{откуда}$$

$$c_1 = c_3 + \frac{P \cdot d^2}{2}.$$

Въ срединѣ длины бруса (при балкѣ симметрично-нагруженной)

$$\text{при} \quad x_1 = \frac{l}{2} \cdot \ . \ . \ . \ . \ . \ \frac{dz_1}{dx_1} = 0 = \frac{P \cdot d \cdot l}{2} + c_3,$$

$$\text{или} \quad c_3 = -\frac{P \cdot d \cdot l}{2}, \ \text{а потому}$$

$$c_1 = -\ \frac{P \cdot d}{2}(l - d).$$

Наконецъ, въ точкѣ E_1 при $x = x_1 = d \ldots\ldots z = z_1$, слѣд

$$\frac{P\,.\,d^3}{6} - \frac{P\,.\,d^2}{2}(l-d) = \frac{P\,.\,d^3}{2} - \frac{P\,.\,d^2\,.\,l}{2} + c_4,$$

$$\text{откуда } c_4 = \frac{P\,.\,d^3}{6}.$$

Ур-ія упругой линіи будутъ:

$$CE_1 \ldots\ldots A\,.\,z = \frac{P\,.\,d}{2}(l-d)\,.\,x - \frac{P\,.\,x^3}{6}$$

$$EF_1 \ldots\ldots A\,.\,z_1 = \frac{P\,.\,d}{6}\,.\,(3l\,.\,x_1 - 3x_1^2 - d^2).$$

в. Стрѣлу прогиба h получимъ, сдѣлавъ въ этомъ ур-іи $x_1 = \frac{l}{2}$, тогда:

$$A\,.\,h = \frac{P\,.\,d}{6}\left(\frac{3}{4}l^2 - d^2\right) \;\ldots\ldots\ldots\; \mathbf{87.}$$

Безопасную стрѣлу f получимъ, внося въ это ур-іе $B\,.\,W$ вмѣсто $P\,.\,d$; тогда

$$f = \frac{B}{6E\;e}\left(\frac{3}{4}l^2 - d^2\right). \;\ldots\ldots\ldots\; \mathbf{88.}$$

Видимъ, что безопасная стрѣла зависитъ въ этомъ случаѣ не только отъ всей длины балки, но и отъ крайнихъ плечъ ея d.

Для повѣрки вычисленія сдѣлаемъ $d = \frac{l}{2}$; это будетъ обозначать, что обѣ нагрузки P будутъ приложены въ срединѣ длины бруса, и ф-ла **87** обратится въ такую:

$$A\,.\,h = \frac{P}{6}\;\frac{l}{2}\left(\frac{3}{4}l^2 - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{P\,.\,l^3}{24},$$

что вполнѣ согласно съ ф-лою **61** въ § 19*b*.

г. Въ частномъ случаѣ, когда сдѣлаемъ $d = \frac{l}{4}$, получимъ изъ ф-лы 87-й

$$A\,.\,h_1 = \frac{P}{6}\,.\,\frac{l}{4}\left(\frac{3}{4}l^2 - \frac{l^2}{16}\right) = \frac{11}{8\,.\,48}\,.\,P\,.\,l^3. \;\ldots\ldots\; \mathbf{89.}$$

Этой ф-лою м. пользоваться при вычисленіи сопротивленій опоръ у балки, свободно положенной на 3 опоры, при равныхъ разстояніяхъ между опорами и равныхъ нагрузкахъ P, сосредоточенныхъ въ срединѣ длины между опорами. Для этого вообразимъ себѣ 2 балки — одну, нагруженную силами P тѣмъ способомъ, который былъ предположенъ при выводѣ ф-лы **89**, а другую, свободно положенную на 2 опоры съ тѣмъ же разстояніемъ l между ними и нагруженную одною сосредоточенною нагрузкою Q, приложенною въ срединѣ длины балки и на-

правленною кверху. Первая балка прогнется книзу на величину h_1, вычисляемую по ф-лѣ **89**, а вторая — кверху на величину h, опредѣляемую по ф-лѣ 61 въ § 19*b*, т. е.

$$A.h = \frac{1}{48}.Q.l^3.$$

Если необходимо имѣть всѣ 3 опоры у балки расположенными на одной высотѣ, тогда это приводится къ равенству $h = h_1$, что даетъ намъ сопротивленіе средней опоры $Q = \frac{11}{8} P$, а крайнихъ — по $\frac{5}{16} P$. Этотъ результатъ находится въ полномъ согласіи съ данными § 23 *г*, гдѣ разсмотрѣнъ частный случай отъ этого общаго.

25. **Балка защемлена обоими концами въ стѣнахъ и нагружена однимъ сосредоточеннымъ грузомъ.** *a*. Схема нагруженія балки представлена на фиг. 119: плечи балки—$AC = a$, $BC = b$, нагрузка—P, сопротивленія опоръ—S и T, моменты защемленія концовъ балки—m и n. Эти 4 послѣднихъ величины неизвѣстны, и двухъ ур-ій статики для ихъ опредѣленія было бы недостаточно. Къ нимъ нужно добавить еще 2 ур-ія, которыя пусть выражаютъ, что въ точкахъ A и B защемленіе у балки совершенное, т. е. $tg\,\alpha = 0$, и что опоры A и B расположены на одномъ уровнѣ.

Принимая точку A за центръ моментовъ, условіе равновѣсія напишемъ въ такомъ видѣ:

$$n - S.l + P.a - m = 0, \text{ откуда}$$

$$S = \frac{n - m}{l} + P.\frac{a}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ж.}$$

Такимъ же образомъ получили бы

$$T = \frac{m - n}{l} + P.\frac{b}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{i.}$$

и

$$S + T = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{к.}$$

Возьмемъ произвольное сѣченіе N на разстояніи x отъ лѣвой опоры и на разстояніи y отъ правой. Выраженіе сгибающаго момента M въ этомъ сѣченіи въ функціи отъ y напишется такъ:

$$M = n - S.y + P.(y - b),$$

причемъ послѣдній членъ въ этомъ выраженіи появляется только тогда, когда y измѣняется въ предѣлахъ отъ b до l. Примѣнимъ къ этой балкѣ ф-лу **27** (см. § 14), замѣняя въ ней a чрезъ l, внося вмѣсто M предыдущее выраженіе и дѣлая въ ней

$$h = 0 \text{ и } tg\ \alpha = 0:$$

$$0 = n.\frac{l^2}{2} - S.\frac{l^3}{3} + P\left(\frac{l^3 - b^3}{3} - b^2.\frac{l^2 - b^2}{2}\right) \quad \ldots \text{u.}$$

Замѣняя въ этомъ ур-іи n чрезъ m, а также S чрезъ T и b чрезъ a, получимъ аналогично съ предыдущимъ:

$$o = m \cdot \frac{l^2}{2} - T \cdot \frac{l^3}{3} + P\left(\frac{l^3 - a^3}{3} - a \cdot \frac{l^2 - a^2}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{v}.$$

Вычитая эти ур-ія одно изъ другого, получимъ:

$$o = (n - m) \cdot \frac{l^2}{2} - (S - T) \cdot \frac{l^3}{3} + P\left(\frac{a - b}{2} \cdot l^2 + \frac{b^3 - a^3}{6}\right)$$

Соединяя затѣмъ ур-ія i и $ж$, мы получимъ изъ нихъ:

$$S - T = 2 \cdot \frac{n - m}{l} + P \cdot \frac{a - b}{l}$$

Внося эту разность въ предыдущее ур-іе, получаемъ:

$$(n - m) \cdot l^2 = P \cdot l^2 (a - b) + P (b^3 - a^3), \text{ или}$$

$$(n - m) \cdot l^2 = P \cdot (a - b) \cdot [l^2 - (b^2 + ab + a^2)], \text{ или}$$

$$n - m = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \cdot \frac{a - b}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{t}.$$

Если сложимъ ур-ія u и v, то получимъ:

$$o = \frac{m + n}{2} \cdot l^2 - \frac{S + T}{3} \cdot l^3 + P\left\{\frac{2\, l^3}{3} - \frac{a + b}{2} \cdot l^2 + \frac{a^3 + b^3}{6}\right\}$$

Дѣлая въ этой ф-лѣ приведенія на основаніи ф-лы k этого §, найдемъ:

$$\frac{m + n}{2} \cdot l^2 = P \cdot \frac{l^3 - a^3 - b^3}{6}, \text{ откуда}$$

$$m + n = P \cdot \frac{a \cdot b}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{w}$$

Ф-лы t и w показываютъ намъ слѣдующее:

1. *Сумма опорныхъ моментовъ балки съ обоими ущемленными концами равна нагрузкѣ, умноженной на произведенія плечъ балки и раздѣленной на ея длину.* Если бы та же самая балка была со свободными концами, то сумма $m + n$ представляла бы для нея разсчетный моментъ (см. ф-лу *56* въ § *19 a*).

2. *Разность опорныхъ моментовъ равняется ихъ суммѣ, умноженной на отношеніе разности плечъ балки къ ея полной длинѣ.*

б. Для опредѣленія величины каждаго изъ опорныхъ моментовъ остается рѣшить ур-ія t и w относительно m и n:

$$2\, n = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}\left(\frac{a - b}{l} + 1\right), \text{ откуда}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = \frac{P \, . \, a^2 \, . \, b}{l^2} = \frac{m + n}{l} \, . \, a \\ m = \frac{P \, . \, a \, . \, b^2}{l^2} = \frac{m + n}{l} \, . \, b \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{90}$$

$$m : n = b : a \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{90,a.}$$

Эти ф-лы показываютъ слѣдующее:

1. *Величины опорныхъ моментовъ защемленной балки обратно пропорціональны ея плечамъ.*

2. *Величина каждаго изъ опорныхъ моментовъ получается, умножая ихъ сумму на отношеніе контръ-плеча балки къ ея полной длинѣ.*

Графическое опредѣленіе величинъ m и n м. б. сдѣлано слѣд. обр.: отложимъ $BB_1 = m + n$ на фиг. 119, соединимъ точки A и B_1 проведемъ $C_1B_2 \parallel AB$, тогда отрѣзки BB_2 и B_1B_2 будутъ искомыми, т. е.

$$BB_2 = n \; ; \; B_1B_2 = m.$$

в. Найдемъ теперь сопротивленія опоръ, пользуясь ф-лами ж, і:

$$S = P.a.b.\frac{a - b}{l^3} + \frac{P \, . \, a}{l} =$$

$$= \frac{P \, . \, a}{l^3} \, . \, \left[a \, . \, b - b^2 + (a^2 + 2\,ab + b^2)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} S = P \, . \, \frac{a^3 + 3\,a^2 \, . \, b}{l^3} \\ T = P \, . \, \frac{b^3 + 3\,b^2 \, . \, a}{l^3} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{91}$$

т. е. *сопротивленіе опоры защемленной балки равно нагрузкѣ, умноженной на дробь, у которой знаменатель представляетъ собою кубъ длины балки, а числитель содержитъ въ себѣ изъ куба суммы обоихъ плечъ балки тѣ два слагаемыя, гдѣ находятся кубъ и квадратъ контръ-плеча балки,* причемъ р-во k этого § будетъ, разумѣется, удовлетворено.

г. Посмотримъ теперь, какой видъ будутъ имѣть здѣсь кривыя M и V. Въ произвольномъ сѣченіи N (фиг. 119) на разстояніи x отъ опоры A моментъ будетъ:

$$M = m - T \, . \, x = \frac{P.a.b^2}{l^2} - P \, . \, b^2 \, . \, \frac{3\,a + b}{l^3} \, . \, x$$

$$M = P \, . \, b^2 \, . \, \frac{a \, . \, l - (3\,a + b) \, . \, x}{l^3}$$

Это есть ур-іе прямой линіи A_1C_2, которая обладаетъ слѣдующими свойствами:

При $\quad x = 0 \ldots \; M = m = \frac{P.a.b^2}{l^2} = AA_1$

Въ точкѣ H. . . $M=0$, что даетъ

$$\bar{x}=a\cdot\frac{l}{3a+b} \quad \text{. . . . . } \quad \mathbf{92.}$$

т. е. $\bar{x}$ менѣе a. Затѣмъ при $x=a$, получимъ

$$M_c=P\cdot b^2\cdot a\cdot\frac{l-(3a+b)}{l^3}=-\frac{2\cdot P\cdot a^2\cdot b^2}{l^3} \quad \text{. . . . } \quad \mathbf{93.}$$

Такимъ же образомъ можетъ быть получено ур-іе и прямой B_2C_2; если отсчитывать абсциссы отъ опоры A, то въ сѣченіи N_1 моментъ будетъ:

$$M_1=m-T\cdot x_1+P\cdot(x_1-a).$$

При $\qquad x_1=a\ldots\ M_1=M_c.$

При $\qquad x_1=l$ получимъ

$$M_1=\frac{P\cdot a\cdot b^2}{l^2}-\frac{P\cdot b^2\cdot(3a+b)}{l^2}+P\cdot b.=\frac{P\cdot b\cdot a^2}{l^2}=n.$$

Кривыя сѣкущихъ усилій будутъ имѣть ур-нія:

$$V=\frac{dM}{dx}=-T.$$

$$V_1=\frac{dM_1}{dx_1}=-T+P=+S.$$

д. Чтобы найти разсчетное ур-іе балки, надо сравнить между собою 3 момента—m, n и M_c.

Одинъ изъ двухъ опорныхъ моментовъ всегда будетъ болѣе другого; Если $a>b$, то $n>m$, и въ дальнѣйшемъ придется сравнивать между собою моменты n и M_c; возьмемъ ихъ отношеніе:

$$n:M_c=\frac{P\cdot a^2\cdot b}{l^2}\cdot 2P\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{l^3}=\frac{l}{2b}=\frac{a+b}{2b},$$

что болѣе 1; слѣдовательно

опаснымъ сѣченіемъ у балки съ обоими защемленными концами всегда будетъ одно изъ ея защемленныхъ сѣченій, а именно — ближайшее къ точкѣ приложенія нагрузки.

Такимъ образомъ если $a>b$, то *разсчетное ур-іе* будетъ

$$n=P\frac{a^2\cdot b}{l^2}=B.W,$$

а если $a<b$, то опасное сѣченіе будетъ A съ разсчетнымъ ур-іемъ

$$m=P.\frac{b^2\cdot a}{l^2}=B\cdot W.$$

Слѣдовательно, вообще разсчетное ур-іе надо составлять по схемѣ:

$$\text{Нагрузка}\times\text{Малое плечо}\times\left[\frac{\text{Большое плечо}}{\text{Длина балки}}\right]^2=B.W \quad . \quad \mathbf{94.}$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$a=b=\frac{l}{2}\ldots\quad m=n=M_c=\frac{P\,.\,l}{8},$$

т. е. *у равноплечей защемленной балки будетъ* **3** *равно-опасныхъ сѣченія—оба защемленныхъ и среднее,* гдѣ приложена нагрузка.

е. Если длина плечъ у балки будетъ измѣняться, то будетъ перемѣнной и 1-я часть разсчетнаго ур-ія (см. ф-лу **94**). Найдемъ наиболѣе невыгодный способъ нагруженія такой балки.

Наибольшій изъ опорныхъ моментовъ

$$n=\frac{P.a^2.b}{l^2}=\frac{P.a^2(l-a)}{l^2}.$$

Если перемѣнное плечо a будетъ замѣнено z, то

$$n=P.\frac{l\,.\,z^2-z^3}{l^2}$$

Найдемъ *max* момента n:

$$\frac{dn}{dz}=\frac{P}{l^2}(2l\,.\,z-3z^2)=0,\text{ откуда,}$$

$$z=a=\frac{2}{3}l;\quad b=l-a=\frac{1}{3}l,$$

$$max\ n=\frac{P}{l^2}\left(\frac{2}{3}l\right)^2.\frac{1}{3}l=\frac{4}{27}.P.l.$$

Видъ ф-лы **93** говоритъ намъ, что *max* момента M_c будетъ тогда, когда $a=b$, т. е.

$$max\ M_c=\frac{P\,.\,l}{8},$$

ж. Если чрезъ точку H (фиг. 119) проведемъ вертикаль, то на упругой линіи она отмѣтитъ точку перегиба H_1. Вся вѣтвь AH_1C_3 упругой линіи будетъ представлена, очевидно, однимъ ур-іемъ, а не двумя (см. *примѣчаніе* въ § *22 б*), а кривая BC_3—другимъ.

Располагая начало координатъ въ точкѣ A, направимъ ось x-овъ по горизонтали *вправо*, а ось z-овъ—по вертикали *внизъ*; тогда, соблюдая правило знаковъ (§ 13), для кривой AH_1C_3, получимъ ур-іе:

$$+A.\frac{d^2z}{dx^2}=+m-T.x\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad \text{а.}$$

$$A\,.\frac{dz}{dx}=m\,.x-T.\frac{x^2}{2}+c\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad \text{б.}$$

Но такъ какъ въ сѣченіи A при $x=0\ldots\frac{dz}{dx}=0$, поэтому $c=0$; а стало быть

$$A\,.z=m\,.\frac{x^2}{2}-\frac{T}{2}.\frac{x^3}{3}+c_1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad \text{в.}$$

Но въ сѣченіи A... при $x=0$... $z=0$, поэтому $c_1=0$. Наибольшій провѣсъ балки найдемъ, если сдѣлаемъ $\frac{dz}{dx}=0$, т. е.

$$0=m-T.\frac{x}{2}, \text{ откуда}$$

$$\underline{|x}=2.\frac{m}{T}=2.\bar{x} \text{ (см. ф-лу } \mathbf{92}),$$

т. е. *когда вычерчена кривая моментовъ и получена абсцисса AH точки перегиба упругой линіи, то, удваивая ее, найдемъ абсциссу наибольшаго провѣса*. Очевидно, что если $a>b$, то

$$\underline{|x}<a, \text{ такъ какъ } \underline{|x}=a.\frac{2a+2b}{3a+b},$$

т. е. *наибольшій провѣсъ балки будетъ получаться всегда на большемъ изъ ея плечъ.*

з. Найдемъ стрѣлу прогиба.

$$A.z=\frac{x^2}{6}(3m-T.x).$$

$$A.h=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2m}{T}\right)^2.m=\frac{2}{3}\cdot\frac{m^3}{T^2},$$

$$A.h=\frac{2}{3}.P.a^3.\left(\frac{b}{3a+b}\right)^2$$

Если $a=b=\frac{l}{2}$

$$A.h=\frac{2}{3}.P.\frac{a^3}{16}=\frac{1}{192}.P.l^3.$$

и. Случай *равноплечей* балки, ущемленной обоими концами, встрѣчается въ практикѣ на столько часто, что всѣ данныя относительно него нужно имѣть на готовѣ и возстановленіе ихъ нужно умѣть дѣлать непосредственно, независимо отъ всего предыдущаго.

Если $a=b=\frac{l}{2}$, то $S=T=\frac{P}{2}$.

Изъ ф-лы **ж** (§ 25*а*) находимъ, что $m=n$.

Дифференціальное ур-іе упругой линіи и двѣ его интеграціи, вмѣсто ф-лъ **а**, **б**, **в** (см. § *25 ж*), представятся въ такомъ видѣ:

$$A.\frac{d^2z}{dx^2}=m-\frac{P.x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{a}_1,$$

$$A.\frac{dz}{dx}=m.x-\frac{P.x^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{б}_1,$$

$$A.z=m.\frac{x^2}{2}-P.\frac{x^3}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{в}_1.$$

Для равноплечей балки имѣемъ

$$\text{при } x=\frac{l}{2}\ldots\frac{dz}{dx}=0=m-\frac{P\,.\,l}{8},\ \text{откуда}$$

$$m=n=\frac{P\,.\,l}{8}.$$

Въ срединѣ длины балки

$$M_c=m-T\,.\,\frac{l}{2}=-\frac{P\,.\,l}{8},$$

слѣд. *опасныхъ сѣченій здѣсь будетъ* **3**—*оба крайнихъ и среднее.*

Разсчетное ур-іе балки будетъ

$$P\,.\,\frac{l}{8}=B\,.\,W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{95}$$

Безопасная нагрузка P_9 получится такъ

$$P_9=8\,.\,B.W:l\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{96.}$$

Безопасная длина балки l_9 будетъ

$$l_9=8\,B\,.\,W:P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{97.}$$

Сравнивая эти формулы съ таковыми же для балки, у которой концы свободны (см. ф-лы **59** и **60** въ § *19a*), видимъ, что защемленіе обоихъ концовъ балки позволяетъ увеличить вдвое или нагрузку, или длину балки.

Опредѣляя по ф-лѣ $\mathfrak{b}_1$ стрѣлу прогиба, дѣлаемъ $x=\frac{l}{2}$, тогда

$$A.h=\frac{x^2}{12}(6m-P.x)=\frac{1}{12}.\frac{l^2}{4}.\left(6\frac{P.l}{8}-P.\frac{l}{2}\right)$$

$$h=\frac{1}{12.16}.\frac{P.l^3}{A}=\frac{1}{192}.\frac{P.l^3}{E.I} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{98.}$$

Безопасная стрѣла прогиба f_9 получится, соединяя ф-лы **95** и **98**:

$$f_9=\frac{1}{24}.\frac{B.l^2}{E.e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{99.}$$

Сравнивая ф-лы **99** и **62** (см. § *19b*), видимъ, что

$$f_5:f_9=2,$$

т. е. *для балки со свободными концами безопасная стрѣла вдвое болѣе чѣмъ для балки съ обоими защемленными концами.*

А если у обѣихъ балокъ (свободной и защемленной обоими концами) размѣры будутъ взяты одинаковыми и такими, какъ это требуется для балки со свободными концами, тогда при одинаковой на-

грузкѣ свободная балка даетъ большій провѣсъ, нежели ущемленная, въ отношеніи

$$192:48=4:1,$$

т. е. *защемленіе обоихъ концовъ балки можетъ сразу уменьшить ея прогибъ въ* **4** *раза.*

26. **Балка защемлена обоими концами, нагрузка же распредѣлена равномѣрно по всей ея длинѣ.** *a.* Схема нагруженія балки представлена на фиг. 120: Q — вся нагрузка, q — часть ея, приходящаяся на 1 длины бруса, такъ что $Q=q\,.\,l$.

Опредѣленіе опорныхъ моментовъ можетъ быть сдѣлано на основаніи ф-лъ **90** предыдущаго §, разсматривая всю нагрузку, какъ безконечно большое число элементарныхъ сосредоточенныхъ грузовъ, занимающихъ по длинѣ балки безконечно малую ширину dy. Величины m и n будутъ получены, если въ ф-лу **90** будутъ внесены

$$\begin{array}{ccc} q\,.\,dy & \text{вмѣсто} & P, \\ y & „ & a, \\ l-y & „ & b; \end{array}$$

$$m=\frac{1}{l^2}\cdot\int_0^l q\,.\,dy\,.\,y\,.\,(l^2-2ly+y^2)=$$

$$=\frac{q}{l^2}\cdot\left[l^2\,.\,\frac{y^2}{2}-2l\,.\,\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right]_0^l=\frac{q\,.\,l^2}{12}=\frac{Q\,.\,l}{12}\quad .\ .\ .\ .\ \mathbf{100.}$$

$$n=\frac{1}{l^2}\cdot\int_0^l q\cdot dy\,.\,y^2\,(l-y)=\frac{q}{l^2}\left(l\,.\,\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)_0^l=\frac{Q\,.\,l}{12}.\quad .\ \mathbf{100,a.}$$

Принимая точку B (фиг. 120) за центръ моментовъ, ур-іе равновѣсія балки напишемъ въ такомъ видѣ:

$$m-T.l+\frac{Q\,.\,l}{2}=n,\quad \text{откуда}$$

$$T=\frac{Q}{2}=S=\frac{q\cdot l}{2}.$$

б. Выраженіе сгибающаго момента въ произвольномъ сѣченіи N балки на разстояніи x отъ лѣвой опоры напишется такъ:

$$M=m-T\,.\,x+\frac{q\,.\,x^2}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathbf{101.}$$

Это есть ур-іе параболы $A_1C_1B_1$: при $x=0\ldots\ldots M=m$;

при $x=l\ldots\ldots M=m-T\,.\,l+\dfrac{q\,.\,l^2}{2}=n$;

при $x = \frac{l}{2}$ получимъ аналитическое значенiе *max M*, т. к.

$$\frac{dM}{dx} = V = -T + q \cdot x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{102}.$$

А это выраженiе обращается въ нуль при значенiи

$$x = \frac{T}{q} = \frac{l}{2}$$

$$max\, M = M_c = \frac{q \cdot l^2}{12} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot l + \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$M_c = -\frac{q \cdot l^2}{24} = -\frac{Q \cdot l}{24} = CC_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{103},$$

т. е. *аналитическiй* **max** *сгибающаго момента при этомъ способѣ нагруженiя вдвое менѣе опорнаго момента.*

Поэтому *балка, ущемленная обоими концами и нагруженная равномѣрно, имѣетъ* 2 *опасныхъ сѣченiя — въ мѣстахъ защемленiя.*

Ур-iе крѣпости такой балки будетъ:

$$\frac{Q \cdot l}{12} = B \cdot W \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{104}.$$

Безопасная нагрузка P_{10} такой балки будетъ

$$P_{10} = 12 \cdot B \cdot W : l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{105}.$$

Безопасная длина балки l_{10} опредѣлится такъ:

$$l_{10} = 12 \cdot B \cdot W : Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{106}.$$

Сравнивая ф-лы **105** и **106** съ ф-лами **70** и **71** (см. § *20,г*), которыя мы имѣли при той же нагрузкѣ для балки со свободными концами, находимъ, что

$$P_{10} : P_6 = l_{10} : l_6 = 3 : 2,$$

т. е. *защемленiе концовъ балки позволяетъ увеличить на 50%, или величину равномѣрной нагрузки, или же длину балки.*

Величина сѣкущаго усилiя будетъ измѣняться въ обоихъ случаяхъ по одному и тому же закону.

Въ точкахъ H и L кривая моментовъ пересѣчетъ несогнутую ось бруса; вертикали, проведенныя чрезъ эти точки, отмѣтятъ на упругой линiи точки перегиба H_1 и L_1. Абсциссы ихъ опредѣлятся изъ р-ва...... $M = 0$, что даетъ по ф-лѣ **101**:

$$O = \frac{q}{12}(l^2 - 6 \cdot l \cdot x + 6 \cdot x^2), \text{ или}$$

$$x^2 - l \cdot x + \frac{l^2}{6} = 0, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{l}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{ или}$$

$$AH = 0.2113 \cdot l; \quad AL = 0{,}7887 \cdot l.$$

в. Отнесемъ упругую линію $AH_1C_2L_1B$ (фиг. 120) къ осямъ координатъ xAz, располагая ихъ начало въ центрѣ тяжести лѣваго защемленнаго сѣченія A; ось Ax направимъ по горизонтали *вправо*, а ось Az по вертикали *внизъ*. Соблюдая правило знаковъ (§ 13), для кривой AH_1 ур-іе напишемъ въ такомъ видѣ:

$$+A \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = +m - T \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{d}.$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что вѣтви кривой H_1C_2, C_2L_1 и L_1B будутъ представлены тѣмъ же самымъ ур-емъ **d** (см. *примѣчаніе* въ § *22 б*).

Если бы формулъ предыдущаго § для опредѣленія опорныхъ моментовъ m и n не было подъ рукою, величину момента m возможно опредѣлить также и помощью ур-ія **d**, объинтегрировавъ его одинъ разъ и выразивъ, что упругая линія въ точкахъ A и B касается оси бруса, а проведенная въ точкѣ C_2, въ срединѣ длины балки, касательная параллельна ея оси. Интегрируемъ ур-іе **d**:

$$A \cdot \frac{dz}{dx} = m \cdot x - T \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q \cdot x_3}{6} + c \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{e}.$$

При $x = o$ въ точкѣ $A \ldots\ldots \frac{dz}{dx} = o \ldots\ldots c = o$

При $x = l$ въ точкѣ $B \ldots\ldots \frac{dz}{dx} = o$, поэтому

$$m \cdot l - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{q}{6} \cdot l^3 = o, \text{ откуда } m = \frac{q \cdot l^2}{12},$$

что согласуется съ ф-лой **100**.

При $x = \frac{l}{2}$ въ точкѣ $C_2 \ldots\ldots \frac{dz}{dx} = o$, ст. б.

$$m \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{q}{6} \cdot \frac{l^3}{8} = o,$$

что даетъ ту же самую величину m, какъ и раньше. Поэтому ур-іе **e** можно представить такъ:

$$A \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{q}{12}(l^2 \cdot x - 3 \cdot l \cdot x^2 + 2 \cdot x^3)$$

Интегрируя это ур-іе, найдемъ:

$$A \cdot z = \frac{q}{12}\left(l^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3\, l \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^4}{4}\right) + c_1$$

Но при $x = o$ въ точкѣ A и $z = o$, слѣд $c_1 = o$. Ур-іе упругой линіи будетъ:

$$A \cdot z = \frac{q}{24} \cdot x^2 (l^2 - 2\, l\, x + x^2) = \frac{q}{24} \cdot x^2 \cdot (l - x)^2.$$

г. Наибольшій провѣсъ балки получимъ, сдѣлавъ $x=\frac{l}{2}$, тогда

$$A.h=\frac{q}{24}\cdot\frac{l^4}{16}=\frac{q.l^4}{384}=\frac{Q.l^3}{384}\ \ldots\ldots\ \mathbf{107}$$

Безопасную стрѣлу прогиба f_{10} найдемъ, присоединяя къ этой ф-лѣ ур-іе крѣпости балки (см. ф-лу **104**):

$$f_{10}=\frac{1}{32}\cdot\frac{B.l^2}{E.e}\ \ldots\ldots\ \mathbf{108}$$

Сравнивая это выраженіе съ ф-лою **73** (см. § *20*, *г*), которая опредѣляетъ безопасную стрѣлу для балки со свободными концами находимъ, что

$$f_6:f_{10}=\frac{5}{48}:\frac{1}{32}=10:3,$$

т. е. *выполненіе равномѣрно нагруженной балки съ защемленными концами уменьшаетъ стрѣлу прогиба въ отношеніи* **3 : 10** *сравнительно съ балкою, у которой оба конца свободны, при одинаковой крѣпости въ обоихъ случаяхъ.*

Если же въ обоихъ случахъ балка была бы выполнена съ одинаковыми размѣрами, которые требуются условіями существованія балки съ свободными концами, то отношеніе стрѣлъ прогиба было бы равно *пяти*, какъ показываетъ сравненіе ф-лъ **107** и **72** (см. § *20*, *г*), т. е. *защемленіе концовъ балки, равномѣрно нагруженной по всей длинѣ, уменьшаетъ стрѣлу прогиба въ* **5** *разъ.*

27. **Задачи. № 45**. Балка ущемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ (фиг. 121) и нагружена двумя сосредоточенными грузами P и $P_1=n.P$, дѣйствующими въ разныя стороны. Разстоянія между точками приложенія ихъ — $a=t.l$. Найти кривыя моментовъ, кривыя силъ сдвига и разсчетное ур-іе балки.

Отвѣтъ. Сѣченіе N...... $M=P.x$; $V=P$

„ N_1..... $M_1=P.l.t.\left(\frac{x_1}{l}.\frac{1-n}{t}+n\right)$; $V_1=P.(1-n)$.

Если $\beta=\frac{1-n}{t}+n=1$......, т. е. $n=1$, то всѣ сѣченія между A и C одинаково опасны, и разсчетное ур-іе будетъ:

$$P.l.t=B.W\ \ldots\ldots\ \mathbf{a.}$$

Если абсол. вел. $\beta>1$...... разсчетное сѣч. буд. A, и для него

$$P.l.t.\beta=B.W.$$

Если $\beta<1$...... разсчетное сѣч. буд. C; разсчетъ — по ур-ію **а.**

Подставляя вмѣсто n и t различныя числовыя значенія, нужно вычертить кривыя M и V.

№ 46. Балка ущемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ (фиг. 122) и нагружена тремя сосредоточенными грузами P, $2P$ и P. Разстоянія $CD = DE = a = t.l$. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. Сѣченіе N...... $M = P.x$; $V = P$; $M_D = P.l.t$

„ N_1..... $M_1 = P.l\left(2t - \frac{x_1}{l}\right)$; $V_1 = -P$; $M_c = 0$

„ N_2..... $M_2 = 0$; $V_2 = 0$.

Опасное сѣченіе D, разсчетное ур-іе

$$P.l.t = B.W.$$

По этимъ даннымъ надо вычертить кривыя моментовъ и силъ сдвига.

№ 47. Балка ущемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ (фиг. 123) и нагружена t одинаковыми нагрузками P, точки приложенія которыхъ дѣлятъ длину балки на t равныхъ частей. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе.

Отв. $P.l.\frac{1+t}{2} = B.W$...... сѣч. C.

Нужно вычертить кривыя M и V.

№ 48. Балка ущемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ (фиг. 124) и нагружена на длинѣ $a = t.l$ равномѣрно. Найти кривыя M и V и разсчетное уравненіе.

Отв. Сѣч. N...... $M = \frac{Q}{l}.\frac{x^2}{2t}$; $V = \frac{Q}{l}.\frac{x}{t}$

$$M_c = \frac{Q.l}{2}.t;\quad V_c = Q$$

Сѣч. N_1..... $M_1 = Q.l\left(\frac{x_1}{l} - \frac{t}{2}\right)$; $V_1 = Q$

$$Q.l:\frac{2-t}{2} = B.W\text{...... сѣч. } A.$$

По этимъ даннымъ нужно вычертить кривыя M и V.

№ 49. Балка ущемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ (фиг. 125) и нагружена двумя грузами — равномѣрной нагрузкой Q и сосредоточеннымъ грузомъ $P = n.Q$. Нагрузка Q распредѣлена на длинѣ $a = t.l$. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе.

Отв. Сѣч. N...... $M = Q.l.\left(\frac{1}{2t}.\frac{x^2}{l^2} - n.\frac{x}{l}\right)$

$$V = Q\left(\frac{1}{t}.\frac{x}{l} - n\right).$$

Абсцисса $max\ M$...... $\bar{x} = n \cdot t \cdot l$

$$max\ M = -\frac{t}{2} \cdot n^2 \cdot Q \cdot l = M_0.$$

Сѣч N_1..... $M_1 = Q \cdot l \cdot \left(\frac{1-n}{l} \cdot x_1 - \frac{t}{2}\right)$; $V_1 = Q(1-n)$.

При $x_1 = l$...... $M_A = Q \cdot l\left(1 - n - \frac{t}{2}\right)$.

Условіе $M_0 = M_A$ требуетъ, чтобы

$$\frac{n^2 \cdot t}{2} = 1 - n - \frac{t}{2}, \quad \text{или}$$

$$t = \frac{2-2n}{n^2+1}.$$

При $t = 1$...... $n = \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142$.

На основаніи полученныхъ данныхъ нужно вычертить кривыя M и V.

№ 50. Балка своими концами свободно положена на двѣ опоры и нагружена n одинаковыми сосредоточенными грузами, точки приложенія которыхъ дѣлятъ длину балки на $n+1$ равныхъ частей. Найти разсчетное ур-іе балки.

Отв. *а) Случай, когда* **n** *число нечетное* (фиг. 126).

Опасное сѣч. A.... $M = \frac{n \cdot P}{2} \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \frac{l}{n+1}\left(1+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}\right)$

$$M = \frac{P \cdot l}{8}(n+1) = B \cdot W = \alpha \quad P \cdot l$$

$n = 1$	3	5	7	9	11	. . . . . .
$\alpha = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	. . . . . .

б) Случай, когда **n** *число четное* (фиг. 127).

Въ сѣч. A.... $M = \frac{n \cdot P}{2}\ \frac{l}{2} - P \cdot \frac{l}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\ldots+\frac{n-1}{2}\right)$

$$M = \frac{n.P.l}{4} - P \cdot \frac{l}{n+1} \cdot \frac{n^2}{4} = \frac{Pl}{8} \cdot n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \beta . P . l.$$

$$\beta . P . l = B . W$$

$n = 2$	4	6	8	10	. . . . . .
$\beta = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{15}{11}$	. . . . . .

Всѣ сѣченія балки между B и F равноопасны. Вмѣсто сѣч. A моментъ можно писать для сѣченія B.

№ 51. Балка своими концами свободно положена на двѣ опоры A и B (фиг. 128) и нагружена на части длины равномѣрно, причемъ нагрузка прилегаетъ къ одной изъ опоръ. Найти кривыя моментовъ и силъ сдвига, а также и разсчетное ур-іе.

Отв. Вводя обозначеніе $a = t \,.\, l$, получимъ:

$$K = Q \,.\, \frac{2-t}{2};\; L = Q \,.\, \frac{t}{2}.$$

Сѣченіе N.... $M = K \,.\, x - \frac{Q}{a} \,.\, \frac{x^2}{2}$

$$V = K - \frac{Q}{a} \,.\, x.$$

Абсцисса $max\, M$:

$$\bar{x} = t \,.\, \frac{2-t}{2} \,.\, l$$

$$max\, M = \frac{a}{2} \,.\, \frac{K^2}{Q} = \frac{Q \,.\, l}{8} \,.\, t\,(2-t)^2 = M_0.$$

Сѣченіе N_1.... $M_1 = \frac{t}{2} \,.\, Q \,.\, l - (Q - K) \,.\, x_1$

$$V_1 = -L$$

$$M_c = t \,.\, \frac{1-t}{2} \,.\, Q \,.\, l$$

Разсчетное ур-іе

$$\frac{Q \,.\, l}{8} \,.\, t\,(2-t)^2 = B \,.\, W = \frac{Q \,.\, l}{8} \,.\, \alpha$$

такъ какъ

$$\frac{t}{8} \,.\, (2-t)^2 \text{ всегда болѣе } t \,.\, \frac{1-t}{2}.$$

При $t =$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\frac{2}{3}$
$\alpha =$ 0,361	0,648	0,867	1,024	1,125	1,176	1,183	1,152	1,089	**1,189.**

Max M_0 получается при значеніи t, получаемомъ изъ ур-ія

$$t^2 - \frac{8}{3} \,.\, t + \frac{4}{3} = 0, \text{ откуда } t = \frac{2}{3}.$$

По этимъ даннымъ надо вычертить кривыя M и V.

№ 52. Балка своими концами свободно положена на двѣ опоры A и B (фиг. 129) и нагружена двумя одинаковыми грузами; изъ нихъ одинъ распредѣленъ равномѣрно на длинѣ $2a$, а другой имѣетъ плечо a относительно опоры B. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. Моментъ всѣхъ силъ относительно точки B будетъ

$$K.l - Q(l-a) - Q.a = O\,,\ \text{откуда}\ K = L = Q.$$

Сѣченіе N.... $M = Q\,.\,x - q\,.\,\frac{x^2}{2}$, гдѣ $q = Q : 2\,a$

$$V = Q - q\,.\,x$$

Сѣченія C, N_1 и D. .. $M_1 = Q\,a$; $V_1 = O$.

Сѣченія N_2.... $M_2 = Q\,.\,(l - x_2)$; $V_2 = -\,Q$.

Разсч. ур-іе.... $Q\,.\,a = B\,.\,W$.

По этимъ даннымъ надо построить кривыя M и V. Вершина параболы M будетъ въ сѣченіи C.

№ 53. Балка своими концами A и B (фиг. 130) свободно положена на двѣ опоры и нагружена двумя одинаковыми сосредоточенными грузами, имѣющими одинаковыя плечи относительно опоръ, но дѣйствующими въ различныя стороны. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. Моментъ всѣхъ силъ относительно опоры B будетъ:

$$K.l - P(l-a) + P\,.\,a = o\,,\ \text{откуда}$$

$$K = P\,.\,\frac{l - 2\,a}{l} = L$$

Сѣченіе N.... $M = K\,.\,x$; $V = K$.

» N_1.... $M_1 = K\,.\,x_1 - P\,.\,(x_1 - a) = P\,.\,a\left(1 - \frac{2\,x_1}{l}\right)$

$$V_1 = -\,P\,.\,\frac{2\,a}{l}$$

При $x_1 = \frac{l}{2}$ .... $M_1 = o$

Сѣченіе N_2.... $M_2 = -\,L\,.\,(l - x_2)$; $V_2 = +\,L$

$$M_c = K\,.\,a\,;\ M_d = -\,L\,.\,a = -\,K\,.\,a$$

Разсчетное ур-іе....

$$P\,.\,a\,.\,\frac{l - 2\,a}{l} = B\,.\,W$$

По этимъ даннымъ надо построить кривыя M и V.

№ 54. Балка свободно положена на двѣ опоры A и B (фиг. 131) и на свѣшивающихся ея концахъ нагружена двумя различными сосредоточенными грузами P и Q, имѣющими разныя плечи относительно опоръ. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. Моментъ всѣхъ силъ относительно опоры B будетъ писаться такъ:

$$P.(l+a)-K.l-Q.b=o$$

$$K=P.\frac{l+a}{l}-Q.\frac{b}{l}$$

$$L=Q.\frac{l+b}{l}-P.\frac{a}{l}$$

Сѣченіе N.... $M=P.x$; $V=P$.

» N_1.... $M_1=P.x_1-K.(x_1-a)$; $V_1=P-K$.

» N_2.... $M_2=P.x_2-K(x_2-a)-L(x_2-l-a)$

$$V_2=P-K-L=-Q$$

По этимъ даннымъ надо вычертить кривыя M и V. Разсчетнымъ сѣченіемъ будетъ или A, или B.

№ 55. Въ предыдущей задачѣ надо расположить грузы P и Q так. обр., чтобы всѣ сѣченія балки между A и B были одинаково опасны.

Отв. Для этого нужно имѣть:

$$P=K;\ Q=L;\ \text{т. е. } P:Q=b:a.$$

№ 56. Балка свободно положена на двѣ опорѣ A и B (фиг. 132) и на свѣшивающемся за опору A лѣвомъ концѣ ея нагружена равномѣрно на длинѣ $2a$. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. $Q=q.2a$; $a:l=t$

$$K=Q(1+t);\ L=Q.t$$

Сѣченіе N.... $M=q.\frac{x^2}{2}$; $V=q.x$.

» A.... $M_A=q.2a^2=Q.a=Q.l.t$; $V_A=Q$

» N_1.... $M_1=Q.t\left[(2t+1).l-x_1\right]$; $V_1=-Q.t=-L$.

Разсчетное ур-іе

$$Q.l.t=B.W$$

По этимъ даннымъ надо построить кривыя M и V.

№ 57. Балка свободно положена на двѣ опоры A и B (фиг. 133), лѣвый конецъ ея свѣшивается за опору A. Нагрузка распредѣлена равномѣрно по всей длинѣ балки. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. Нагрузка $Q=q(l+a)=q.l(1+t)$, если $\frac{a}{l}=t$.

$$K=\frac{q.l}{2}.(1+t)^2,\ L=\frac{q.l}{2}(1-t^2).$$

Сѣченіе N.... $M = \frac{q \cdot x^2}{2}$; $V = q \cdot x$.

„ A.... $M_A = \frac{q \cdot a^2}{2} = \frac{q}{2} \cdot l^2 \cdot t^2 = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot 4\ t^2 = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \alpha$

„ N_1... $M_1 = \frac{q \cdot x_1^2}{2} - K(x_1 - a)$; $V_1 = q \cdot x_1 - K$.

Абсцисса max M_1......

$$x_1 = \frac{K}{q} = \frac{l}{2}(1+t)^2$$

$$max\ M_1 = -\frac{q \cdot l^2}{8}(1-t^2)^2 = -\frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \beta$$

Абсциссы точки пересѣченія кривой M_1 съ осью бруса будутъ опредѣляться равенствомъ:

$$x_1 = \frac{1+t}{2} \cdot l \cdot \left[(1+t) \pm (1-t)\right], \text{ откуда}$$

$$|\overline{x_1} = l \cdot (1+t);\ \underline{x_1|} = l \cdot (1+t) \cdot t$$

Величины коэф. α и β даетъ табл. 15-я.

Таблица 15-я.

При $t = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
„ $\alpha = 0{,}04$	0,16	0,36	0,64	1,0	1,44	1,96	2,56	3,24	4
„ $\beta = 0{,}98$	0,92	0,83	0,74	0,56	0,41	0,26	0,13	0,04	0

Разсчетнымъ сѣченіемъ въ этомъ случаѣ м. б. или A, или то сѣченіе, гдѣ моментъ M_1 имѣетъ свой max.

Оба сѣченія будутъ одинаково опасны при значеніи

$$t = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = 0{,}414 \ *)$$

Въ этомъ случаѣ

$$\alpha = \beta = 0{,}685$$

По этимъ даннымъ надо построить кривыя M и V въ случаѣ, когда t болѣе и менѣе 1.

№ 58. Балка свободно положена на двѣ опоры; лѣвый конецъ ея свѣшивается за опору, равномѣрная нагрузка распредѣлена на свѣшивающемся концѣ и отчасти между опорами (фиг. 134). Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

---

*) Это выраженіе показываетъ намъ, что a будетъ разностью между діагональю и стороною квадрата, имѣющаго своею стороною разстояніе l между опорами (фиг 133).

Отв. $Q = q.(a + b)$; $a + b = s$; $a - b = d$.

$$K = Q . \frac{2l + d}{2l}; L = - Q . \frac{d}{2l}.$$

Сѣченіе N.... $M = q . \frac{x^2}{2}$; $V = q . x$

» A.... $M_A = q . \frac{a^2}{2} = Q . \frac{a^2}{2s}$

» N_1.... $M_1 = \frac{q . x_1^2}{2} - K.(x_1 - a)$

$$V_1 = q . x_1 - K.$$

Абсцисса $max\ M_1$....

$$x_2 = \frac{K}{q} = s . \frac{2l + d}{2l}$$

Если $a > b$.... $x_2 > s$.... разсчетное сѣч. — A.

« $a = b$.... $x_2 = s$.... » » — A

» $a < b$.... $x_2 < s$.... разсчетнымъ сѣченіемъ м. б. и A и сѣч., соотвѣтствующее $max\ M_1$. Величина

$$max\ M_1 = Q . \frac{2l + d}{4l^2} \left\{ 2l . a - s . \frac{2l + d}{2} \right\}$$

По этимъ даннымъ надо построить кривыя M и V для случая, когда a болѣе b и наоборотъ.

При $b = l$ этотъ случай нагруженія будетъ одинаковъ съ предыдущимъ (фиг. 133).

№ 59. Балка свободно положена на 2 опоры A и B (фиг. 135) и нагружена равномѣрно какъ на свѣшивающемся за опору лѣвомъ концѣ балки, такъ и на части ея, прилегающей къ правой опорѣ. Нагрузка на *1* длины — q, длина лѣвой нагруженной части — $2a$, правой — $2b$. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. $a = t . l$; $b = u . l$.

$$K = 2q . l(t + t^2 + u^2); L = 2q . l(u - u^2 - t^2).$$

Сѣч. N.... $M = \frac{q . x^2}{2}$; $V = q . x$.

» A.... $M_A = 2q . a^2 = \frac{q . l^2}{10} . 20t^2 = \frac{q . l^2}{10} . \alpha$

» N_1... $M_1 = (2q . a - K) . x_1 - 2a(q . a - K)$

$$V_1 = 2q . a - K$$

» N_2.... $M_2 = L . x_2' - \frac{q}{2} . x_2^2$; $V_2 = L - q . x_2$

Абсцисса $max\ M_2$....

$$x_2 = \frac{L}{q} = 2\,l\,.\,(u - u^2 - t^2).$$

$$max\ M_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{q} = \frac{q\,.\,l^2}{10} \cdot 20\,(u - u^2 - t^2) = \frac{q\,.\,l^2}{10} \cdot \beta$$

$$\frac{K}{2\,q\,.\,(a+b)} = \gamma = \frac{t + t^2 + u^2}{t + u}$$

$$\frac{L}{2\,q\,.\,(a+b)} = \delta = \frac{u - u^2 - t^2}{t + u}.$$

При различныхъ сношеніяхъ между a , b и l величины коэффиціентовъ α , β , γ и δ даны въ таблицѣ 16-й.

Таблица 16-я.

		u = 0,1	u = 0,2	u = 0,3	u = 0,4	u = 0,5
При $t = 0,1$ $\alpha = 0,2$	Коэфф. γ „ δ „ β	0,6 0,4 0,128	0,5 0,5 0,45	0,5 0,5 0,8	0,54 0,46 1,058	0,6 0,4 1,152
При $t = 0,2$ $\alpha = 0,8$	„ γ „ δ „ β	0,833 0,167 0,05	0,7 0,3 0,288	0,66 0,34 0,578	0,667 0,333 0,8	0,7 0,3 0,882
При $t = 0,3$ $\alpha = 1,8$	„ γ „ δ „ β	1 0 0	0,86 0,14 0,098	0,8 0,2 0,288	0,786 0,214 0,45	0,8 0,2 0,512
При $t = 0,4$ $\alpha = 3,2$	„ γ „ δ „ β	1,14 —0,14 0,098	1 0 0	0,929 0,071 0,050	0,9 0,1 0,128	0,9 0,1 0,162
При $t = 0,5$ $\alpha = 5,0$	„ γ „ δ „ β	1,267 —0,267 0,512	1,129 —0,129 0,162	1,05 —0,05 0,032	1,011 —0,011 0,002	1 0 0

По даннымъ таблицы 16-й нужно построить въ различныхъ случаяхъ кривыя M и V, указать разсчетное сѣченіе балки и написать для него разсчетное ур-іе.

№ 60. Балка свободно положена на двѣ опоры и нагружена равномѣрно на части длины возлѣ каждой изъ опоръ. Длина нагружен-

ныхъ частей $2a$ и $2b$ (фиг. 136), нагрузка на 1 длины — q. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-iе балки.

Отв. Обозначенія... $a = t . l$; $b = u . l$

$$K = 2q . l . (t - t^2 + u^2);\ L = 2q . l\ (u - u^2 + t^2).$$

Сѣченіе N... $M = K . x - q . \frac{x^2}{2}$; $V = K - q . x$.

„ N_1... $M_1 = K . x_1 - 2q . a (x_1 - a)$.

$V_1 = K - 2q . a$

„ N_2... $M_2 = L . x_2 - \frac{q}{2} . x_2^2$; $V_2 = L - q . x_2$.

Абсцисса *max* M

$$\bar{x} = \frac{K}{q} = 2l (t - t^2 + u^2).$$

Если $t = u$... $\bar{x} = 2l . t = 2a$, т. е. разсчетными сѣченіями будутъ C и D съ ур-iемъ

$$2q . l^2 . t^2 = B . W.$$

Если $t > u$... $\bar{x} < 2a$, т. е. разсчетное сѣченіе будетъ между A и C съ ур-iемъ

$$max\ M = 2q . l^2 (t - t^2 + u^2) = B . W.$$

Если $t < u$... $\bar{x}_2 < 2b$, т. е. разсчетное сѣченіе будетъ между B и D съ ур-iемъ

$$max\ M_2 = 2q . l^2\ (u - u^2 + t^2) = B . W.$$

По этимъ даннымъ надо построить кривыя M и V во всѣхъ трехъ случаяхъ, т. е. когда a равно b, больше и меньше его.

№ 61. Балка свободно положена на двѣ опоры и на свѣшивающихся ея концахъ длиною $2a$ и $2b$ равномѣрно нагружена (фиг. 137), нагрузка на 1 длины — q. Найти кривыя M и V и разсчетное ур-iе балки.

Отв. Обозначенія $a = t . l$; $b = u . l$,

$$K = 2q . l (t + t^2 - u^2);\ L = 2q . l\ (u + u^2 - t^2).$$

Сѣченіе N... $M = q . \frac{x^2}{2}$; $V = q . x$,

„ A... $M_A = 2q . l^2 . t^2$,

„ N_1... $M_1 = (2q . a - K) . x_1 + 2a (K - q . a)$.

$V_1 = 2q . a - K$,

„ N_2... $M_2 = \frac{q}{2} . x_2^2$; $V_2 = q . x_2$.

„ B... $M_B = 2q . l^2 . u^2$.

Если $t = u$, всѣ сѣченія между A и B равноопасны.
„ $t > u$... $2q \cdot l^2 \cdot t^2 = B \cdot W$.
„ $t < u$... $2q \cdot l^2 \cdot u^2 = B \cdot W$.

По этимъ даннымъ надо построить кривыя M и V.

№ 62. Балка свободно положена на двѣ опоры; равномѣрная нагрузка распредѣлена на части длины въ двухъ мѣстахъ симметрично (фиг. 138) Найти кривыя M и V и разсчетное ур-іе балки.

Отв. $K = L = Q = q \cdot c$.

Сѣченіе N... $M = K \cdot x$; $V = K$.

„ N_1.. $M_1 = K \cdot x_1 - q \cdot \frac{(x_1 - a)^2}{2}$,

$V_1 = K - q\,(x_1 - a)$.

Въ сѣченіи C... $max\ M_1 = K(a + c) - Q \cdot \frac{c}{2} = q \cdot c \cdot \frac{2a + c}{2}$.

Всѣ сѣченія между C и D равноопасны.

№ 62, *a*. Распредѣленіе нагрузки подобно тому, которое было въ предыдущей задачѣ, только плечи a_1 и a_2 (фиг. 139) неодинаковы и длина нагруженныхъ частей c_1 и c_2 различная, а нагрузка на 1 длины — одна и та же. Сдѣлать размѣщеніе нагрузки подъ условіемъ, чтобы всѣ сѣченія между C и D были одинаково опасны

Отв. Это будетъ при условіи $K = q \cdot c_1$ и $L = q \cdot c_2$, для чего необходимо существованіе р-ва.

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{2a_1 + c_1}{2a_2 + c_2}.$$

№ 63 Балка свободно положена на двѣ опоры A и B (фиг. 140); нагрузка Q представляется въ видѣ слоя постоянной толщины, но перемѣнной высоты, постепенно возрастающей при переходѣ отъ одной опоры къ другой. Найти кривыя M и V, разсчетное ур-іе, стрѣлу прогиба и ур-іе упругой линіи.

Отв. $K = \frac{L}{2} = \frac{Q}{3}$.

Сѣченіе N... $M = Q \cdot x \cdot \frac{l^2 - x^2}{3l^2}$; $V = Q \cdot \frac{l^2 - 3x^2}{3l^2}$.

Абсц. *max.* мом.... $\bar{x} = l : \sqrt{3}$

$$max\ M = \frac{2}{9\sqrt{3}} \cdot Q \cdot l = 0{,}1283 \cdot Q \cdot l = B \cdot W.$$

Ур-іе упругой линіи:

$$A \cdot z = \frac{Q \cdot x}{180} \cdot \frac{10l^2 \cdot x^2 - 3x^4 - 7l^4}{l^2}.$$

Абсцисса наибольшаго провѣса

$$x = l \, . \sqrt{1 - \sqrt[3]{8 : 15}} = 0{,}5193 \, . \, l.$$

Стрѣла прогиба... $A . h = 0{,}013 \, . \, Q \, . \, l^3$.

№ 64. Лѣвымъ концомъ A балка защемлена въ стѣнѣ (фиг. 141), правая часть балки лежитъ свободно на опорѣ B; на свѣшивающемся за опору концѣ балка нагружена сосредоточеннымъ грузомъ P. Найти сопротивленія опоры такой балки, разсчетное ур-іе и стрѣлу прогиба въ точкѣ подвѣса.

Отв Вѣтвь AHB

$$A \, . \, z = \frac{P(m - x)^3 - K(l - x)^3}{6} + c_1 \, . \, x + c_2.$$

Вѣтвь BC_1

$$A \, . \, z_1 = P . \frac{(m - x_1)^3}{6} + c_1 . x_1 + c_2.$$

Постоянныя величины

$$c_1 = \frac{P . m^2 - K . l^2}{2}; \quad c_2 = \frac{K . l^3 - P \, . \, m^3}{6}.$$

Сопротивленія опоръ:

$$K = \frac{3m - l}{2l} . P = P + \frac{3}{2} . \frac{c}{l} . P.$$

$$L = \frac{m - l}{2l} \, . \, 3P = \frac{3}{2} . \frac{c}{l} \, . \, P.$$

$$M_B = P \, . \, c; \;\; M_A = -\frac{P \, . \, c}{2}.$$

$$P \, . \, c = B \, . \, W \ldots. \text{ сѣч. } B.$$

$$A \, . \, f = \frac{P \, . \, m^3}{3} - \frac{P \, . \, l}{12}(3m - l)^2 = P \, . \, c^2 \, . \, \frac{4c + 3l}{12}.$$

№ 65. Условія задачи подобны предыдущимъ, только нагрузка Q на длинѣ c распредѣлена равномѣрно. Не составляя ур-ій упругой линіи, найти сопротивленія опоръ и разсчетное ур-іе (фиг. 142).

Отв. $K = Q + \frac{3}{4}\frac{c}{l} \, . \, Q; \;\; L = \frac{3}{4}\frac{c}{l} \, . \, Q$

$$M_B = Q \cdot \frac{c}{2}; \;\; M_A = -Q \cdot \frac{c}{4}$$

$$Q \cdot \frac{c}{2} = B . W \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \text{ сѣч. } B.$$

№ 66. Балка свободно положена на двѣ опоры A и B (фиг. 143), нагрузка распредѣлена на длинѣ BC и равномѣрно возрастаетъ, идя отъ C къ B.

Найти разсчетный моментъ для такой балки.

Отв. $K = Q \cdot \frac{c}{3l}$; $L = Q \cdot \frac{3l - c}{3l}$.

Абсцисса *max* сгибающаго момента

$$\bar{x} = a + c \cdot \sqrt{K:Q} = a + c\sqrt{\frac{c}{3l}}$$

Разсчетное ур-іе

$$\frac{c}{3l}\left(a + \frac{2c}{3} \cdot \sqrt{\frac{c}{3l}}\right) \cdot Q = B \cdot W.$$

№ 67 Произвести разсчетъ балки въ тѣхъ условіяхъ, которыя встрѣчаются въ резервуарахъ проф. *Intze*, съ коническимъ днищемъ изъ листового желѣза.

Профиль днища въ схемѣ данъ на фиг. 144 (подробности см. въ *Атласѣ деталей машинъ*); CD — образующая конуса, вдоль которой располагается одна изъ балокъ, поддерживающихъ коническое днище; $FGHI$ — площадь трапеціи (вырѣзка изъ днища), воспринимающая на себя давленіе воды и передающая его балкѣ; h — высота уровня воды надъ точкою D балки, H — надъ точкою C, y — надъ произвольною точкою E, которая отстоитъ отъ D на разстояніе x, z — соотвѣтственная ширина площади нагруженія, A и a — два ея крайнія значенія, $CD = l$ длина балки, δ — плотность воды (вѣсъ 1 куб. *mm*). Элементарная площадь — $z \cdot dx$; давленіе воды, воспринимаемое этой площадью — $z \cdot y \cdot dx\ \delta$, давленіе, приходящееся на *1* длины балки въ сѣченіи E

$$p_E = \delta \cdot y \cdot z$$

По фиг. 144 имѣемъ

$$y = h + x \cdot \frac{H - h}{l}$$

$$z = a + x \cdot \frac{A - a}{l}$$

Поэтому

$$p_E = \frac{\delta}{l^2}\Big[a \cdot l + x\,(A - a)\Big] \cdot \Big\{h \cdot l + x\,(H - h)\Big\}.$$

Законъ измѣненія p представится параболою $C_1E_1D_1$ (фиг. 145), гдѣ обозначаютъ:

при $x = 0 \ldots.\ DD_1 = p_D = \delta \cdot a \cdot h = n$

при $x = l \ldots\ CC_1 = p_c = \delta \cdot A \cdot H = N.$

Ордината, соотвѣтствующая значенію $x = \frac{l}{2}$, будетъ

$$\delta . \frac{H + h}{2} . \frac{A + a}{2} .$$

Примемъ вмѣсто нея большую величину

$$FF_1 = \frac{CC_1}{2} = \frac{N}{2} = \frac{\delta . A . H}{2}$$

и допустимъ, что величины p измѣняются, какъ ординаты ломаной линіи $C_1F_1D_1$ (фиг. 145), которая весьма близко подходитъ къ точному параболическому очертанію $C_1E_1D_1$. Нагрузка графически будетъ представляться площадью $CC_1F_1D_1D$, которую можно разсматривать, какъ состоящую изъ двухъ площадей P и Q, где

$$P = \frac{\overline{CD} . \overline{CC_1}}{2} = \frac{\delta . A . H . l}{2} = \frac{N . l}{2} .$$

$$Q = \frac{\overline{DD_1} . \overline{ID}}{2} = \frac{\delta . a . h . l}{4} = \frac{n . l}{4} .$$

Для опредѣленія сопротивленія опоры L беремъ за центръ моментовъ точку D, а для опредѣленія K — точку C

$$L . l = P . \frac{2}{3} l + Q . \frac{l}{6} ; \quad L = \frac{4P + Q}{6} .$$

$$K . l = P . \frac{l}{3} + Q . \frac{5}{6} l ; \quad K = \frac{2P + 5Q}{6}$$

$$K = \delta . l . \frac{A . H + 1{,}25 . a . h}{6} .$$

Пусть абсцисса max сгибающаго момента будетъ $\overline{x}$, а соотвѣтственная ордината площади нагруженія — n_0, тогда

$$n_0 : N = \overline{x} \cdot l ; \quad n_0 = N . \frac{\overline{x}}{l} .$$

Если R будетъ сѣченіе, въ которомъ моментъ будетъ max, тогда въ этомъ сѣчени мы должны имѣть сѣкущее усиліе $= 0$, т. е.

$$K - Q - \text{пл. } RR_1D = 0, \text{ гдѣ}$$

$$\text{пл. } RR_1D = \frac{n_0 . \overline{x}}{2} = \frac{N . \overline{x}^2}{2l} ; \text{ поэтому}$$

$$\delta . l . \frac{A . H + 1{,}25\, a . h}{6} = \frac{\delta . a . h . l}{4} + \delta . A . H . \frac{\overline{x}^2}{2l} .$$

$$\overline{x} = l . \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{12} . \frac{a . h}{A . H}} .$$

Разсчетный моментъ въ сѣченіи R будетъ:

$$M = K . \overline{x} - Q \left(\overline{x} - \frac{l}{6} \right) - \frac{N . \overline{x}^3}{6 . l} .$$

Г. Многоопорныя балки. Опредѣленіе сопротивленій опоръ и нахожденіе разсчетнаго момента.

25. **Общія соображенія относительно многопролетныхъ балокъ.** Если число опоръ, на которыхъ балка лежитъ свободно, превышаетъ двѣ, въ такомъ случаѣ опредѣленіе давленій на опоры не можетъ быть сдѣлано исключительно помощію ур-ій статики, н. ч. этихъ ур-ій въ случаѣ дѣйствія параллельныхъ силъ имѣется только *два*, а неизвѣстныхъ давленій на опоры всегда болѣе двухъ Рѣшеніе вопроса можно сдѣлать и въ этомъ случаѣ опредѣленнымъ, принимая во вниманіе упругое сопротивленіе сгибанію, оказываемое балкою, и взаимное расположеніе опоръ по отношенію къ нѣкоторой горизонтали, имѣющей опредѣленное положеніе въ пространствѣ

На всемъ протяженіи балка предполагается *призматическою*, т. е имѣющею постоянные размѣры поперечнаго сѣченія.

Пусть имѣемъ балку, которая свободно лежитъ на $n+1$ опорѣ, т е имѣетъ n промежутковъ между опорами, или, какъ говорятъ, *n пролетовъ*. При рѣшеніи вопроса о нагруженіи такой балки явится необходимость опредѣлять $n+1$ неизвѣстное въ видѣ сопротивленій опоръ. Эта задача могла бы быть рѣшена и на основаніи тѣхъ данныхъ, которыя у насъ уже имѣются относительно примѣненія ур-ія упругой линіи въ различныхъ случаяхъ; но этотъ способъ приводитъ къ весьма продолжительнымъ выкладкамъ. къ рѣшенію довольно большого числа ур-ій 1-й степени, число которыхъ весьма быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ числа пролетовъ балки и съ переходомъ отъ равномѣрной нагрузки къ отдѣльнымъ, сосредоточеннымъ грузамъ.

Съ цѣлію упрощенія рѣшенія подобныхъ вопросовъ *Clapeyron* и *Bertot* предложили особый методъ разсчета многоопорныхъ балокъ, помощію котораго изъ ур-ій упругой линіи опредѣляются сначала *не сопротивленія опоръ*, а величины сгибающихъ моментовъ во всѣхъ поперечныхъ сѣченіяхъ балки, проходящихъ чрезъ ея точки опоры. Такіе моменты называются *опорными моментами*. Между опорными моментами трехъ смежныхъ опоръ многопролетной балки, оказывается, существуетъ нѣкоторая общая зависимость, видъ которой опредѣляется только способомъ нагруженія трехъ произвольно взятыхъ пролетовъ балки и вовсе не зависитъ отъ числа пролетовъ. Такая зависимость наз. *ур-іемъ трехъ опорныхъ моментовъ*. Имѣя въ распоряженіи такое ур-іе, весьма быстро находятъ всѣ опорные моменты, а по нимъ — сопротивленія опоръ.

Въ дальнѣйшемъ намъ предстоитъ, слѣд., сдѣлать выводъ ур-ой трехъ опорныхъ моментовъ. Первое упрощеніе въ задачѣ о многоопорной балкѣ было сдѣлано *Клапейрономъ*. Получивши ур-ія упругой линіи послѣ интеграціи въ общемъ видѣ, онъ исключилъ изъ нихъ всѣ неизвѣстныя сопротивленія опоры, оставивши въ этихъ ур-іяхъ *опорные сгибающіе моменты* и *девіаціи*, т. е. *tg*-ы угловъ наклоненія упругія

линіи къ горизонту во всѣхъ точкахъ опоры; такихъ девіацій у балки съ n пролетами было $n+1$; если балка на всѣхъ опорахъ лежитъ свободно, то опорные моменты двухъ крайнихъ опоръ равны нулю, и неизвѣстными опорными моментами будутъ только $n-1$ опорный моментъ для среднихъ опоръ; слѣд., въ задачѣ *Клапейрона* всѣхъ неизвѣстныхъ, подлежащихъ опредѣленію, будетъ

$$(n+1)+(n-1)=2n$$

Дальнѣйшее упрощеніе въ рѣшеніи этой задачи было сдѣлано *Берто*, который изъ ур-ій *Клапейрона* исключилъ всѣ неизвѣстныя $n+1$ девіаціи и оставилъ для опредѣленія только $n-1$ неизвѣстное въ видѣ опорныхъ *mom*-овъ промежуточныхъ опоръ. И *Клапейронъ* и *Берто* разсматривали вопросъ о нагруженіи многоопорной балки только равномѣрною нагрузкою, величина которой не измѣняется между двумя данными опорами. Рѣшая вопросъ въ этомъ случаѣ общимъ, извѣстнымъ уже намъ путемъ, мы встрѣтились бы съ необходимостью рѣшать $3n+1$ ур-іе 1-й степени, какъ не трудно видѣть: ур-іе упругой линіи мы написали бы въ каждомъ пролетѣ *1* разъ и объинтегрировали бы его два раза, вводя $2n$ неизвѣстныхъ произвольныхъ постоянныхъ, которыя являются при интеграціи между произвольными предѣлами; кромѣ этихъ $2n$ неизвѣстныхъ въ эти ур-ія вошли бы еще $n+1$ неизвѣстное въ видѣ сопротивленій опоръ; слѣд., всѣхъ неизвѣстныхъ, подлежащихъ опредѣленію было бы

$$2n+(n+1)=3n+1.$$

Для нахожденія этихъ неизвѣстныхъ надо было бы составить $3n+1$ ур-іе: изъ нихъ *2* ур-ія дадутъ намъ условія равновѣсія между нагрузкою и сопротивленіями опоръ, т. е. это будутъ *2* ур-ія статики; затѣмъ мы имѣемъ $2n$ точекъ опоры, въ каждомъ пролетѣ—по *2* точки опоры; въ каждой изъ этихъ точекъ опоры мы можемъ написать, что упругая линія проходитъ чрезъ точку, обѣ координаты которой извѣстны; такихъ ур-ій будетъ, слѣдов., $2n$; наконецъ, промежуточныхъ точекъ опоры у балки будетъ $n-1$, въ каждой изъ этихъ точекъ мы можемъ написать, что лѣвая кривая непрерывно переходитъ въ правую кривую, и такихъ ур-ій, выражающихъ равенство девіацій, будетъ $n-1$; а всего мы получимъ $3n+1$ ур-іе 1-й степени:

2 ур-ія статики,

$2n$ ур-ій, координирующихъ точки опоры балки въ каждомъ пролетѣ,

$n-1$ ур-іе равенства девіацій въ точкахъ опоры.

Всего... $3n+1$ ур-іе,

т. е. рѣшеніе вопроса и въ общемъ случаѣ является вполнѣ опредѣленнымъ, но для этого требуется разрѣшеніе $3n+1$ ур-ія, тогда какъ

способъ *Берто* приводитъ къ рѣшенію только $n-1$ ур-ія Разница выходитъ такова

при $n=2$ . . $3n+1=7$. .. $n-1=1$

„ $n=3$.... . $3n+1=10$.. . $n-1=2$ и т. д.

Но *Берто* далъ только частное рѣшеніе вопроса, когда нагрузка въ каждомъ пролетѣ по всей его длинѣ распредѣлена равномѣрно. Болѣе общее рѣшеніе той же задачи было сдѣлано покойнымъ профессоромъ Императорскаго Техническаго Училища *Д. П. Лебедевымъ*, который далъ выводъ ур-ія трехъ опорныхъ моментовъ въ самой общей его формѣ, когда нагрузка въ каждомъ изъ пролетовъ представлена отдѣльными сосредоточенными грузами.

Если бы предположить, что на каждомъ изъ пролетовъ имѣется только по одному сосредоточенному грузу $P_1 P_2$ .. P_n (фиг. 146), тогда въ каждомъ изъ пролетовъ выраженіе сгибающаго момента имѣло бы различный видъ справа и слѣва отъ точки приложенія сосредоточенной нагрузки, слѣд., въ каждомъ пролетѣ мы имѣли бы по 2 ур-ія упругой линіи, т. е. всего $2n$ ур-ій упругой линіи; интегрируя каждое изъ нихъ по 2 раза, мы ввели бы $4n$ неизвѣстныхъ произвольныхъ постоянныхъ, а всего неизвѣстныхъ, подлежащихъ опредѣленію, было бы $5n+1$, ибо къ $4n$ неизвѣстнымъ произвольнымъ постояннымъ надо присоединить еще $n+1$ неизвѣстное въ видѣ сопротивленій опоръ. Для нахожденія всѣхъ этихъ неизвѣстныхъ необходимо было бы составить и рѣшить $5n+1$ ур-іе. Эти ур-ія, очевидно, должны были составиться такъ:

2 ур-ія статики, выражающихъ равновѣсіе нагрузки и сопротивленій опоръ,

$2n$ ур-ій, координирующихъ точки опоры балки въ каждомъ пролетѣ,

n ур-ій, выражающихъ равенство ординаты правой и лѣвой кривой при каждой точкѣ приложенія внѣшней нагрузки,

n ур-ій равенства девіацій у смежныхъ кривыхъ при каждой изъ точекъ приложенія внѣшней нагрузки,

$n-1$ ур-іе равенства девіацій у смежныхъ кривыхъ при каждой изъ промежуточныхъ точекъ опоры у балки.

Всего составляется, слѣдовательно, $5n+1$ ур-іе, и рѣшеніе вопроса получается вполнѣ опредѣленное. По способу же проф. *Лебедева*, какъ и по способу *Берто* въ случаѣ равномѣрной нагрузки, понадобится рѣшить здѣсь только $n-1$ ур-іе съ $n-1$ неизвѣстнымъ въ видѣ опорныхъ моментовъ для $n-1$ промежуточной опоры. Разница выходитъ уже слѣдующая:

при $n=2$... $5n+1=11$... $n-1=1$,

„ $n=3$ „ $=16$... „ $=2$ и т. д.

Такая же разница въ числѣ ур-ій между рѣшеніемъ общимъ и проф. *Лебедева* получилась бы и въ томъ случаѣ, когда въ каждомъ изъ пролетовъ равномѣрная нагрузка O (фиг. 146) была бы распредѣлена лишь на части длины пролета и однимъ краемъ прилегала бы къ опорѣ.

Затѣмъ въ случаѣ дѣйствія двухъ сосредоточенныхъ грузовъ на каждомъ пролетѣ или вмѣсто этого въ случаѣ существованія на каждомъ пролетѣ равномѣрной нагрузки R (фиг. 146), не прилегающей ни къ одной изъ опоръ, пришлось бы рѣшать по общему способу $7n+1$ ур-іе, а по способу проф. *Лебедева* опять только $n-1$ ур іе. При комбинаціяхъ равномѣрной нагрузки O или R съ сосредоточенными грузами на каждомъ изъ пролетовъ, рѣшая вопросъ общимъ путемъ возможно встрѣтиться съ необходимостью совмѣстнаго рѣшенія

$9n+1$ ур-ій,

$11n+1$ „ и т. д.,

а по способу проф. *Лебедева,* пользуясь ур-іемъ трехъ опорныхъ моментовъ, и въ этихъ случаяхъ придется рѣшать каждый разъ только $n-1$ ур-іе.

Этимъ въ достаточной мѣрѣ выясняется значеніе ур-ія трехъ опорныхъ моментовъ и необходимость имѣть его выводъ въ самомъ общемъ видѣ. Для этого достаточно сдѣлать выводъ его только для случая существованія сосредоточенныхъ нагрузокъ въ каждомъ изъ пролетовъ, такъ какъ равномѣрная нагрузка всякаго вида Q, O или R (фиг. 146) и неравномѣрная нагрузка могутъ быть разсматриваемы, какъ совокупность сосредоточенныхъ грузовъ, измѣняющихся при переходѣ отъ одной точки приложенія къ другой по опредѣленному закону.

Рѣшеніе этого вопроса приводится здѣсь съ цѣлію удовлетворенія потребностей не столько инженернаго и строительнаго искусства, сколько машиностроенія, гдѣ съ вопросомъ о нагруженіи призматическихъ балокъ (въ видѣ валовъ и пр.), лежащихъ на нѣсколькихъ опорахъ, опредѣленнымъ образомъ координированныхъ, приходится встрѣчаться весьма часто и при самыхъ разнообразныхъ способахъ нагруженія.

29. **Сопротивленія опоръ многопролетной балки и ея сѣкущія усилія.** Когда балка положена на n опоръ, не измѣняющихъ послѣ нагруженія балки своего относительнаго положенія въ пространствѣ, тогда каждая изъ опоръ оказываетъ давленію, которое производитъ на нее балка, равное и прямо противоположное сопротивленіе или *реакцію*. Не нужно смѣшивать *сопротивленіе опоры* съ *сѣкущимъ усиліемъ* по ту и по другую сторону отъ опоры, чрезъ которую балка слѣдуетъ непрерывно.

Сѣкущимъ усиліемъ или *силою сдвига* въ данномъ сѣченіи мы называли алгебраическую сумму всѣхъ силъ по одну сторону отъ разсматриваемаго сѣченія.

Согласно съ этимъ опредѣленіемъ мы можемъ сказать, что *сѣкущее усиліе при данной опорѣ будетъ равно сопротивленію этой опоры только въ такомъ случаѣ, когда балка кончается надъ данной опорой, и нагруженіе ея по другую сторону отъ опоры вовсе не продолжается.*

Если же балка слѣдуетъ чрезъ данную опору непрерывно, тогда, подходя къ точкѣ опоры балки слѣва, мы будемъ имѣть нѣкоторую величину сѣкущаго усилія, положимъ $V_л$, которая представляетъ собою алгебраическую сумму всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на балку слѣва отъ даннаго сѣченія, включая въ число сихъ не только внѣшнюю нагрузку, расположенную лѣвѣе даннаго сѣченія, но также сопротивленія всѣхъ опоръ, расположенныхъ *лѣвѣе* взятой; а подходя къ данной точкѣ опоры справа, мы будемъ имѣть уже другую величину сѣкущаго усилія, положимъ $V_п$, которая будетъ представлять собою алгебраическую сумму всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на балку справа отъ даннаго сѣченія, включая въ число дѣйствующихъ силъ не только внѣшнюю нагрузку, расположенную *правѣе* даннаго сѣченія, но также сопротивленія всѣхъ опоръ, расположенныхъ *правѣе* данной Сопротивленіе же взятой опоры K, очевидно, должно равняться суммѣ сѣкущихъ усилій при данной опорѣ справа отъ нея и слѣва, т. е.

$$K = V_л + V_п \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I}.$$

Такова величина сопротивленія опоры; что же касается до направленія дѣйствія этого сопротивленія, то по смыслу вопроса *положительная* величина K должна обозначать, что сопротивленіе опоры направлено въ сторону, противоположную дѣйствію нагрузки, а *отрицательная* величина сопротивленія данной опоры будетъ обозначать, что эта опора должна оказывать сопротивленіе въ одну сторону съ дѣйствіемъ нагрузки.

Происхожденіе ур-ія I понятно само собою, но оно можетъ быть подтверждено также и на основаніи правилъ статики. Пусть имѣемъ балку BAC (фиг. 147), лежащую на нѣсколькихъ опорахъ и какъ-либо нагруженную. Когда балка получила отъ нагрузки свой упругій прогибъ, она пришла въ равновѣсіе, и каждая изъ опоръ восприняла приходящееся на нее давленіе; послѣ этого мы можемъ отвлечься отъ разсмотрѣнія опоръ, замѣнивъ воздѣйствіе ихъ на балку соотвѣтственными реакціями. Разсмотримъ одну изъ опоръ A, чрезъ которую балка слѣдуетъ непрерывно, и опредѣлимъ сопротивленіе этой опоры.

Замѣнимъ алгебраическую сумму всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на балку слѣва отъ сѣченія A, ихъ слагающею; это будетъ, очевидно, сѣкущее усиліе для балки слѣва отъ ея сѣченія A, т. е. $V_л$; пусть оно будетъ приложено въ точкѣ D на разстояніи a отъ разсматриваемой опоры. Совершенно такимъ же образомъ замѣнимъ и алгебраическую сумму всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на балку справа отъ сѣченія A, ихъ слагающею; это будетъ, очевидно, сѣкущее усиліе для балки справа отъ

ея сѣченія A, т. е V_n; пусть оно будетъ приложено въ точкѣ E на разстояніи b отъ разсматриваемой опоры. Балка находится въ равновѣсіи, слѣдовательно, необходимо имѣть слѣдующее:

1) моменты сѣкущихъ усилій справа и слѣва отъ точки A должны быть равны между собою, т. е.

$$V_l \cdot a = V_n \cdot b;$$

2) слагающая сѣкущихъ усилій должна проходить чрезъ точку A и должна быть равна ихъ суммѣ, т. е.

$$K = V_l + V_n$$

Только въ частномъ случаѣ, когда опора A является крайнею правою или крайнею лѣвою, сѣкущее усиліе не будетъ отличаться отъ сопротивленія опоры Напр., если опора A будетъ крайнею лѣвою, тогда

$$V_l = 0 \,.. \quad K_{л\; лѣв} = V_n,$$

а если опора A будетъ крайнею правою, то

$$V_n = 0 \;. \quad K_{пр\; прав} = V_л$$

Разсмотрѣніе фиг 147 и ф-лы I приводитъ насъ къ такому заключенію, что *если мы перемѣщаемъ сѣченіе все время* **по одному** *какому-нибудь направленію и переходимъ чрезъ точку опоры, тогда сѣкущее усиліе должно мѣнять при этомъ не только свою величину, но также и знакъ.* Подходя къ опорѣ A слѣва (фиг 147) пусть имѣемъ, напримѣръ, V_l отрицательнымъ, тогда K надо считать положительнымъ, перейдя чрезъ опору A слѣва направо, мы должны получить сѣкущее усиліе равнымъ

$$-V_l + K = -V_л + (V_l + V_n) = +V_n$$

На чертежѣ (фиг. 147) V_n имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и V_l, т. е. оно отрицательно; это такъ и должно быть, потому что на чертежѣ V_n представляетъ сѣкущее усиліе для того случая, когда мы подходимъ къ A *справо налѣво*, а не наоборотъ, какъ мы сейчасъ вычисляли; поэтому фиг. 147 не противорѣчитъ предыдущему вычисленію, а подтверждаетъ его.

Такова существенная разница между сопротивленіями опоръ многопролетной балки и сѣкущими усиліями при точкахъ опоръ ея.

30. **Выраженіе сѣкущаго усилія и сгибающаго момента въ произвольномъ пролетѣ балки.** а) *Случай ненагруженнаго пролета.* Пусть имѣемъ произвольный пролетъ балки, на которомъ нѣтъ никакой внѣшней нагрузки; текущій № лѣвой опоры—($к — 1$), а правой—$к$.

Пусть обозначаютъ:

M_{k-1} — опорный моментъ въ сѣченіи лѣвой опоры даннаго пролета,

M_k — „ „ „ „ правой „ „ „

$M_н$ — сгибающій моментъ въ произвольномъ сѣченіи *ненагруженнаго* пролета,

$V_н$ — сѣкущее усиліе въ произвольномъ сѣченіи *ненагруженнаго* пролета,

l — длина пролета.

Если данный пролетъ AB (фиг. 148) не нагруженъ вовсе, тогда между точками A и B величина сѣкущаго усилія остается постоянною и равною той, которую мы получимъ, перейдя чрезъ точку опоры A слѣва направо, т. е. уже включивъ въ алгебраическую сумму всѣхъ силъ слѣва отъ сѣченія A также и сопротивленіе опоры A, поэтому кривая сѣкущихъ усилій ненагруженнаго пролета будетъ горизонтальною прямою линіею CD, параллельною съ осью абсциссъ Ax.

Зависимость между сгибающимъ моментомъ и сѣкущимъ усиліемъ въ сѣченіи N (фиг. 148), по теоремѣ *Шведлера* (см. § 11, ф-ла **24**). пишется такъ:

$$\frac{dM_н}{dx} = V_н = const.$$

Интегрируя это ур-іе, получимъ:

$$M_н = V_н \,.\, x + c \quad \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{a},$$

гдѣ c — произвольное постоянное. Если сдѣлаемъ $x = 0$, т. е. перенесемъ сѣченіе N въ A, тогда $M_н$ обратится въ $M_{к-1}$, и мы будемъ имѣть:

$$M_{к-1} = c, \text{ поэтому}$$

$$M_н = V_н \,.\, x + M_{к-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{б},$$

т. е. *сгибающій моментъ въ произвольномъ сѣченіи ненагруженнаго пролета надо писать такъ же, какъ для балки, свободно лежащей на опорахъ при томъ условіи, что въ сѣченіи надъ опорою у нея приложенъ* **опорный моментъ** *и* **сѣкущее усиліе** *ненагруженнаго пролета.*

Нужно именно помнить, что, *разсматривая равновѣсіе произвольнаго пролета балки, при опорѣ мы должны имѣть приложеннымъ* **не сопротивленіе опоры,** *а сѣкущее усиліе, которое получается,* **перейдя** *чрезъ опору въ пролетъ.*

Если сдѣлаемъ $x = l$, т. е. перенесемъ сѣченіе N въ B (фиг. 148), тогда $M_н$ обратится въ $M_к$, и мы будемъ имѣть:

$$M_к = V_н \,.\, l + M_{к-1}, \text{ откуда}$$

$$V_н = \frac{M_к - M_{к-1}}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{II},$$

т. е. *сѣкущее усиліе ненагруженнаго пролета = дроби, у которой числитель есть разность опорныхъ моментовъ послѣдующей и предыду-*

щей опоры, а знаменатель—длина пролета. Послѣ этого ф-ла б приметъ видъ:

$$M_x = \frac{M_k - M_{k-1}}{l} \cdot x + M_{k-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}.$$

Эта ф-ла показываетъ, что кривая моментовъ ненагруженнаго пролета будетъ прямою линіею, наклонною къ оси абсциссъ. Координата $\underline{x}|$, опредѣляющая точку пересѣченія прямой моментовъ съ осью абсциссъ, найдется изъ ф-лы III, сдѣлавши въ ней $M_x = 0$.

$$\underline{x}| = \frac{M_{k-1}}{M_{k-1} - M_k} \cdot l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{в}.$$

Если $M_{k-1} > M_k$, тогда $\underline{x}|$ будетъ положительно, и прямая моментовъ будетъ подобна FF (фиг. 148).

Если $M_{k-1} < M_k$, величина $\underline{x}|$ будетъ отрицательна, т. е. точка пересѣченія прямой моментовъ съ осью абсциссъ будетъ находиться лѣвѣе опоры A, и прямая моментовъ будетъ подобна EF_1 (фиг. 148)

Если $M_{k-1} = M_k$, тогда $\underline{x}| =$ безконечности, и прямая моментовъ EF_0 будетъ || оси абсциссъ.

Если $M_k = 0$, т. е. опора B будетъ крайнею правою, тогда

$\underline{x}|$ будетъ $= l$,

т е. прямая моментовъ пересѣчетъ ось абсциссъ въ сѣченіи, проходящимъ чрезъ опору B; въ частномъ случаѣ, когда опоры A и B находятся на одной высотѣ, прямая моментовъ пройдетъ какъ разъ чрезъ точку опоры B.

Если $M_{k-1} = 0$, т. е. опора A будетъ крайнею лѣвою, тогда

$\underline{x}|$ будетъ $= 0$,

т. е. прямая моментовъ будетъ начинаться въ точкѣ A.

б) Случай пролета, нагруженнаго однимъ сосредоточеннымъ грузомъ (фиг. 149). Разстоянія точки приложенія нагрузки P отъ опоръ даннаго пролета обозначимъ чрезъ a и b. Если бы данная балка, имѣющая длину, поперечные размѣры и нагрузку разсматриваемаго пролета, была свободно положена на опоры A и B, ихъ сопротивленія p и q опредѣлялись бы такъ (фиг. 149):

$$\left.\begin{aligned} p = P \cdot \frac{b}{l};\ q = P \cdot \frac{a}{l} \\ p + q = P \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{г}.$$

Въ случаѣ непрерывной балки, нагруженной за опорами A и B, сопротивленія опоръ будутъ другія, но они будутъ находиться въ зависимости отъ величинъ p и q, какъ увидимъ далѣе

Пусть обозначають:

M_a и V_a — сгибающій моментъ и сѣкущее усиліе въ произвольномъ сѣченіи N, (фиг. 149) на плечѣ a балки, т. е. при измѣненіи x отъ o до a;

M_b и V_b — сгибающій моментъ и сѣкущее усиліе въ произвольномъ сѣченіи N_1 (фиг. 149) на плечѣ b балки, т е. при измѣненіи абсциссы сѣченія x_1 отъ a до l;

M_c — сгибающій моментъ въ точкѣ приложенія нагрузки.

Зависимость между сгиб. мом и сѣкущимъ усиліемъ въ сѣченіи N (фиг. 149), по теоремѣ *Шведлера*, напишется такъ:

$$\frac{dM_a}{dx} = V_a = const.,$$

н. ч. между точками A и C, т. е. на всемъ плечѣ a, въ составъ V_a входитъ все та же алгебраическая сумма силъ, что и въ точкѣ A, перейдя опору слѣва направо и включивши въ выраженіе V_a также и сопротивленіе опоры A.

Интегрируя написанное выше ур-іе, получимъ:

$$M_a = V_a \, . x + c_1.$$

Если сдѣлаемъ $x = 0$, т. е. перенесемъ сѣченіе N въ точку A, тогда M_a обратится въ M_{k-1}, и мы получимъ:

$$M_{k-1} = c_1$$

$$M_a = V_a . x + M_{k-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{д.}$$

Если сдѣлаемъ въ этомъ ур іи $x = a$, т. е. перенесемъ сѣченіе N въ C (фиг. 149), тогда M_a обратится въ M_c, и мы получимъ:

$$M_c = V_a . a + M_{k-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{е.}$$

Когда мы перейдемъ въ сѣченіе N_1 (фиг. 149), идя слѣва направо, мы получимъ новое выраженіе сѣкущаго усилія, т. е. величину V_b вмѣсто V_a. Сѣкущеее усиліе, перейдя точку опоры слѣва направо, мы все время считали ранѣе положительнымъ, поэтому для полученія V_b надо вычесть изъ V_a нагрузку P, чтобы, подходя къ точкѣ опоры B слѣва, снова имѣть отрицательную величину сѣкущаго усилія (см. § предыдущій); тогда, перейдя чрезъ опору B слѣва направо и включивши въ число складываемыхъ силъ также и сопротивленіе опоры B, мы снова получимъ положительное сѣкущее усиліе и т. д. Слѣд.,

$$V_b = V_a - P \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{ж.}$$

Зависимость между сгибающимъ моментомъ и сѣкущимъ усиліемъ въ сѣченіи N_1 выразится, по теоремѣ *Шведлера*, такъ:

$$\frac{dM_b}{dx_1} = V_b = const,$$

п. ч при измѣненіи x_1 отъ a до l, т е на всемъ протяженіи праваго плеча пролета, не прибавляется никакой новой нагрузки. Интегрируя послѣднее равенство, получимъ:

$$M_b = V_b . x_1 + c_2$$

Если сдѣлаемъ $x_1 = l$, т. е. перенесемъ сѣченіе N_1 въ B, тогда M_b обратится въ M_k, и мы получимъ

$$M_k = V_b . l + c_2$$

Вычитая 2 послѣднія р-ва одно изъ другого, находимъ:

$$M_b = M_k + V_b . (x_1 - l) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{з.}$$

Если сдѣлаемъ $x_1 = a$, т. е. перенесемъ сѣченіе N_1 (фиг. 149) въ C, тогда M_b обратится въ M_c, а изъ р-ва з получимъ:

$$M_c = M_l + V_b . (a - l) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{к.}$$

Т. к. величина сгибающаго момента M_c д. б. одною и тою же, подходить-ли къ сѣченію C слѣва или справа, поэтому 1-я части р-въ е и к надо считать одинаковыми; тогда

$$V_a . a + M_{k-1} = M_k + V_b . (a - l).$$

Пользуясь р-вомъ ж, получаемъ изъ предыдущаго р-ва слѣдующее:

$$P . a + M_{k-1} = M_k - V_b . l, \quad \text{или}$$

$$V_b = \frac{M_k - M_{k-1}}{l} - P . \frac{a}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{и}$$

Сравнивая 2-ю часть равенства и съ ф-лами II и г, мы видимъ, что уменьшаемое представляетъ собой сѣкущее усиліе, какимъ оно было бы въ ненагруженномъ пролетѣ, а вычитаемое величину q сопротивленія правой опоры, которое было бы у даннаго пролета при свободныхъ концахъ у него, т. е.

$$V_b = V_н - q = V_н - (P - p), \quad \text{или}$$

$$\left.\begin{aligned} V_b &= V_н + p - P \\ V_a &= V_b + P = V_н + p \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV.}$$

Ф-лы IV показываютъ, что *для полученія сѣкущаго усилія въ пролетѣ, нагруженномъ однимъ сосредоточеннымъ грузомъ, къ сѣкущему усилію ненагруженнаго пролета надо прибавить ту величину сопротивленія опоры, которая получилась бы у балки, имѣющей всѣ размѣры и нагрузку даннаго пролета, но лежащей на своихъ опорахъ свободно*, т е. не продолжающейся за опоры.

Послѣ этого по ф-лѣ д напишемъ

$$M_a = (V_н + p) . x + M_{k-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{V.}$$

Точно также по ф-лѣ 3 имѣемъ.

$$M_b = M_k + (V_н - q).(x_1 - l) = M_k + V_н.x_1 - V_н.l - q(x_1 - l) =$$
$$= M_k + V_н.x_1 - \frac{M_k - M_{k-1}}{l}.l + q(l - x_1).$$

Но въ балкѣ со свободными концами, для которой вычислены величины p и q, имѣетъ мѣсто слѣд. р-во

$$q(l - x_1) = p.x_1 - P(x_1 - a),$$

поэтому можно написать, что

$$M_b = (V_н + p).x_1 + M_{k-1} - P(x_1 - a) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{VI.}$$

Ф-лы **V** и **VI** позволяютъ сдѣлать слѣд. заключеніе: *чтобы написать выраженіе сгибающаго момента въ произвольномъ сѣченіи пролета, нагруженнаго однимъ сосредоточеннымъ грузомъ, для этого нужно представить себѣ данный пролетъ какъ-бы свободнымъ, приложить къ его опорамъ соотвѣтственные опорные моменты и сѣкущія усилія, а затѣмъ писать моментъ въ каждомъ сѣченіи на общихъ основаніяхъ*. Так обр. въ этомъ отношеніи пролетъ нагруженный и ненагруженный не имѣютъ между собою никакой разницы; и здѣсь также необходимо помнить, что, составляя условія равновѣсія для пролета, къ его опорамъ надо приложить *не сопротивленія опоръ*, а тѣ величины сѣкущихъ усилій, которыя получатся, *перейдя* въ пролетъ чрезъ опору, т. е. включивши каждый разъ въ выраженіе сѣкущаго усилія также и сопротивленіе опоры.

Если возьмемъ 1-ю производную отъ M_a и M_b по соотвѣтственнымъ абсциссамъ сѣченій, то изъ ф-лъ **V** и **VI** получимъ ф-лы **IV** Кривая сѣкущихъ усилій на плечѣ AC (фиг. 149) будетъ прямою DE, ||-ною оси Ax, а на плечѣ CB — такою же прямою FH, расположенною только ниже оси абсциссъ, т. к въ предыдущемъ § было доказано, что сѣкущее усиліе должно мѣнять знакъ при перенесеніи сѣченія чрезъ опору, или, безразлично, чрезъ точку приложенія нѣкоторой сосредоточенной нагрузки

Кривая моментовъ на плечѣ AC (фиг. 149) представится прямою KL, которая пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкѣ I. Найдемъ $AI = \bar{x}$; для этого въ ур-іи **V** надо положить

$$M_a = 0; \;\; V_н + p = V_a.$$

Тогда

$$o = V_a.\bar{x} + M_{k-1}, \quad \text{откуда}$$

$$\bar{x} = -\frac{M_{k-1}}{V_a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{H.}$$

Докажемъ, что $\bar{x}$ всегда будетъ менѣе a, т. е. прямая KL всегда будетъ пересѣкать ось абсциссъ между A и C, т. е. на плечѣ a.

По ф-лѣ **e** имѣемъ.

$$\frac{M_c}{V_a} = a + \frac{M_{k-1}}{V_a}.$$

Соединяя это выраженіе съ ф-лой **н**, получимъ:

$$\bar{x} = a - \frac{M_c}{V_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{o}.$$

Ф-лы **н** и **o** показываютъ, что если опорный моментъ отрицателенъ, тогда M_c будетъ положителенъ, и $\bar{x}$ будетъ менѣе a. Въ частномъ случаѣ, когда опора A будетъ крайнею лѣвою опорою балки, будемъ имѣть:

$$M_{k-1} = 0 \ldots\ldots \bar{x} = 0,$$

т. е. точка L совпадаетъ съ A, и кривая моментовъ должна будетъ пройти чрезъ начало координатъ A.

Кривая моментовъ на плечѣ BC (фиг. 149) будетъ прямою KR, которая пересѣкаетъ ось абсциссъ въ точкѣ O на разстояніи $AO = \bar{x}_1$ отъ опоры A. Опредѣлимъ $\bar{x}_1$, положивши M_b въ ур-іи **з** равнымъ нулю.

$$0 = M_k + V_b \cdot (\bar{x}_1 - l), \text{ откуда}$$

$$\bar{x}_1 = l - \frac{M_k}{V_b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{п}.$$

Т. к. величины M_k и V_b обѣ отрицательны, поэтому $\bar{x}_1$ всегда менѣе l, т. е. точка O лежитъ между точкою приложенія нагрузки и правою опорою. Въ частномъ случаѣ, когда опора B будетъ крайнею правою опорою всей многопролетной балки, получимъ:

$$M_k = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \bar{x}_1 = l,$$

т. е. въ этомъ счучаѣ кривая моментовъ должна пересѣкать ось абсциссъ въ сѣченіи надъ опорою.

31. **Ур-іе трехъ опорныхъ моментовъ.** a) *Пролеты нагружены сосредоточенными грузами.* Пусть имѣемъ 2 смежныхъ пролета многоопорной балки, у которыхъ текущій № будетъ k и $k+1$. Введемъ обозначенія:

P_k и P_{k+1} — сосредоточенныя нагрузки на обоихъ пролетахъ,

a_k и a_{k+1} — плечи этихъ нагрузокъ относительно *крайнихъ* опоръ A и C (фиг. 150),

l_k и l_{k+1} — длины пролетовъ,

M_{k-1}, M_k, M_{k+1} — опорные моменты въ сѣченіяхъ A, B, C,

h_k и h_{k+1} — высота средней опоры надъ крайними.

Выберемъ двѣ системы осей координатъ x_1Bz и x_2Bz съ общимъ началомъ B и общей осью Bz. Углы наклоненія касательной къ упругой линіи въ обоихъ пролетахъ пусть будутъ β_1 и β_2. По чертежу видно, что

$$\beta_1 + \beta_2 = 180^0; \; tg\,\beta_1 + tg\,\beta_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{p}.$$

Разстоянія сѣченій N и N_1, произвольно взятыхъ въ обоихъ пролетахъ, отъ крайнихъ опоръ обозначимъ чрезъ ξ_1 и ξ_2. Тогда интегральныя ур-ія упругой линіи въ обоихъ пролетахъ напишутся такъ:

$$-E.I.(h_k - l_k . tg . \beta_1) = \int_0^{l_k} M . \xi_1 . d\xi_1 = \text{Ж}$$

$$-E.I.(h_{k+1} - l_{k+1} tg \beta_2) = \int_0^{l_{k+1}} M . \xi_2 . d\xi_2 = \text{З}$$

Исключая изъ этихъ двухъ р-въ давіаціи при помощи ур-ія **p**, получимъ.

$$-E.I.\left(\frac{h_k}{l_k} + \frac{h_{k+1}}{l_{k+1}}\right) = Б = \frac{Ж}{l_k} + \frac{З}{l_{k+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{q}$$

Выраженіе момента M, который надо вносить при вычисленіи $Ж$, по предыдущему будетъ:

$$M = M_{k-1} + V_a . \xi_1 - P_k . (\xi_1 - a_k), \text{ причемъ}$$

$$V_a = V_{н+p} = \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} + P_k . \frac{l_k - a_k}{l_k}$$

$$M = M_{k-1} + \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} . \xi_1 + P_k . \frac{l_k - a_k}{l_k} . \xi_1 - P_k . \xi_1 + P_k . a_k$$

Так. обр. интегралъ $Ж$ разобьется на 5 отдѣльныхъ, изъ нихъ $Ж_1$ $Ж_2$ $Ж_3$ должны быть взяты въ предѣлахъ отъ o до l_k, тогда какъ два послѣдніе — $Ж_4$ и $Ж_5$ — д. б. взяты въ предѣлахъ отъ a_k до l_k, п. ч. членъ $P_k . (\xi_1 - a_k)$ начинаетъ входить въ выраженіе момента только тогда, когда ξ_1 соотвѣтствуетъ абсциссамъ праваго плеча пролета AB. Поэтому мы будемъ имѣть:

$$Ж_1 = M_{k-1} . \frac{l_k^2}{2}$$

$$Ж_2 = \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} . \frac{l_k^3}{3}$$

$$Ж_3 = P_k . \frac{l_k - a_k}{l_k} . \frac{l_k^3}{3}$$

$$Ж_4 = -P_k . \frac{l_k^3 - a_k^3}{3}$$

$$Ж_5 = P_k . a_k . \frac{l_k^2 - a_k^2}{2}$$

Дѣлая преобразованія, получимъ:

$$Ж_1 + Ж_2 = \frac{M_{k-1} + 2 . M_k}{6} . l_k^2$$

$$Ж_3 + Ж_4 + Ж_5 = P_k . \left[\frac{l_k^3}{3} - \frac{a_k . l_k^2}{3} - \frac{l_k^3}{3} + \frac{a_k^3}{3} + \frac{a_k . l_k^2}{2} - \frac{a_k^3}{2}\right], \text{ или}$$

$$Ж_3 + Ж_4 + Ж_5 = P_k \cdot a_k \cdot \frac{l_k^2 - a_k^2}{6}.$$

Послѣ этого

$$\frac{Ж}{l_k} = \frac{M_{k-1} + 2\,M_k}{6} \cdot l_k + P_k \cdot \frac{a_k}{l_k} \cdot \frac{l_k^2 - a_k^2}{6}$$

Вслѣдствіе симметріи въ обозначеніяхъ так. же обр получили бы:

$$\frac{З}{l_{k+1}} = \frac{M_{k+1} + 2\,M_k}{6} \cdot l_{k+1} + P_{k+1} \cdot \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} \cdot \frac{l_{k+1}^2 - a_{k+1}^2}{6}$$

Р-во q приметъ теперь видъ:

$$Б = \frac{M_{k-1} + 2\,M_k}{6} \cdot l_k + \frac{M_{k+1} + 2\,M_k}{6} \cdot l_{k+1} + \sum P \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{l^2 - a^2}{6} \ldots \mathrm{VII},$$

$$\text{гдѣ } Б = -\,E.I.\left(\frac{h_k}{l_k} + \frac{h_{k+1}}{l_{k+1}}\right)$$

Это и есть *ур-іе трехъ опорныхъ моментовъ* въ самомъ общемъ его видѣ.

Первая часть этого ур-ія представляетъ собою произведеніе коэф. упругости на моментъ инерціи сѣченія балки и на сумму отношеній высоты средней опоры надъ крайними къ соотвѣтственнымъ длинамъ пролетовъ. Если средняя опора выше крайнихъ, знакъ у этой части ур-ія д. б. минусъ, а если ниже — плюсъ. Когда всѣ три опоры лежатъ на одной высотѣ, $Б = 0$.

Вторая часть ур-ія трехъ моментовъ представляетъ собою **одну шестую** *долю трехъ слѣдующихъ слагаемыхъ:*

1-е и 2-е слагаемое выражаются въ каждомъ пролетѣ произведеніемъ длины пролета на сумму опорныхъ моментовъ — крайняго и удвоеннаго средняго;

3-е слагаемое д. б. повторено столько разъ, сколько сосредоточенныхъ грузовъ имѣется на обоихъ пролетахъ, и представляетъ собою произведеніе двухъ величинъ, — изъ нихъ 1-я была бы сопротивленіемъ средней опоры, если бы разсматриваемые пролеты, какъ свободные, были нагружены данными сосредоточенными грузами, а 2-я величина есть разность квадратовъ длины пролета и плеча нагрузки относительно **крайней** *опоры въ каждомъ пролетѣ.*

б) *Пролеты нагружены равномѣрно на части ихъ длины.* Если какой-либо изъ пролетовъ, напр. BC (фиг. 151) будетъ нагруженъ равномѣрно на нѣкоторой части всей его длины, тогда въ ур-іи VII измѣнится, очевидно, только 3-е слагаемое 2-й части равенства. Пусть величина всей нагрузки будетъ R, а плечи ея относительно *крайней* опоры въ данномъ изъ 2 пролетовъ—b и c; тогда нагрузка, которая прихо-

дится на безконечно малую длину $d\xi$, м. б. разсматриваема, какъ отдѣльный сосредоточенный грузъ. У этого груза будутъ:

величина . . . . $\frac{R}{b-c} \cdot d\xi$

плечо a . . . . ξ, поэтому

$$\sum \frac{P \cdot a}{l} \cdot \frac{l^2 - a^2}{6} = \frac{R}{6l} \int_c^b \frac{l^2 - \xi^2}{b-c} \cdot \xi \cdot d\xi =$$

$$= \frac{R}{6 \cdot l} \cdot \frac{1}{b-c} \cdot \left[l^2 \cdot \frac{b^2 - c^2}{2} - \frac{b^4 - c^4}{4} \right] = R \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{2l^2 - b^2 - c^2}{12 \cdot l} \ldots \mathbf{VIII}.$$

Слѣд., въ случаѣ равномѣрной нагрузки, распредѣленной на нѣкоторой части длины пролета, въ ур-іи трехъ опорныхъ моментовъ *3-е слагаемое 2-й части равенства будетъ представлять собою произведеніе двухъ величинъ, — изъ нихъ 1-я будетъ моментъ нагрузки относительно крайней опоры, а 2-я величина будетъ дробь, ея числитель — разность между удвоеннымъ квадратомъ длины пролета и квадратами плечъ нагрузки, а знаменатель — удвоенная длина пролета* $\left(\frac{1}{6}\right.$ — общій множитель у всѣхъ слагаемыхъ 2-й части$\left.\right)$.

в) Пролеты нагружены равномѣрно на всей ихъ длинѣ. Нагрузка на пролетѣ равна Q и распредѣлена равномѣрно по всей длинѣ пролета. Очевидно, что это будетъ частный случай предыдущаго болѣе общаго случая Чтобы получить 3-е слагаемое 2-й части ур-ія трехъ опорныхъ моментовъ, въ р-вѣ **VIII** надо сдѣлать

$$Q = R; \; c = 0; \; b = l, \text{ тогда}$$

$$\sum \frac{P \cdot a}{l} \cdot \frac{l^2 - a^2}{6} = \frac{Q \cdot l}{2} \cdot \frac{2l^2 - l^2}{12l} = \frac{Q \cdot l^2}{24} = \frac{Q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{12} \; . \; . \; . \; \mathbf{IX},$$

т. е. въ случаѣ равномѣрной нагрузки, распредѣленной равномѣрно по всей длинѣ пролета, въ ур-іи трехъ опорныхъ моментовъ *3-е слагаемое 2-й части равенства будетъ представлять собою произведеніе изъ момента нагрузки относительно крайней опоры на половинную длину соотвѣтственнаго пролета.*

Ур-іе **VII** есть ур-іе проф. *Лебедева*, а если внести во 2-ю часть этого ур-ія вмѣсто 3-го слагаемаго только выраженіе **IX**, тогда получимъ ур-іе трехъ моментовъ въ томъ частномъ видѣ, какъ оно было выведено первоначально *Bertot*.

32. **Опредѣленіе сопротивленій опоръ многопролетной балки.** Ур-іе трехъ опорныхъ моментовъ въ случаѣ балки съ n пролетами можетъ быть написано $n-1$ разъ, примѣняя его каждый разъ къ двумъ смежнымъ пролетамъ. Так. обр. получимъ $n-1$ ур-іе; въ нихъ войдутъ $n+1$ неизвѣстныхъ опорныхъ моментовъ; недостающія 2 ур-ія

будутъ выражать, что моменты у крайней правой и крайней лѣвой опоръ равны нулю, если балка за эти опоры не продолжается, или же они будутъ имѣть заданное опредѣленное значенiе, если балка на свѣшивающихся за опоры концахъ какъ-либо нагружена. Слѣд., опредѣленiе опорныхъ моментовъ сводится теперь *всегда* къ рѣшенiю $n-1$ ур-iя, сколько бы нагрузокъ на балку не передавалось, и какимъ бы способомъ онѣ ни были распредѣлены на балкѣ, тогда какъ, работая общимъ прiемомъ, пришлось бы нерѣдко рѣшать и $5n+1$ ур-iе, и $7n+1$, и болѣе (см. § 28).

Когда опорные моменты найдены, переходятъ къ опредѣленiю сѣкущихъ усилiй надъ опорами балки. При каждой опорѣ находятъ два сѣкущихъ усилiя, перемѣщаясь чрезъ точку опоры *слѣва направо*, т. е. V_n, и перемѣщаясь чрезъ точку опоры *справа налѣво*, т. е. $V_л$ (см § 29). Складывая обѣ эти величины, получаемъ сопротивленiе данной опоры.

Когда опорные моменты найдены, сѣкущее усилiе пишется непосредственно. Въ случаѣ существованiя сосредоточеннаго груза на данномъ пролетѣ были выведены ур-iя **IV** (см. § *30 б*), которыя показывали, что *сѣкущее усилiе надъ опорою слагается изъ двухъ величинъ*:

а) изъ сѣкущаго усилiя ненагруженнаго пролета и

б) изъ давленiя, которое передавалось бы на данную опору отъ заданной нагрузки, если бы концы балки въ данномъ пролетѣ были свободны.

Оба эти слагаемыя пишутся непосредственно: 1-е — по ф-лѣ **II** (см. § *30 а*), а 2-е — по правиламъ статики.

Не трудно видѣть, что правило, вытекающее изъ разсмотрѣнiя ф-лы **IV**, м. б. распространено также и на всякую другую нагрузку, распредѣленную по пролету какимъ угодно способомъ.

Пусть, напр., на пролетѣ BC (фиг. 151) находится равномѣрная нагрузка R съ плечами b и c относительно опоры C, и мы желаемъ опредѣлить при опорѣ B сѣкущее усилiе V_n, перейдя опору *B слѣва направо*. Разсматривая пролетъ BC, какъ свободный, мы должны къ опорамъ приложить ихъ опорные моменты M_k и M_{k+1} и сѣкущiя усилiя — V_n при лѣвой опорѣ и $V_л$ — при правой опорѣ. Примемъ точку опоры C за центръ моментовъ и напишемъ относительно нея моментъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ балкѣ на данномъ пролетѣ. Тогда сѣкущее усилiе $V_л$ при точкѣ C момента не дастъ, и мы будемъ имѣть:

$$M_k + V_n . l - R . \frac{b+c}{2} = M_{k+1}, \quad \text{откуда}$$

$$V_n = \frac{M_{k+1} - M_k}{l} + R . \frac{b+c}{2l},$$

что и подтверждаетъ выше высказанное правило, вытекающее изъ разсмотрѣнiя ф-лы **IV**, т. к. 1-е слагаемое во 2-й части послѣдняго равенства есть $V_н$ (см. ф-лу **II**, § *30 а*), а 2-е слагаемое есть p, т. е.

давленіе на опору B, если бы пролетъ BC былъ со свободными концами у балки

Таковы результаты теоріи многопролетныхъ балокъ, которая м. б. примѣняема при всевозможныхъ способахъ нагруженія въ пролетахъ.

Разсмотрѣнная теорія построена на допущеніи, что *относительное расположеніе опоръ по высотѣ послѣ нагруженія балки не измѣняется* и что *коэф. упругости и моментъ инерціи балки на всемъ ея протяженіи остаются постоянными.* Примѣняя эту теорію, необходимо озаботиться, чтобы сказанныя условія были выполнены.

Перейдемъ теперь къ приложеніямъ теоріи многоопорныхъ балокъ. Для этого сдѣлаемъ нѣсколько наиболѣе типичныхъ задачъ, результаты рѣшенія которыхъ приходится нерѣдко примѣнять въ практикѣ машиностроенія и строительнаго искусства.

33. **Задачи. № 68. Балка свободно лежитъ на трехъ опорахъ и въ каждомъ пролетѣ нагружена однимъ сосредоточеннымъ грузомъ. Найти ея сопротивленія опоръ и разсчетное ур-іе** (фиг. 152). *а) Общій случай.* Длины пролетовъ — l_1 и l_2, нагрузки — P_1 и P_2, ихъ плечи относительно крайнихъ опоръ — a_1 и a_2. Опоры — на одной горизонтали, такъ что $Б=0$. Общая ф-ла **VII** здѣсь напишется одинъ разъ, положивши въ ней $k=1$, тогда опорные моменты будутъ M_0 M_1 M_2, изъ нихъ

$$M_0=M_2=0$$

$$0=\frac{M_0+2M_1}{6}.l_1+\frac{M_2+2M_1}{6}.l_2+\frac{P_1.a_1}{l_1}.\frac{l_1^2-a_1^2}{6}+\frac{P_2.a_2}{l_2}.\frac{l_2^2-a_2^2}{6};$$

$$M_1=-\frac{1}{l_1+l_2}\left[\frac{P_1.a_1}{l_1}.\frac{l_1^2-a_1^2}{2}+\frac{P_2.a_2}{l_2}.\frac{l_2^2-a_2^2}{2}\right] \quad . \; . \; . \quad \textbf{A.}$$

Сѣкущія усилія обозначимъ такъ:

$V_{оп}$ — у крайней лѣвой опоры,

$V_{1л}$ $V_{1п}$ — у средней опоры,

$V_{2л}$ — у крайней правой опоры.

Сопротивленія опоръ пусть будутъ $K_0K_1K_2$. Тогда

$$K_0=V_{оп};\quad K_1=V_{1л}+V_{1п};\quad K_2=V_{2л}.$$

Пишемъ непосредственно сѣкущія усилія (см. § 30):

$$V_{оп}=V_н+p=\frac{M_1-M_0}{l_1}+P_1.\frac{l_1-a_1}{l_1}=K_0 \quad . \; . \; . \; . \quad \textbf{B.}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{1л}&=\frac{M_0-M_1}{l_1}+P_1.\frac{a_1}{l_1} \\ V_{1п}&=\frac{M_2-M_1}{l_2}+P_2.\frac{a_2}{l_2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{C.}$$

$$V_{2л}=\frac{M_1-M_2}{l_2}+P_2.\frac{l_2-a_2}{l_2}=K_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{D.}$$

Для повѣрки вычисленія сопротивленія опоръ служитъ ур-іе:

$$K_0+K_1+K_2=P_1+P_2.$$

Кривая сѣкущихъ усилій на части AD (фиг. 152) балки будетъ прямою A_1D_1, причемъ

$$AA_1=DD_1=K_0=\frac{M_1}{l_1}+P_1.\frac{l_1-a_1}{l_1}.$$

Переходя на часть BD, получимъ новое сѣкущее усиліе; законъ измѣненія его представится прямою B_2D_2, причемъ

$$DD_2=BB_2=K_0-P=\frac{M_1}{l_1}-\frac{P_1.a_1}{l_1}=-V_{1л}.$$

Переходя на часть DE, получимъ новое сѣкущее усиліе

$$BB_1=EE_1=-V_{1л}+K_1=+V_{1п}.$$

Наконецъ, идя далѣе на часть EC, получаемъ сѣкущее усиліе

$$EE_2=CC_2=+V_{1п}-P_2=-\frac{M_1}{l_2}+P_2.\frac{a_2}{l_2}-P_2=-K_2.$$

Все написанное здѣсь о сѣкущихъ усиліяхъ подтверждаетъ и сдѣланныя здѣсь ранѣе вычисленія, и положенія § 30.

Кривая моментовъ будетъ ломаною линіею $AdbeC$ (фиг. 152).

Наибольшій положительный моментъ въ лѣвомъ пролетѣ будетъ:

$$M_D=K_0.a_1=\frac{M_1.a_1}{l_1}+P_1.a_1.\frac{l_1-a_1}{l_1}.$$

Моментъ въ произвольномъ сѣченіи части BD будетъ:

$$M_{BD}=K_0.x_1-P_1.(x_1-a_1).$$

Сдѣлавши въ этомъ ур-іи $x_1=l_1$, получимъ

$$M_B=K_0.l_1-P_1.(l_1-a_1)=M_1.$$

Въ сѣченіи E будетъ наибольшій сгибающій положительный моментъ въ правомъ пролетѣ:

$$M_E=K_2\ .\ a_2=M_1.\frac{a_2}{l_2}-P_2\quad a_2.\frac{l_2-a_2}{l_2}$$

Разсчетнымъ сѣченіемъ будетъ или D, или B, или E, смотря по тому, въ которомъ изъ нихъ *тот* будетъ больше.

а) Частный случаи 1-й. Правый пролетъ ненагруженъ, а на лѣвомъ—по прежнему 1 сосредоточенный грузъ (фиг. 153). По ф-ламъ A, B, C, D, сдѣлавъ $P_2=o$, находимъ.

$$M_1=-\frac{P_1.a_1}{2l_1}.\frac{l_1^2-a_1^2}{l_1+l_2}$$

$$K_0=\frac{M_1}{l_1}+P_1\ .\ \frac{l_1-a_1}{l_1};\ K_2=\frac{M_1}{l_2}<o;$$

$$V_{1л} = -\frac{M_1}{l_1} + P_1\frac{a_1}{l_1}\ ;\ V_{1п} = -\frac{M_1}{l_2} = -K_2$$

Кривыя моментовъ и силъ сдвига изображены въ этомъ случаѣ на фиг. 153, которая показываетъ, что опора C д. б. расположена сверхъ балки.

Вопросы: 1) Когда моменты въ B и D по абсолютной величинѣ м. б. равны между собою? **Отв.** Ни при какихъ условіяхъ.

2) При какомъ расположеніи нагрузки P_1 моментъ M_1 будетъ *max.*? **Отв.** Когда $a_1 = l_1 : \sqrt{3}$.

b) Частный случай 2-й. Длина праваго пролета на фиг. 153 доведена въ предыдущемъ случаѣ до нуля, и балка обращена въ защемленную концомъ B и нагруженную въ произвольномъ мѣстѣ однимъ сосредоточеннымъ грузомъ.

$$M_1 = -\frac{P.a}{2}.\frac{l^2-a^2}{l^2}$$

$$K_0 = \frac{M_1}{l} + P.\frac{l-a}{l}; K_1 = V_{1л} = -\frac{M_1}{l} + P.\frac{a}{l}$$

Если сдѣлаемъ $a : l = t$, тогда

$$M_1 = -t.\frac{1-t^2}{2}.P.l; K_1 = t.\frac{3-t^2}{2}.P; K_0 = P - K_1.$$

$$M_1 = -\alpha.P.l; K_1 = \beta.P; K_0 = \gamma.P.$$

При $t = \frac{1}{2}$ получаемъ

$$M_1 = -\frac{1}{2}.\frac{1-\frac{1}{4}}{2}.P.l = -\frac{3}{16}.P.l$$

$$K_1 = \frac{1}{2}.\frac{3-\frac{1}{4}}{2}.P = \frac{11}{16}P; K_0 = \frac{5}{16}P,$$

т. е. получаемъ при этомъ результаты, извѣстные намъ ранѣе (см. § *23, г*).

Max момента M_1 получимъ при значеніи t, получаемомъ изъ ур-ія

$$\frac{dM_1}{dt} = o,\ \text{откуда}\ t = \frac{a}{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$max\ M_1 = -\frac{P.l}{3\sqrt{3}} = -\frac{P.l}{5{,}196}$$

Моментъ въ точкѣ приложенія силы

$$M_D = K_0.a = \left(t - \frac{3}{2}.t^2 + \frac{t^4}{2}\right).P.l = \delta.P.l$$

Въ таблицѣ 17-й для различныхъ значеній t приведены величины коэффиціентовъ α, β, γ, δ, опредѣляющихъ собою наиболѣе характерныя данныя, необходимыя при разсчетѣ такой балки.

Таблица 17-я.

Одинъ конецъ балки свободенъ, другой защемленъ, нагрузка—1 сосредоточенный грузъ.

$t=$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha=$ 0,05	0,096	0,1365	0,168	0,1875	0,192	0,1785	0,144	0,086
$\beta=$ 0,1495	0,296	0,4365	0,568	0,6875	0,792	0,8785	0,944	0,986
$\gamma=$ 0,8505	0,704	0,5635	0,432	0,3125	0,208	0,1215	0,056	0,014
$\delta=$ 0,0851	0,141	0,1691	0,173	0,1563	0,125	0,0851	0,045	0,013

г) *Частный случай 3-й.* Длина пролетовъ на фиг. 152 одинакова, нагрузка одинакова и расположена симметрично относительно средней опоры.

$$l_1 = l_2 = l\ ;\ a_1 = a_2 = a\ ;\ P_1 = P_2 = P.$$

$$M_1 = -\frac{1}{2l}\frac{2P.a}{l}.\frac{l^2-a^2}{2} = -\frac{P.a}{2}.\frac{l^2-a^2}{l^2}$$

$$K_0 = K_2 = \frac{M_1}{l} + P.\frac{l-a}{l}$$

$$K_1 = 2.V_{1л} = 2\ V_{1п} = 2.\frac{P.a - M_1}{l}$$

Такимъ образомъ видно, что этотъ случай разнится отъ предыдущаго только величиною K_1, сопротивленія средней опоры; оно здѣсь вдвое болѣе, чѣмъ въ случаѣ b, всѣ же остальныя величины остаются безъ измѣненій, поэтому въ соотвѣтственныхъ случаяхъ можно пользоваться также и цифрами предыдущей таблицы.

№ 69. Правымъ своимъ концомъ балка ущемлена въ стѣнѣ (фиг. 154), лѣвый конецъ ея лежитъ свободно на опорѣ; нагрузка сдѣлана двумя сосредоточенными грузами P_1 и P_2 съ плечами a_1 и a_2 относительно опоры A. Найти сопротивленія опоръ и разсчетное сѣченіе балки.

а) Общій случай. Въ ур-іи A предыдущей задачи надо положить здѣсь:

$$M_0 = M_2 = 0;\ l_2 = 0\ ;\ l_1 = l.$$

$$M_1 = -\frac{P_1.a_1(l^2-a_1^2) + P_2.a_2.(l^2-a_2^2)}{2l^2} \quad \ldots\ldots \text{E.}$$

$$K_1 = V_{1л} = \frac{M_0 - M_1}{l} + \frac{P_1 . a_1}{l} + \frac{P_2 . a_2}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{F}.$$

$$K_1 = \frac{P_1 . a_1 + P_2 . a_2 - M_1}{l} ; \; K_0 = P_1 + P_2 - K_1$$

Кривыя сѣкущихъ усилій будутъ прямыми $A_1 C_1$, $C_2 D_2$ и $D_1 B_1$, причемъ:

$$AA_1 = CC_1 = K_0 ; \; CC_2 = DD_2 = K_0 - P_1 ; \; BB_1 = -K_1 .$$

Кривая моментовъ будетъ ломаною линіею $Abef$, или Abe_1f, смотря по величинѣ нагрузокъ и плечъ ихъ. Опаснымъ сѣченіемъ м. б. или B, или C.

б) Частный случай. На фиг. 154 нагрузки одинаковы и плечи ихъ относительно опоръ соотвѣтственно одинаковы, т. е.

$$P_1 = P_2 = P ; \; a_1 = l - a_2 = t . l ; \; a_2 = l(1 - t).$$

$$M_1 = -\frac{Pl}{2}\left[t(1 - t^2) + (1 - t)\left\{1 - (1 - t)^2\right\}\right]$$

$$M_1 = -3t . \frac{1 - t}{2} . P . l$$

Max момента M_1 будетъ, очевидно, при $t = {}^1/_2$, т. е. когда оба груза приложены въ срединѣ длины балки, образовавши одну сосредоточенную нагрузку $2P$; тогда

$$max\; M_1 = -\frac{3}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . Pl = -\frac{3}{16} . 2P . l,$$

какъ и слѣдовало ожидать (см. § *23,г*);

$$K_1 = P . t + P . (1 - t) + P \; 3t . \frac{1 - t}{2} = \frac{2 + 3t - 3t^2}{2} . P$$

Max давленія на опору B получится, очевидно, также при $t = \frac{1}{2}$, когда

$$K_1 = \frac{2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{2} . P = \frac{11}{8} P = \frac{11}{16} . 2P$$

Сгибающій моментъ въ сѣченіи C будетъ

$$M_C = K_0 . a_1 = K_0 . l . t$$

и въ сѣченіи D

$$M_D = K_0 . a_2 - P(a_2 - a_1) = K_1 . a_1 + M_1$$

Введемъ обозначенія

$$M_1 = -\alpha . P . l ; \; K_1 = \beta . P ; \; K_0 = \gamma . P ;$$

$$M_c = \delta . P . l ; \; M_D = \psi . P . l.$$

Давая t различныя значенія отъ O до $\frac{1}{2}$, мы будемъ получать также соотвѣтственныя значенія и для всѣхъ этихъ 5 величинъ коэффиціентовъ. Эти данныя сведены въ таблицу 18-ю.

Таблица 18-я.

Одинъ конецъ балки свободенъ, другой защемленъ, нагрузка—2 сосредоточенныхъ груза.

t	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
α	0,135	0,148	0,164	0,184	0,208	0,240	0,281	0,333	0,375
β	1,135	1,148	1,164	1,184	1,208	1,240	1,281	1,333	1,375
γ	0,865	0,852	0,836	0,816	0,792	0,760	0,719	0,667	0,625
δ	0,087	0,095	0,105	0,116	0,132	0,142	0,180	0,222	0,312
ψ	0,022*	0,020*	0,019*	0,015*	0,08 *	0,008	0,039	0,111	0,312

NB. Отмѣченныя * величины ψ $\left(\text{при измѣненіи } t \text{ отъ } \frac{1}{10} \text{ до } \frac{1}{6}\right)$ отрицательны, а остальныя — положительны.

Цифры табл. 18-й показываютъ, что въ этомъ случаѣ опаснымъ сѣченіемъ балки всегда будетъ ея защемленное сѣченіе.

При сравнени цифръ табл. 17-й и табл. 18-й нужно помнить, что въ 1-мъ случаѣ вся нагрузка $= P$, и здѣсь она $= 2P$. Только что расмотрѣнный способъ нагруженія выгоднѣе предыдущаго, *max* разсчетнаго момента получается здѣсь менѣе, чѣмъ въ 1-мъ случаѣ.

PS. Когда балка нагружена двумя равными и симметрично расположенными нагрузками, при измѣнении t отъ o до $\frac{1}{3}$ выгоднѣе оба конца балки сдѣлать свободно лежащими на своихъ опорахъ.

№ 70. Балка, у которой одинъ конецъ защемленъ (фиг. 155), а другой свободно лежитъ на опорѣ, нагружена m одинаковыми сосредоточенными грузами, точки приложенія которыхъ дѣлятъ длину балки на равныя части. Найти моментъ защемленія и сопротивленія опоръ балки.

Если d будетъ плечо 1-й нагрузки, прилегающей къ свободной опорѣ, тогда плечо 2-й будетъ $2d$, 3-й — $3d$,...., послѣдней — $m.d$, причемъ

$$d = l : (m + 1).$$

Вмѣсто ф-лы E предыдущей задачи получимъ здѣсь

$$M_1 = -\frac{P}{2l^2}\sum a\,.\,(l^2 - a^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Ж.$$

Въ выраженіе алгебраической суммы вмѣсто a надо вносить здѣсь всѣ значенія плечъ отъ $a = d$ до $a = m.d$. Тогда получимъ:

$$M_1 = -\frac{P}{2l^2}\left[d(l^2 - d^2) + 2\,d\,(l^2 - 2^2.d^2) + \ldots + m.d(l^2 - m^2.d^2)\right] =$$

$$= -\frac{P}{2l^2}\left[d.l^2(1 + 2 + \ldots + m) - d^3(1^3 + 2^3 + \ldots + m^3)\right]$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{1+m}{2}\,.\,m = S$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 = \left(\frac{1+m}{2}\,.\,m\right)^2 = S^2$$

$$\sum a.(l^2 - a^2) = d.S\,(l^2 - S.d^2) \quad \ldots\ldots \quad \text{U}$$

$$M_1 = -P.d.S.\frac{l^2 - S.d^2}{2l^2} = -\beta\,.\,P\,.\,l$$

$$K_0 = \frac{M_1}{l} + \sum P\,.\,\frac{l-a}{l} = \frac{M_1}{l} + \frac{P}{l}\left[m.d + (m-1)d + \ldots + 2\,d + d\right]$$

$$K_0 = \frac{M_1}{l} + \frac{P.d.S}{l} = \frac{P.d.S}{l}\left[1 - \frac{l^2 - S.d^2}{2\,l^2}\right] = \gamma\,.\,P$$

$$K_1 = m\,.\,P - K_0 = (m - \gamma)\,.\,P$$

При различныхъ значеніяхъ m величины β и γ даны въ табл. 19-й.

Таблица 19-я.

Одинъ конецъ балки свободенъ, другой — защемленъ, нагрузка сдѣлана m сосредоточенными грузами.

$m = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta = \frac{3}{16}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{99}{80}$	$\frac{165}{121}$
$\gamma = \frac{5}{16}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{33}{32}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{85}{48}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{161}{64}$	$\frac{26}{9}$	$\frac{261}{80}$	$\frac{440}{121}$

№ 71. Балка ущемлена обоими концами и нагружена однимъ сосредоточеннымъ грузомъ P съ плечами a и b относительно опоръ. Найти ея опорные моменты и сопротивленія опоръ.

Эти вопросы были уже рѣшены въ § 25, но тамъ требовалось для этого произвести довольно длинныя вычисленія. Рѣшеніе выходитъ весьма короткимъ, если разсматривать такую балку, какъ трехпролетную, у которой длина крайнихъ пролетовъ $л$ доведена до нуля.

Въ примѣненіи къ пролетамъ A_0AB (фиг. 156) ур-іе **VII** будетъ писаться такъ:

$$2M_1 . l + M_2 . l + P . b . \frac{l^2 - b^2}{l} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{a}$$

Въ пролетахъ ABB_0 (фиг. 156) так. же обр. получимъ:

$$M_1 . l + 2\, M_2 . l + P . a . \frac{l^2 - a^2}{l} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{б}$$

Рѣшая эти 2 ур-ія, получимъ опорные моменты. Умноживъ ур-іе **б** на *2*, вычитаемъ его изъ **a** и опредѣляемъ M_2:

$$M_2 = -\frac{P}{3\,l^2}\left[2\,a . (l^2 - a^2) - (l - a) . \left\{l^2 - (l^2 - 2\,l . a + a^2)\right\}\right] =$$

$$= -\frac{P}{3}\;\frac{l - a}{l^2} \cdot \left[2\,a\,(l + a) - (2\,la - a^2)\right] = -\frac{P . b . a^2}{l^2}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$M_1 = -\frac{P . a . b^2}{l^2} .$$

$$M_1 : M_2 = b .\ a\ ;\ M_1 + M_2 = -\frac{P . a . b}{l}$$

Сопротивленія опоръ напишутся непосредственно. Для опоры A

$$K_1 = V_н + p = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{P . b}{l} = \frac{P}{l}\left(-\frac{b . a^2}{l^2} + \frac{a . b^2}{l^2} + b\right)$$

$$K_1 = \frac{P . b}{l^3}\left[-a^2 + ab + (a^2 + 2ab + b^2)\right] = P . b^2 . \frac{3a + b}{l^3}$$

Аналогично съ этимъ найдется и K_2. Кривыя моментовъ и силъ сдвига построятся, какъ и ранѣе.

№ 72. Балка съ защемленными обоими концами (фиг. 157) нагружена *m* одинаковыми сосредоточенными грузами, точки приложенія которыхъ дѣлятъ длину балки на равныя части. Найти опорные моменты и сопротивленія опоръ.

Пусть плечо 1-й нагрузки относительно лѣвой опоры A будетъ d, второй — $2d$ и т. д., послѣдней

$$m . d = l - d, \text{ такъ что}$$

$$d = l : (m + 1)$$

Ур-ія **a** и **б** предыдущей задачи обратятся здѣсь въ слѣдующія:

$$2\,M_1 . l + M_2 . l + \sum \frac{P . (l - a) . \left[l^2 - (l - a)^2\right]}{l} = 0 \quad . \; . \quad \mathbf{c}$$

$$M_1 . l + 2\,M_2 . l + \sum P . a . \frac{l^2 - a^2}{l} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{d}$$

Въ выраженіяхъ $\sum$ плечо a должно получить всѣ значенія отъ $a = d$ до $a = m \cdot d$.

По условіямъ заданія, очевидно, что

$$\sum (l - a) \cdot [l^2 - (l - a)^2] = \sum a \cdot (l^2 - a^2)$$

Тогда р-ва **с** и **д** будутъ тождественны, т. е.

$$M_1 = M_2 = -\frac{P \cdot}{3 \cdot l^2} \cdot \sum a \cdot (l^2 - a^2) \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{3}$$

Эта ф-ла совершенно аналогична съ ф-лой **Ж** задачи № 70, только тамъ въ знаменателѣ стояло *2*, а здѣсь *3*, т. е. *при нагруженіи балки* **m** *одинаковыми сосредоточенными грузами защемленіе 2-го конца балки уменьшаетъ опорный моментъ въ отношеніи 2 : 3.*

$$M_1 = M_2 = - P \cdot d \cdot S \cdot \frac{l^2 - S \cdot d^2}{3\, l^2},$$

$$\text{гдѣ } S = m \cdot \frac{1 + m}{2}$$

№ 73. Балка свободно положена на 3 опоры и нагружена равномѣрно. Найти опорные моменты и сопротивленія опоръ балки (фиг. 158).

а) Общій случай. Длина пролетовъ l_1 и l_2, нагрузки на пролетахъ — Q_1 и Q_2 (фиг. 158). Опоры A, B и C—на одной высотѣ, тогда въ ур-іи **VII** (*§ 31а*) ..... $Б = 0$. Затѣмъ

$$M_0 = M_2 = o.$$

Вмѣсто 3-го слагаемаго 2-й части равенства **VII** надо внести въ этомъ случаѣ выраженіе **IX** (*§ 31в*). По сокращеніи всего ур-ія трехъ моментовъ на *шесть* получимъ:

$$O = 2 M_1 (l_1 + l_2) + \frac{Q_1 \cdot l_1^2 + Q_2 \cdot l_2^2}{4}, \text{ или}$$

$$M_1 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{Q_1 \cdot l_1^2 + Q_2 \cdot l_2^2}{l_1 + l_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{Н.}$$

Сопротивленія опоръ пусть будутъ $K_0\, K_1\, K_2$. Они будутъ писаться непосредственно:

$$K_0 = V_{оп} = V_{н+р} = \frac{M_1 - M_0}{l_1} + \frac{Q_1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{а.}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{1л} &= \frac{M_0 - M_1}{l_1} + \frac{Q_1}{2} \\ V_{1п} &= \frac{M_2 - M_1}{l_2} + \frac{Q_2}{2} \end{aligned}\right\} K_1 = V_{1л} + V_{1п} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{б.}$$

$$K_1 = - M_1 \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1 \cdot l_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{в.}$$

$$K_2 = V_{2л} = \frac{M_1 - M_2}{l_2} + \frac{Q_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad г.$$

Для повѣрки сдѣланнаго вычисленія служитъ ур-іе статики:

$$K_0 + K_1 + K_2 = Q_1 + Q_2.$$

Пусть нагрузка на единицу длины въ лѣвомъ пролетѣ будетъ q_1, а въ правомъ—q_2, т. е.

$$Q_1 = q_1 . l_1\,;\; Q_2 = q_2 . l_2.$$

Кривая моментовъ на пролетѣ AB будетъ парабола ADE (фиг 158). Въ произвольномъ сѣченіи N моментъ будетъ писаться такъ:

$$M = K_0 . x - q_1 . \frac{x^2}{2} + M_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad ж.$$

При $x = 0$ .... $M = 0$; при $x = l_1$ получимъ

$$M_B = K_0 . l_1 - q_1 . \frac{l_1^2}{2},$$

что, очевидно, тождественно съ ур-іемъ a, т. е. $M_B = M_1$.

Аналитическій *max* момента M получимъ, взявъ 1-ю производную отъ M по x, т е. вычисляя сѣкущее усиліе для сѣченія N:

$$V = \frac{dM}{dx} = K_0 - q_1 . x \quad \ldots\ldots\ldots \quad е.$$

Кривая сѣкущихъ усилій будетъ прямою A_1B_1, которая пересѣкаетъ ось балки въ сѣченіи DD_1, опредѣляющемъ вершину D параболы и аналитическій *max* момента, равный DD_1.

При $x = 0$ .... $V_A = V_{on} = K_0$.

При $x = l$ . .. $V_B = K_0 - q_1 . l_1 = K_0 - Q_1 = - V_{1л}$.

Въ сѣченіи D_1 .... $V = 0$, что даетъ

$$\bar{x} = K_0 : q_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad д.$$

т. е. *для полученія разстоянія между опорою и сѣченіемъ, въ которомъ аналитическое выраженіе момента будетъ max, сѣкущее усиліе при опорѣ надо раздѣлить на величину нагрузки, которая приходится на единицу длины въ данномъ пролетѣ.*

По смыслу ур-ія е, очевидно, что это правило является общимъ, въ какомъ бы пролетѣ мы ни находились и сколько бы пролетовъ ни было, если всѣ они равномѣрно нагружены.

Значеніе $\bar{x}$ внесемъ теперь въ ур-іе ж для полученія *max* M:

$$max\ M = DD_1 = K_0 . \frac{K_0}{q_1} - \frac{q_1}{2} . \frac{K_0^2}{q_1^2} + M_0$$

$$max\ M = M_0 + \frac{1}{2}\ q_1 . \bar{x}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad з.$$

Второе слагаемое въ послѣдней ф-лѣ можно представить такъ

$$\left(q_1 \cdot \bar{x}\right) \cdot \frac{\bar{x}}{2};$$

тогда послѣднюю ф-лу можно читать слѣд. обр.: *аналитическій* **max** *момента на пролетъ, нагруженномъ равномѣрно, равняется опорному моменту, сложенному съ моментомъ относительно опоры, который взятъ для равномѣрной нагрузки, расположенной между опорою и сѣченіемъ максимальнаго момента.* По смыслу ф-лы **ж** и по ходу всего вычисленія, очевидно, что и это правило будетъ справедливо, въ какомъ бы пролетѣ мы ни находились и сколько бы ихъ ни было.

Переходя во 2-й пролетъ BC, напишемъ выраженіе сгибающаго момента въ сѣченіи N_1 (фиг. 158), отстоящемъ отъ опоры B на разстояніе x_1:

$$M' = M_1 + V_{1n} \cdot x_1 - q_2 \cdot \frac{x_1^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{и}.$$

Это есть ур-іе параболы EFC. При $x_1 = 0$ ..... $M'_B = M_1$.

При $x_1 = l_2$ получимъ

$$M'_c = M_1 + V_{1n} \cdot l_2 - q_2 \cdot \frac{l_2^2}{2},$$

что, очевидно, равно O, согласно съ ф-лой **б**, опредѣляющей V_{1n}.

Опредѣлимъ теперь сѣкущее усиліе и аналитическій *max* момента:

$$V' = \frac{dM'}{dx_1} = V_{1n} - q_2 \cdot x_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{i}.$$

Если $x_2 = 0$ ..... $V'_B = V_{1n}$.

При $x_2 = l$ ..... $V'_c = V_{1n} - q_2 \cdot l_2$,

что, по сравненіи ф-лъ **б** и **г**, очевидно, представляетъ собою $(-K_2)$.

Изъ ур-ія **i** имѣемъ далѣе

$$BF_1 = \bar{x}_2 = \frac{V_{1n}}{q_2},$$

что подтверждаетъ правило, высказанное при ф-лѣ **д** этого §. Внесемъ $\bar{x}_2$ въ ур-іе **и**; тогда

$$max\ M' = FF_1 = M_1 + \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot \bar{x}_2^2;$$

а это подтверждаетъ правило, высказанное при ф-лѣ **з** этого §. Опаснымъ сѣченіемъ здѣсь можетъ быть не только B, но и D_1, и F_1, смотря по длинѣ пролетовъ и величинѣ нагрузокъ.

б) Частный случай 1-й. Длина пролетовъ одинакова, но нагрузки неодинаковы:

$$l_1 = l_2 = l; \; Q_1 = Q; \; Q_2 = f \cdot Q$$

$$M_1 = -\frac{1+f}{16} \cdot Q.l = -\alpha \cdot \frac{Q \cdot l}{16}$$

$$K_0 = \frac{Q}{2} - Q \cdot \frac{1+f}{16} = \frac{7-f}{16} \cdot Q = \beta \cdot \frac{Q}{16}$$

$$V_{1л} = \frac{Q}{2} + Q \cdot \frac{1+f}{16} = \frac{9+f}{16} \cdot Q$$

$$V_{1п} = Q \cdot \frac{f}{2} + Q \cdot \frac{1+f}{16} = \frac{1+9f}{16} \cdot Q$$

$$K_1 = 5 \cdot \frac{1+f}{8} \cdot Q = \gamma \cdot \frac{Q}{16}$$

$$K_2 = Q \cdot \frac{f}{2} - Q \cdot \frac{1+f}{16} = \frac{7f-1}{16} \cdot Q = \delta \cdot \frac{Q}{16}$$

$$\bar{x} = \frac{K_0}{q_1} = \frac{7-f}{16} \cdot l$$

$$max\ M = DD_1 = \frac{Q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{7-f}{16}\right)^2 = \psi \cdot \frac{Q \cdot l}{16}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{V_{1п}}{q_2} = \frac{1+9f}{16f} \cdot l$$

$$max\ M' = FF_1 = \frac{Q \cdot l}{16} \left\{ \frac{(1+9f)^2}{32 \cdot f} - f - 1 \right\} = \lambda \cdot \frac{Q \cdot l}{16}$$

Величины коэффицiентовъ для различныхъ значенiй f приведены въ табл. 20-й.

Таблица 20-я.

Балка на трехъ опорахъ; нагрузка равномѣрная, но различная на обоихъ пролетахъ.

f	α	β	γ	δ	ψ	λ
1	2	6	20	6	1,125	1,125
2	3	5	30	13	0,781	2,641
3	4	4	40	20	0,5	4,166
4	5	3	50	27	0,281	5,695
5	6	2	60	34	0,125	7,225
6	7	1	70	41	0,031	8,755
7	8	0	80	48	0	10,286

Въ случаѣ $f = 1$ табл. 20-я даетъ извѣстныя намъ данныя для балки, лежащей однимъ концомъ свободно на опорѣ, другимъ защемленной въ стѣнѣ и равномѣрно нагруженной.

Одинаковые моменты въ B и F_1 по абсолютной величинѣ получатся тогда, когда $\alpha = \lambda$, т. е.

$$\frac{(1+9f)^2}{32.f} = 2 + 2f, \quad \text{или}$$

$$f^2 - \frac{46}{17}\,f + \frac{1}{17} = 0, \quad \text{откуда}$$

$$f = 2{,}684.$$

При $f = 7$ крайняя лѣвая опора совсѣмъ разгружается; величина ψ при этомъ $= 0$; это обозначаетъ, что вершина D параболы при этомъ совпадаетъ съ опорою A (фиг. 158).

При значеніяхъ f болѣе 7 опора A д б. поставлена сверху, β дѣлается отрицательнымъ, и вся кривая сѣкущихъ усилій A_1B_1 (фиг. 158) будетъ расположена ниже оси балки; при этомъ моментъ въ сѣченіи F_1 все болѣе и болѣе превышаетъ моментъ надъ опорою B.

Вопросы Найти положеніе точекъ H и L на фиг. 158 Могутъ ли онѣ вмѣстѣ или порознь совпадать съ точкою B? Что нужно сдѣлать съ балкой, чтобы точки H и L кривой моментовъ совпали съ B?

Какой видъ будетъ имѣть кривая моментовъ ADE (фиг 158) при $f = 7$ и болѣе 7? Опредѣлить координаты вершины D въ этомъ случаѣ

в) Частный случай 2-й. Одинъ конецъ балки ущемленъ, другой лежитъ свободно на опорѣ; нагрузка равномѣрно распредѣлена по длинѣ балки

Въ этомъ случаѣ надо положить:

$$l_2 = 0;\; l_1 = l;\; Q_1 = Q,$$

тогда изъ ур-ія H получимъ

$$M_1 = -\frac{Q.l}{8}$$

по **а** и **б**:

$$V_{on} = K_0 = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{8} = \frac{3}{8}\,Q.$$

$$V_{1,} = K_1 = \frac{Q}{2} + \frac{Q}{8} = \frac{5}{8}\,Q.$$

Результаты эти были уже получены нами въ § *22,a.*

Ихъ получимъ также изъ предыдущаго частнаго случая, сдѣлавши $f = 1$ и разсматривая половину балки. По табл. 20-й при $f = 1$ имѣемъ

$$\alpha = 2, \quad \beta = 6, \quad \gamma = 20, \text{ т. е.}$$

$$M_1 = -2.\frac{Q.l}{16};\; K_0 = 6.\frac{Q}{16};\; V_{1л} = \frac{20}{2}.\frac{Q}{16}.$$

№ 74. Балка лежитъ на четырехъ опорахъ и нагружена равномѣрно. Найти ея опорные моменты и сопротивленія опоръ (фиг. 159).

а) Общій случай. Длина пролетовъ $l_1 l_2 l_3$, нагрузки на пролетахъ $Q_1 Q_2 Q_3$, опорные моменты $M_0 M_1 M_2 M_3$, изъ нихъ

$$M_0 = M_3 = 0,$$

сопротивленія опоръ $K_0 K_1 K_2 K_3$. Опоры — на одной высотѣ, поэтому $Б = 0$ въ ур-іи **VII** (§ *31,а*). Примѣняя это ур-іе сначала къ 1-му и 2-му пролету, а затѣмъ ко 2-му и 3-му, получимъ 2 ур-ія:

$$2M_1 . l_1 + (2M_1 + M_2) . l_2 + \frac{Q_1 . l_1^2 + Q_2 . l_2^2}{4} = 0 \quad . \; . \; . \; \mathbf{L}.$$

$$(2M_2 + M_1) . l_2 + 2M_2 . l_3 + \frac{Q_2 . l_2^2 + Q_3 . l_3^2}{4} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{M}.$$

Опредѣляя изъ нихъ опорные моменты, найдемъ:

$$M_1 = \frac{1}{4} . \frac{(Q_2 . l_2^2 + Q_3 . l_3^2) . l_2 - 2(Q_1 l_1^2 + Q_2 . l_2^2)(l_2 + l_3)}{4(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2}$$

$$M_2 = \frac{1}{4} . \frac{(Q_1 . l_1^2 + Q_2 . l_2^2) . l_2 - 2(Q_2 . l_2^2 + Q_3 . l_3^2)(l_1 + l_2)}{4(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2}.$$

Затѣмъ опредѣленіе сопротивленій опоръ будетъ сдѣлано на общихъ основаніяхъ, изслѣдованіе кривой моментовъ и сѣкущихъ усилій — также.

б) Частный случай 1-й. Пролеты одинаковой длины и одинаково нагружены:

$$\left.\begin{matrix} Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \\ l_1 = l_2 = l_3 = l \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} K_0 = K_3 \\ K_1 = K_2 \end{matrix}\right\} . \; . \; . \; . \text{ фиг. 159.}$$

$$M_1 = M_2 = \frac{1}{4} . \frac{2Q . l^2 . l - 2 . 2Q . l^2 . 2l}{4 . 2l . 2l - l^2} = - \frac{Q . l}{10}$$

$$K_0 = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{10} = \frac{4}{10} Q = K_3; \; K_1 = K_2 = \frac{11}{10} Q, \text{ т. к.}$$

$$V_{1л} = \frac{Q}{10} + \frac{Q}{2} = \frac{6}{10} Q; \; V_{1п} = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2};$$

$$K_0 + K_1 + K_2 + K_3 = \frac{4 + 11 + 11 + 4}{10} = 3Q.$$

Опасныя сѣченія надъ средними опорами.

в) Частный случай 2-й. Пролеты одинаковой длины, но нагрузка сдѣлана только на среднемъ изъ нихъ (фиг. 160), т. е.

$$Q_1 = Q_3 = 0, \; Q_2 = Q$$

$$M_1 = M_2 = \frac{Q . l^3 - 2 . Q . l^2 . 2l}{15 l^2} . \frac{1}{4} = - \frac{Q . l}{20}.$$

$$K_0 = K_3 = -\frac{Q}{20}; \quad V_{1л} = +\frac{Q}{20}; \quad V_{1п} = \frac{Q}{2}; \quad К_1 = К_2 = \frac{11}{20} \cdot Q.$$

Крайнія опоры д. б. поставлены сверху. Разсчетное сѣч. — въ срединѣ длины балки.

г) Частный случай 3-й. Пролеты одинаковой длины, но нагрузка сдѣлана только на обоихъ крайнихъ, и она одинакова (фиг. 161), т. е.

$$Q_1 = Q_3 = Q, \quad Q_2 = 0$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{Q \cdot l^3 - 2 \cdot Q \; l^2 \cdot 2l}{15 l^2} = -\frac{Q \cdot l}{20}$$

$$К_0 = К_3 = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{20} = \frac{9}{20} Q; \quad V_{1л} = \frac{Q}{2} + \frac{Q}{20} = \frac{11}{20} Q; \quad V_{1п} = \frac{M_1 - M_2}{l} = 0;$$

$$К_1 = К_2 = \frac{11}{20} Q; \; К_1 + К_2 + К_3 + К_0 = \frac{9 + 11 + 11 + 9}{20} = 2Q.$$

Соединяя 2-й случай съ 3-мъ, мы должны получить нагрузку 1-го случая, причемъ надлежащимъ образомъ должны суммироваться и сопротивленія опоръ и опорные моменты, что и есть на самомъ дѣлѣ *).

д) Частный случай 4-й. Нагрузка сдѣлана только на одномъ изъ крайнихъ пролетовъ, остальные же 2 ненагружены вовсе (фиг. 162), т. е.

$$Q_1 = Q, \quad Q_2 = Q_3 = 0$$

$$M_1 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot Q \cdot l^2 \cdot 2l}{15 \, l^2} = -\frac{Q \; l}{15}$$

$$M_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q \cdot l^3}{15 \, l^2} = +\frac{Q \cdot l}{60}$$

$$K_0 = V_{0п} = \frac{Q}{2} + \frac{M_1 - M_0}{l} = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{15} = \frac{26}{60} \cdot Q$$

$$V_{1л} = \frac{Q}{2} + \frac{M_0 - M_1}{l} = \frac{Q}{2} + \frac{Q}{15} = \frac{34}{60} \cdot Q$$

$$V_{1п} = \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{Q}{60} + \frac{Q}{15} = \frac{5}{60} \cdot Q$$

$$V_{2л} = \frac{M_1 - M_2}{l} = -\frac{Q}{60} - \frac{Q}{15} = -\frac{5}{60} Q$$

$$V_{2п} = \frac{M_3 - M_2}{l} = -\frac{Q}{60}.$$

$$K_1 = V_{1л} + V_{1п} = \frac{39}{60} \cdot Q; \; K_2 = V_{2л} + V_{2п} = -\frac{6}{60} Q.$$

---

*) Разсчетныя сѣченія находятся здѣсь въ обоихъ крайнихъ пролетахъ

$$K_3 = V_{3л} = \frac{M_2 - M_3}{l} = \frac{Q}{60}$$

$$K_0 + K_1 + K_2 + K_3 = \frac{26 + 39 - 6 + 1}{60} \cdot Q = Q$$

Третья слѣва опора д. б. сверху

e) *Частный случай 5-й.* Нагружены 2 смежные пролета, 3-й же не нагруженъ (фиг. 163), т. е.

$$Q_1 = 0 \ , \ Q_2 = Q_3 = Q \ .$$

$$M_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\ Q \ . \ l^3 - 2 \ . \ Q \ . \ l^2 \ . \ 2\, l}{15\ l^2} = -\frac{Q \ . \ l}{30}$$

$$M_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q \ . \ l^3 - 2 \ . \ 2\, Q \ . \ l^2 \ . \ 2\, l}{15\, l^2} = -\frac{7}{60} \cdot Q \ . \ l$$

$$K_0 = V_{0п} = \frac{M_1 - M_0}{l} = -\frac{2}{60} \cdot Q$$

$$V_{1л} = \frac{M_0 - M_1}{l} = + \frac{2}{60} \cdot Q$$

$$V_{1п} = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{Q}{2} = \left(-\frac{7}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{2}\right) \cdot Q = \frac{25}{60} \cdot Q$$

$$V_{2л} = \frac{Q}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{30} + \frac{7}{60}\right) \cdot Q = \frac{35}{60} \cdot Q$$

$$V_{2п} = \frac{Q}{2} + \frac{M_3 - M_2}{l} = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{60}\right) \cdot Q = \frac{37}{60} \cdot Q \cdot$$

$$K_1 = V_{1л} + V_{1п} = \frac{27}{60} \cdot Q \ ; \ K_2 = V_{2л} + V_{2п} = \frac{72}{60} \cdot Q \ .$$

$$K_3 = \frac{Q}{2} + \frac{M_2 - M_3}{l} = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{60}\right) Q = \frac{23}{60} \cdot Q \ .$$

$$K_0 + K_1 + K_2 + K_3 = \frac{-2 + 27 + 72 + 23}{60} \, Q = 2\, Q \ .$$

Крайняя лѣвая опора д. б. здѣсь сверху.

Комбинируя 4-й и 5-й частные случаи вмѣстѣ, мы должны, очевидно, притти къ 1-му частному случаю и получить сопротивленія опоръ и опорные моменты, какъ сумму найденныхъ здѣсь величинъ:

$$M_1 = -\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{30}\right) Q\, l \ . = -\frac{Q \ . \ l}{10}$$

$$K_0 = \frac{26 - 2}{60} \cdot Q = \frac{24}{60}\, Q = \frac{4}{10}\, Q \ ; \ K_1 = \frac{39 + 27}{60} \cdot Q = \frac{11}{10} \cdot Q \ ;$$

$$K_2 = \frac{-6 + 72}{60} \cdot Q = \frac{11}{10} \cdot Q \ ; K_2 = \frac{1 + 23}{60} \cdot Q = \frac{4}{10} \cdot Q \cdot$$

f) Частный случай 6-й. Балка ущемлена обоими концами и нагружена равномѣрно. Здѣсь нужно положить въ ф-лахъ L и M (случай a этой задачи):

$$l_1 = l_3 = 0;\ l_2 = l,\ Q_2 = Q$$

$$M_1 = M_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q \,.\, l^3 - 2 \,.\, Q \,.\, l^2 \,.\, l}{4\, l^2 - l^2} = - \frac{Q \,.\, l}{12}$$

$$\text{K}_1 = \text{V}_{1n} = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2}$$

$$\text{K}_2 = \text{V}_{2л} = \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2}$$

Эти результаты мы уже имѣли ранѣе (см. § 26).

№ 75. Балка лежитъ на трехъ опарахъ и въ каждомъ пролетѣ нагружена равномѣрно на нѣкоторой части длины пролета. Найти опорные моменты и сопротивленія опоръ такой балки (фиг. 164).

a) Общій случай. Длина пролетовъ l_1 и l_2, нагрузки—R_1 и R_2, плечи ихъ относительно крайнихъ опоръ $b_1\ b_2$, $c_1\ c_2$ (фиг. 164). Опоры лежатъ на одной высотѣ, поэтому въ ур-іи **VII** (*§ 31,a*) величина $Б = 0$; кромѣ того

$$M_0 = M_2 = 0$$

Соединяя ф-лы **VII** и **VIII** (*§ 31 a и б*), получаемъ:

$$2 M_1 (l_1 + l_2) + R_1 \frac{b_1 + c_1}{4} \cdot \frac{2 l_1^2 - b_1^2 - c_1^2}{l_1} + R_2 \cdot \frac{b_2 + c_2}{4} \cdot \frac{2 l_2^2 - b_2^2 - c_2^2}{l_2} = 0$$

Затѣмъ на общихъ основаніяхъ находимъ сопротивленія опоръ, кривыя моментовъ и сѣкущихъ усилій.

Выраженіе сгибающаго момента въ сѣченіи N на части DE, гдѣ нагрузка, приходящаяся на *1* длины, $= q_1$, будетъ:

$$M = K_0 \,.\, x - q_1 \,.\, \frac{(x - c_1)^2}{2} + M_0$$

Это будетъ ур-іе параболы $D_1F_1E_1$, вершина которой находится въ F_1. Ур-іе прямой сѣкущихъ усилій въ части DE будетъ:

$$\frac{d\,M}{dx} = \text{V} = K_0 - q_1 \,.\, (x - c_1)$$

При $x = c_1$ .... $\text{V}_D = K_0 = \text{V}_A = \text{V}_{оп}$

При $x = b_1$ .... $\text{V}_E = K_0 - q_1\,(b_1 - c_1) = K_0 - R_1 = V_{1л}$

Въ сѣченіи F .... $\text{V} = 0$ .... $\bar{x} - c_1 = \frac{K_0}{q_1}$,

т. е. *для полученія разстоянія между началомъ нагрузки на пролетъ и сѣченіемъ, въ которомъ аналитическое выраженіе момента будетъ*

max, *надо раздѣлить сѣкущее усиліе при опорѣ на величину нагрузки, которая приходится на 1 длины въ данномъ пролетѣ.*

$$max.\ M = K_0 \cdot \frac{K_0}{q_1} - \frac{q_1}{2} \cdot \left(\frac{K_0}{q_1}\right)^2 + M_0 =$$
$$= M_0 + q_1 \cdot \frac{\overline{x}^2}{2},$$

т. е. *аналитическій* **max** *момента на пролетѣ, нагруженномъ равномѣрно на части длины пролета, равняется опорному моменту, сложенному съ моментомъ относительно ближайшей къ опорѣ начальной точки нагрузки для той части нагрузки на пролетѣ, которая расположена между ея начальною точкою и сѣченіемъ максимальнаго момента.* Очевидно, что оба эти правила будутъ справедливы, въ какомъ бы пролетѣ мы ни находились и сколько бы ихъ ни было.

Опасными сѣченіями могутъ быть или F, или B, или L, смотря по величинѣ нагрузокъ и длинѣ пролетовъ.

Кривая сѣкущихъ усилій будетъ ломаною линіею $A_2D_2E_2B_2$ въ лѣвомъ пролетѣ, $B_1H_1I_1C_1$—въ правомъ.

Вопросы Какъ доказать, что прямая AD_1 (фиг. 164) касательна къ параболѣ $D_1F_1E_1$ въ точкѣ D_1?

Что нужно сдѣлать съ балкою, чтобы сѣченіе F аналитическаго *max* момента дѣлило длину DE пополамъ?

Что нужно для того, чтобы углы DAD_1—GCI были равны между собою?

б) *Частный случай 1-й.* Длина пролетовъ одинакова, нагрузки одинаковы и симметрично расположены относительно *средней* опоры, т. е.

$$l_1 = l_2 = l\ ;\ b_1 = b_2 = b\ ;\ c_1 = c_2 = c\ ;\ R_1 = R_2 = R.$$

Данныя этого случая будутъ пригодны также и тогда, когда каждый изъ пролетовъ разсматривается независимо отъ другого, т. е. какъ балка, ущемленная однимъ концомъ B (фиг. 165), а другимъ A свободно лежащая на опорѣ. Разница будетъ только въ величинѣ сопротивленія средней опоры, которое для цѣлой балки будетъ $2K_1$, а для ея половины K_1; поэтому здѣсь мы будемъ разсматривать ущемленную балку (фиг. 165).

Вмѣсто общаго ур-ія, которое имѣли для опредѣленія M_1 въ случаѣ *а*), здѣсь получимъ:

$$2M_1 . l + R . \frac{b+c}{4} . \frac{2l^2 - b^2 - c^2}{l} = 0\ ,$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= - R . \frac{b+c}{8} . \frac{2l^2 - b^2 - c^2}{l^2} \ . \ . \\ K_1 &= R . \frac{b+c}{2l} - \frac{M_1}{l} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ K_0 &= R - K_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{N.}$$

в) Частный случай 2-й. Балка однимъ концомъ защемлена въ стѣнѣ, другимъ лежитъ свободно на опорѣ; равномѣрная нагрузка занимаетъ часть длины балки (фиг. 165) и расположена на ней симметрично относительно опоръ, т. е.

$$b + c = l.$$

Пусть $c = t \cdot l$; $b = l\,(1 - t)$.

$$M_1 = -R \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l^2 + (b^2 + 2bc + c^2) - b^2 - c^2}{l^2}$$

$$M_1 = -\frac{R \cdot l}{8} \cdot \frac{l^2 + 2b \cdot c}{l^2} = -\frac{R \cdot l}{8}\left(1 + 2 \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l}\right) =$$

$$= -R \cdot l \cdot \frac{1 + 2t(1-t)}{8} = -\frac{R \cdot l}{8} \cdot \alpha$$

$$K_1 = \frac{R}{2} + \frac{R \cdot \alpha}{8} = \frac{4 + \alpha}{8} \cdot R \,;\, K_0 = \frac{4 - \alpha}{8} \cdot R.$$

При $t = 0$ приходимъ къ случаю *в* задачи № 73; тогда

$$M_1 = -\frac{R \cdot l}{8} \,;\, \alpha = 1 \,;\, K_1 = \frac{5}{8} R \,;\, K_0 = \frac{3}{8} R$$

При $t = \frac{1}{2}$ приходимъ къ случаю *б* задачи № 69; тогда

$$\alpha = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$M_1 = -\frac{3}{16} \cdot R.l \,;\, K_1 = \frac{11}{16} R \,;\, K_0 = \frac{5}{16} R$$

При промежуточныхъ значеніяхъ t получаемъ величины, приведенныя въ таблицѣ 21.

Таблица 21-я (фиг. 165.... $c = l - b$).

$t = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\alpha = 1{,}18$	1,197	1,219	1,245	1,278	1,32	1,375	1,444
$\frac{K_1}{R} = 0{,}647$	0.649	0,652	0,656	0,659	0,665	0,672	0,681

г) Частный случай 3-й. Балка однимъ концомъ защемлена въ стѣнѣ, другимъ лежитъ свободно на опорѣ; равномѣрная нагрузка занимаетъ часть длины балки и прилегаетъ къ свободной опорѣ (фиг. 166), т. е.

$$c = 0 \,;\, b = u \cdot l$$

По предыдущей ф-лѣ N имѣемъ:

$$M_1 = -\frac{R \,.\, b}{8} \,.\, \frac{2l^2 - b^2}{l^2} = -\frac{R \,.\, l}{8} \,.\, u\,(2 - u^2) = -\frac{R \,.\, l}{8} \,.\, \alpha$$

$$K_1 = R \,.\, \frac{u}{2} + R \,.\, u \,.\, \frac{2 - u^2}{8} = R \,.\, u \,.\, \frac{6 - u^2}{8}$$

Если $u = 1$, мы приходимъ къ случаю *в* задачи № 73; тогда

$$M_1 = -\frac{R \,.\, l}{8}\,;\ K_1 = \frac{5}{8} \,.\, R.$$

При другихъ значеніяхъ u получимъ данныя, приведенныя въ таб. 22.

Таблица 22-я (фиг. 166).

$u = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha = 0{,}199$	0,392	0,573	0,736	0,875	0,984	1,057	1,088	1,071
$\frac{K_1}{R} = 0{,}075$	0,149	0,222	0,292	0,359	0,423	0,482	0,536	0,584

При измѣненіи u наибольшее значеніе M_1 по абсолютной величинѣ получается тогда, когда величина

$$u \,.\, (2 - u^2)$$

будетъ *max*, что соотвѣтствуетъ величинѣ

$$u = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8165.$$

Опасное сѣченіе здѣсь всегда находится въ защемленномъ сѣченіи Значеніе аналитическаго *max* момента будетъ

$$max\, M = \overline{M} = q \,.\, \frac{\overline{x}^2}{2} = \frac{q}{2} \,.\, \left(\frac{K_0}{q}\right)^2$$

$$q = \frac{R}{b};\ K_0 = R - K_1 = \frac{R}{8}(8 - 6u - u^3)$$

$$\overline{M} = \frac{R \,.\, l}{128} \,.\, u \,.\, (8 - 6u - u^3)^2.$$

Т. к. величина u всегда менѣе 1, поэтому величину коэф. послѣ $R \,.\, l : 128$ въ предыдущемъ р-вѣ можно замѣнить приближенно чрезъ

$$A = u\,(8 - 6u)^2 = 64 \,.\, u - 96 \,.\, u^2 + 36 \,.\, u^3.$$

Найдемъ *max* A при измѣненіи u:

$$\frac{dA}{du} = 64 - 192 \,.\, u + 108 \,.\, u^2 = 0,\ \text{откуда}$$

$$u = \frac{4}{9},\ \text{при этомъ}$$

$$max\ \overline{M} = \frac{R . l}{8} . 0{,}15,$$

т. е. значительно менѣе соотвѣтственной величины α.

д) Частный случай 4-й. Балка однимъ концомъ защемлена въ стѣнѣ, другимъ лежитъ свободно на опорѣ; равномѣрная нагрузка занимаетъ часть длины пролета, прилегая къ стѣнѣ (фиг. 167), т. е.

$$b = l,\ c = z . l.$$

По предыдущей ф-лѣ **N** имѣемъ:

$$M_1 = -R . \frac{l+c}{8}\ \frac{l^2-c^2}{l^2} = -\frac{R . l}{8} . (1+z)(1-z^2) = -\frac{R . l}{8} . \alpha;$$

$$K_1 = R . \frac{1+z}{2} + R . \frac{1+z}{8}(1-z^2) = \frac{1+z}{8} . (5-z^2) . R = \beta . R.$$

При $z = 0$ приходимъ къ случаю *в* задачи № 73; тогда

$$M_1 = -\frac{R . l}{8};\ K_1 = \frac{5}{8} R.$$

При $z = 1$ нагрузка передается прямо на стѣну, при этомъ

$$M_1 = 0;\ K_1 = R.$$

При промежуточныхъ значеніяхъ z получимъ слѣдующія данныя (см. тб. 23-ю):

Таблица 23-я (фиг. 167).

$z = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha = 1{,}089$	1,152	1,183	1,176	1,125	1,024	0,867	0,648	0,361
$\frac{K_1}{R} = 0{,}686$	0,744	0,798	0,847	0,891	0,928	0,958	0,981	0,995
$\frac{K_0}{R} = 0{,}314$	0,256	0,202	0,153	0,109	0,072	0,042	0,019	0,005

Разсчетное сѣченіе въ этомъ случаѣ всегда находится въ мѣстѣ защемленія балки. Если бы нужно было найти аналитическій *max* момента (т. е. ординату FF_1 на фиг. 164), тогда, идя справа налѣво, можно писать:

$$max\ M = \overline{M} = M_1 + \frac{q . \overline{x}^2}{2};\ \text{гдѣ}$$

$$\overline{x} = K_1 : q;\ q = \frac{R}{l-c} = \frac{R}{l(1-z)}$$

$$\overline{M} = M_1 + \frac{K_1^2}{R} . l . \frac{1-z}{2} = \frac{R . l}{8}\left[(1-z) . 4\beta^2 - \alpha\right].$$

№ 76. Балка ущемлена въ стѣнахъ обоими концами и нагружена равномѣрно на части длины (фиг. 168). *а) Общій случай.* Нагрузка — R, плечи ея относительно лѣвой опоры b_1 и c_1, относительно правой — b_2 и c_2. Опорные моменты такой балки получимъ, разсматривая ее, какъ трехпролетную, у которой длина крайнихъ пролетовъ *л* доведена до нуля (фиг. 168).

Примѣняя ур-ія VII и VIII (§ *31 а* и *б*) къ пролетамъ CA и AB, получимъ:

$$(2M_1+M_2).l+R.\frac{b_2+c_2}{2}.\frac{l^2-b_2^2-c_2^2}{2l}=0$$

а въ пролетахъ AB и BD:

$$(M_1+2M_2).l+R.\frac{b_1+c_1}{2}.\frac{l^2-b_1^2-c_1^2}{2l}=0.$$

Рѣшая эти ур-ія относительно M_1 и M_2, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} M_1&=\frac{R}{12.l^2}\Big[(b_1+c_1)(2l^2-b_1^2-c_1^2)-2(b_2+c_2)(2l^2-b_2^2-c_2^2)\Big]\\ M_2&=\frac{R}{12.l^2}\Big[(b_2+c_2)(2l^2-b_2^2-c_2^2)-2(b_1+c_1)(2l^2-b_1^2-c_1^2)\Big]\end{aligned}\right\}\ldots 0$$

Сопротивленія опоръ K_1 и K_2 (фиг. 168) найдутся общимъ путемъ:

$$K_1=R.\frac{b_2+c_2}{2l}+\frac{M_2-M_1}{l}$$

$$K_2=R.\frac{b_1+c_1}{2l}+\frac{M_1-M_2}{l}.$$

б) Частный случай 1-й. Нагрузка расположена на части длины равномѣрно и симметрично относительно опоръ; оба конца балки защемлены въ стѣнахъ, т. е.

$$b_1=b_2=b=(1-t).l;\quad c_1=c_2=c=t.l;\quad b+c=l$$

$$M_1=M_2=-\frac{R.l}{12}.\frac{l^2+(b^2+2bc+c^2)-b^2-c^2}{l^2}=$$

$$=-\frac{R.l}{12}.\frac{l^2+2b.c}{l^2}=-\frac{R.l}{12}.[1+2t(1-t)]=-\frac{R.l}{12}.\alpha$$

$$K_1=K_2=\frac{R}{2}+\frac{M_1-M_2}{l}=\frac{R}{2}.$$

Если сдѣлаемъ $t=0$, тогда мы придемъ къ случаю балки, ущемленной обоими концами и нагруженной равномѣрно по всей длинѣ, когда

$$\alpha=1\ldots\ldots M_1=M_2=-\frac{R.l}{12}.$$

Если сдѣлаемъ $t=\frac{1}{2}$, тогда всю нагрузку обратимъ въ сосредоточенный грузъ, приложенный къ балкѣ въ срединѣ ея длины, гдѣ

$$\alpha=\frac{3}{2} \ldots\ldots M_1=M_2=-\frac{R.l}{8}.$$

При промежуточныхъ значеніяхъ t будемъ имѣть:

$t=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\alpha=1{,}18$	1,197	1,219	1,245	1,278	1,32	1,375	1,444

Аналитическій *max* сгибающаго момента здѣсь будетъ имѣть мѣсто всегда въ срединѣ длины балки и будетъ писаться непосредственно:

$$\overline{M}=K_1.\frac{l}{2}+M_1-\frac{R}{2}.\frac{l-2c}{4}=M_1+R.\frac{l+2c}{8}$$

$$\overline{M}=\frac{R.l}{12}.\frac{1+2t+4.t^2}{2}=\frac{R.l}{12}.\beta.$$

Max коэф. β получается при наибольшемъ возможномъ значеніи t, т. е.

$$\text{при } t=\frac{1}{2} \ldots\ldots \beta=\frac{3}{2} \ldots\ldots \overline{M}=\frac{R.l}{8}.$$

При этихъ данныхъ ...... $\alpha=\frac{3}{2}$, т. е. обнаруживаемъ извѣстное свойство балки, ущемленной въ стѣнахъ обоими концами и нагруженной въ срединѣ длины сосредоточеннымъ грузомъ: у нея 3 сгибающихъ момента имѣютъ одно и то же значеніе *max* — въ точкахъ опоры и въ срединѣ длины.

При всѣхъ остальныхъ возможныхъ значеніяхъ t коэф. α больше коэф. β, и разсчетными сѣченіями такой балки всегда будутъ ея ущемленныя, опорныя сѣченія.

в) Частный случай 2-й. Балка ущемлена обоими концами; равномѣрная нагрузка, распредѣленная на части длины, прилегаетъ къ одной изъ опоръ, напр. A (фиг. 169), т. е.

$$c_1=0\ ;\ b_2=l\ ;\ b_1+c_2=l\ ;$$

$$b_1=b=u.l\ ;\ c_2=c=l-b=l(1-u).$$

Ф-лы O примутъ въ этомъ случаѣ видъ:

$$2\,l^2-b^2_2-c^2_2=2\,l^2-l^2-(l^2-2\,l.b+b^2)=b\,(2\,l-b).$$

$$M_1=\frac{R.b}{12.l^2}\left[(2\,l^2-b^2)-2\,(2\,l-b)^2\right]$$

$$M_1 = \frac{R \, . \, l}{12} \; u \, . \left[(2 - u^2) - 2\,(2 - u)^2\right] = -\frac{R \, . \, l}{12} \, . \, \alpha_1$$

$$M_2 = \frac{R \, . \, b}{12 \, . \, l^2}\left[(2\,l - b)^2 - 2\,(2\,l^2 - b^2)\right]$$

$$M_2 = \frac{R \, . \, l}{12} \cdot u \, . \left[(2 - u)^2 - 2\,(2 - u^2)\right] = -\frac{R \, . \, l}{12} \, . \, \alpha_2$$

Если сдѣлаемъ $u = 1$, получимъ балку, нагруженную по всей длинѣ равномѣрно, и тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Max коэффиціентовъ α_1 и α_2 получается при различныхъ значеніяхъ u.

$$\alpha_1 = 2\,u - u^3 - 2\,u\,(4 - 4\,u + u^2) = -\,6\,u + 8\,u^2 - 3\,u^3$$

$$\frac{d\,\alpha_1}{du} = -\,6 + 16\,u - 9\,u^2 = 0, \text{ откуда}$$

$$u = 0{,}536$$

$$\alpha_2 = u\,(4 - 4\,u + u^2) - 4\,u + 2\,u^3 = 3\,u^3 - 4\,u^2,$$

$$\frac{d\,\alpha_2}{du} = 9\,u^2 - 8\,u; \text{ откуда } u = \frac{8}{9}$$

Сопротивленіе лѣвой опоры будетъ опредѣляться такъ:

$$K_1 = R . \frac{b_2 + c_2}{2\,l} + \frac{M_2 - M_1}{l} = R \, . \frac{2\,l - b}{2\,l} + \frac{R}{12}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$K_1 = \frac{R}{12} \cdot \left[\alpha_1 - \alpha_2 + 6\,(2 - u)\right] = \beta \cdot \frac{R}{12}$$

При $u = 1 \ldots . \; \beta = 6 \ldots . \; K_1 = 0{,}5 \, . \, R$.

Аналитическій *max* сгибающаго момента напишется, по общему правилу, такъ:

$$\overline{M} = M_1 + \frac{q}{2} \cdot \overline{x}^2, \text{ гдѣ } q = \frac{R}{u \, . \, l}$$

$$\overline{x} = \frac{K_1}{q} = \frac{\beta \, . \, u \, . \, l}{12}$$

$$\overline{M} = -\frac{R \, . \, l}{12} \, . \, \alpha_1 + \frac{R}{2 \, . \, u \, . \, l} \cdot \left(\frac{\beta \, . \, u \, . \, l}{12}\right)^2$$

$$\overline{M} = \frac{R \, . \, l}{12} \, . \left(\frac{u \, . \, \beta^2}{24} - \alpha_1\right) = \frac{R \, . \, l}{12} \, . \, \gamma$$

Если $u = 1 \ldots . \; \beta = 6; \; \alpha_1 = 1 \ldots . \; \gamma = \frac{1}{2} \ldots . \; \overline{M} = \frac{R \;\, l}{24}$,

т. е. получаемъ тогда извѣстный уже намъ результатъ. При другихъ значеніяхъ u получаемъ данныя, приведенныя въ табл. 24.

Таблица 24-я (фиг. 169).

$u =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha_1 =$	0,523	0,864	1,161	1,312	1,375	1,368	1,309	1,216	1,107
$\alpha_2 =$	0,037	0,136	0,279	0,448	0,625	0,792	0,931	1,024	1,053
$\beta =$	11,886	11,528	11,082	10,464	9,75	8,976	8,178	7,392	6,654
$\gamma =$	0,076	0,238	0,379	0,526	0,605	0,657	0,651	0,609	0,551

Данныя этой таблицы показываютъ, что разсчетнымъ сѣченіемъ будетъ сѣченіе A, къ которому прилегаетъ нагрузка.

№ 77. Балка ущемлена въ стѣнахъ обоими концами и нагружена двумя одинаковыми грузами, составляющими вмѣстѣ пару силъ; точки приложенія нагрузокъ находятся на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ опоръ (фиг. 170). Найти моменты защемленія такой балки и разсчетное сѣченіе для нея.

Плечи нагрузокъ относительно опоръ — a и b. Разсматривая балку, какъ трехпролетную съ длиною крайнихъ пролетовъ, доведенною до нуля, и примѣняя ур-іе **VII** (см. § *31*, *a*) два раза, напишемъ слѣдующее:

$$O = (2\,M_1 + M_2)\,.\,l + P.b\,.\,\frac{l^2 - b^2}{l} - P\,.\,a\,.\,\frac{l^2 - a^2}{l}$$

$$O = (2\,M_2 + M_1)\,.\,l + P\,.\,a\,.\,\frac{l^2 - a^2}{l} - P.b\,.\,\frac{l^2 - b^2}{l}$$

Складывая эти ур-ія, даходитъ:

$$(2\,M_1 + M_2)\,l + (2\,M_2 + M_1)\,.\,l = 0, \text{ откуда}$$

$$M_2 = -M_1,$$

т. е. моменты защемленія такой балки будутъ между собою равны, но противоположны по знаку. Затѣмъ умножая 1-е ур-іе на *2* и вычитая изъ него 2-е, получимъ:

$$M_1 = -P.\frac{b\,(l^2 - b^2) - a\,(l^2 - a^2)}{l^2} =$$

$$= -\frac{P}{l^2}\left[(l - a)\,.\,\{l^2 - (l^2 - 2\,l\,a + a^2)\} - a\,(l^2 - a^2)\right] =$$

$$= -\frac{P}{l^2}\,.\,a\,(l - a)\,(l - 2\,a)$$

Слѣд., опорные моменты обращаются въ нуль при трехъ значеніяхъ a:

1) когда $a = 0$, и C совпадаетъ съ A, а D — съ B;

2) когда $a = l$, и C совпадаетъ съ B, а D — съ A;

3) когда $a = \frac{l}{2}$, т. е. $l = 2a$, и обѣ нагрузки взаимно уничтожаютъ свое воздѣйствіе на балку.

Введемъ обозначеніе..... $a = t.l$

$$M_1 = -P.l.t\,(1-t)(1-2t) = -P.l.\alpha$$

Сопротивленія опоры, по общему правилу, будутъ писаться такъ:

$$K_1 = \frac{M_2 - M_1}{l} + P.\frac{b}{l} - P.\frac{a}{l} =$$

$$= -\frac{2\,M_1}{l} + P.\frac{b-a}{l} = P\,(1-2\,t).[1+2\,t-2t^2] = \beta.P$$

Когда $t=0$..... $K_1 = P$; при $t=1$..... $K_1 = -P$; и наконецъ при $t = \frac{1}{2}$..... $K_1 = 0$.

$$K_2 = \frac{M_1 - M_2}{l} + P.\frac{a}{l} - P.\frac{b}{l} = -K_1,$$

т. е. сопротивленія опоръ будутъ здѣсь представлять собою также пару силъ.

Моменты въ точкахъ C и D будутъ, очевидно, равны, но противоположны по знаку:

$$M_c = K_1.a + M_1 = P.l.t^2.(1-2\,t)(3-2\,t) = \gamma.P.l$$

При различныхъ значеніяхъ t величины коэф. даны въ табл. 25-й

Таблица 25-я (фиг. 170).

$t = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\alpha = 0{,}072$	0,077	0,082	0,087	0,093	0,096	0,094	0,074	0
$\beta = 0{,}944$	0,932	0,914	0,888	0,853	0,792	0,688	0,481	0
$\gamma = 0{,}022$	0,027	0,032	0,040	0,049	0,062	0,078	0,086	0

Max опорнаго момента M_2 найдется такъ:

$$\alpha = (t - t^2)(1-2t) = t - 3t^2 + 2t^3$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 1 - 6t + 6t^2 = 0 \text{, откуда}$$

$$t = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4{,}73} = 0{,}211$$

$$max\ \alpha = 0{,}0962$$

Max момента въ точкѣ приложенія силы опредѣлится слѣд. обр.:

$$\gamma = (t^2 - 2t^3)(3 - 2t) = 3t^2 - 8t^3 + 4t^4$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = 6 \cdot t - 24 \cdot t^2 + 16 \cdot t^3 = 0, \text{ или}$$

$$t^2 - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{3}{8} = 0, \text{ откуда}$$

$$t = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{3}{8}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3{,}15} = 0{,}317$$

$$max\ \gamma = 0{,}0866$$

При нѣкоторомъ значеніи t сгибающій моментъ въ точкѣ приложенія силы и опорный моментъ дѣлаются одинаковыми; для этого нужно, чтобы $\alpha = \gamma$, т. е.

$$1 - t = 3t - 2t^2, \text{ или } t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{откуда } t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3{,}4} = 0{,}293$$

При этомъ значеніи t

$$M_c = M_2 = 0{,}0855 \cdot P \cdot l$$

Пока t измѣняется отъ O до 0,293 разсчетныхъ сѣченіемъ будетъ опорное, а при значеніяхъ t отъ 0,293 до 0,707 разсчетнымъ сѣченіемъ является сѣченіе, проходящее чрезъ точку приложенія силы.

Кривыя моментовъ и силъ сдвига изображены на фиг. 170. Упругая линія будетъ имѣть въ этомъ случаѣ **3** точки перегиба $m_1 m_2 m_3$ (фиг. 170), изъ коихъ одна находится въ срединѣ длины балки.

Д. Силы сдвига въ продольныхъ и поперечныхъ плоскостяхъ согнутаго бруса.

34. **Общее представленіе о происхожденіи силъ сдвига при сгибаніи бруса.** Явленіе сгибанія балки всегда сопровождается явленіемъ сдвига въ ея продольныхъ и поперечныхъ плоскостяхъ. Въ необходимости существованія явленія сдвига при сгибаніи мы имѣли уже случай убѣдиться, разсматривая *6* основныхъ ур-ій равновѣсія согнутаго бруса (см. § 3): изъ нихъ *4* ур-ія удовлетворялись сами собою, одно привело насъ къ равенству момента внѣшнихъ силъ съ моментомъ внутреннихъ силъ, растяженія и сжатія, и наконецъ одно ур-іе требовало, чтобы алгебраическая сумма проекцій на ось z—овъ всѣхъ силъ, взятыхъ по одну сторону отъ разсматриваемаго сѣченія, равнялась сопротивленію сдвига въ этомъ сѣченіи, или короче, чтобы сѣкущее усиліе равнялось сопротивленію сдвига при данномъ сѣченіи.

Представленіе о силѣ сдвига въ поперечномъ сѣченіи согнутой балки можно дать еще и въ такой элементарной формѣ Пусть имѣемъ балку A (фиг. 171), на которую передается дѣйствіе какой-либо сгибающей нагрузки. Возьмемъ произвольное сѣченіе N этой балки, и пусть справа отъ него сѣкущее усиліе будетъ P; оно будетъ представлять собою алебраическую сумму всѣхъ силъ, взятыхъ справа отъ сѣченія N, включая въ ихъ число также и сопротивленія всѣхъ опоръ справа отъ сѣченія N. Пусть слагающая всѣхъ этихъ силъ будетъ сосредоточена въ точкѣ O. Послѣ того какъ балка получила уже деформацію отъ нагрузки и пришла въ равновѣсіе, приложимъ въ ц. т. сѣченія N двѣ равныя и противоположныя силы $(+P)$ и $(-P)$, равныя по величинѣ сѣкущему усилію P въ данномъ сѣченіи справа; равновѣсіе балки чрезъ это не нарушится. Но тогда мы получаемъ пару силъ $(P, -P)$ и силу $(+P)$: дѣйствіе пары силъ д. б. уравновѣшено сопротивленіемъ внутреннихъ паръ отъ силъ растяженія и сжатія въ поперечномъ сѣченіи, а сила $(+P)$ относительно сѣченія N является тангенціальною силою, которая д. б. уравновѣшена сопротивленіемъ сдвига въ поперечномъ сѣченіи балки Какъ распредѣлится сила $(+P)$ между отдѣльными элементами даннаго сѣченія N, это будетъ выяснено далѣе; но какова бы ни была форма поперечнаго сѣченія балки и какой бы законъ распредѣленія напряженій сдвига между элементами сѣченія мы не обнаружили впослѣдствіи, *алгебраическая сумма всѣхъ элементарныхъ сопротивленій сдвига въ произвольномъ поперечномъ сѣченіи согнутой балки должна равняться сѣкущему усилію въ этомъ сѣченіи.* Будетъ измѣняться эта алгебраическая сумма при переходѣ отъ одного поперечнаго сѣченія къ другому, или нѣтъ, это будетъ зависѣть отъ вида кривой сѣкущихъ усилій.

Чтобы составить себѣ представленіе о силахъ сдвига въ продольныхъ плоскостяхъ согнутаго бруса, поступаемъ такъ: когда равновѣсіе согнутой балки установилось, въ области растянутыхъ волоконъ балки представимъ себѣ часть ея $ABCD$ (фиг 172) какъ-бы удаленною; чтобы равновѣсіе балки не нарушилось, со стороны отнятой части AC мы должны приложить къ сѣченію AB тѣ элементарныя силы растяженія, съ которыми отнятая часть AC дѣйствовала на оставшуюся BE. Извѣстно, что эти элементарныя силы растяженія распредѣлены на плоскости поперечнаго сѣченія AB не равномѣрно, что онѣ возрастаютъ пропорціонально разстояніямъ отъ нейтральнаго слоя Ox. Совокупность ихъ на площади обрѣза AB пусть будетъ $\Sigma X = Q$. Эта сила, приложенная къ плоскости AB, является воздѣйствіемъ отнятой части бруса AC на оставшуюся BE; она будетъ параллельна продольному сѣченію AE оставшейся части балки и вызоветъ въ этомъ сѣченіи сопротивленіе сдвига.

Ясно, что чѣмъ далѣе будетъ взято продольное сѣченіе AE отъ нейтральнаго слоя, тѣмъ сила Q будетъ меньше; и когда AE будетъ совпадать съ крайними растянутыми волокнами, Q будетъ равно нулю; то же самое могли бы доказать и относительно крайнихъ сжатыхъ ли-

ній сѣченія; слѣд., *въ крайнихъ продольныхъ сѣченіяхъ, наиболѣе удаленныхъ отъ нейтральнаго слоя согнутаго бруса, напряженіе сдвига должно равняться нулю*, какая бы форма поперечнаго сѣченія бруса ни была и какимъ бы способомъ поперечная сгибающая нагрузка на него не дѣйствовала. Напротивъ, съ приближеніемъ сѣченія AE къ нейтральному слою величина силы Q будетъ все время возрастать, и *max* ея получится, очевидно, для нейтральнаго слоя; если мы спустимся съ сѣченіемъ AE ниже нейтральнаго слоя, тогда въ составъ алгебраической суммы ΣX будутъ входить уже не только силы растяженія со знакомъ плюсъ, но и силы сжатія—со знакомъ минусъ; а когда съ сѣченіемъ AE спустимся до крайняго нижняго волокна FG, тогда ΣX обратится въ нуль, п. ч. и внѣшняя нагрузка, и внутреннія силы растяженія и сжатія, взятыя въ суммѣ для всего поперечнаго сѣченія, никакой проекціи на ось Ox не даютъ. Поэтому, **max** *силы сдвига при сгибаніи всегда долженъ имѣть мѣсто въ продольной плоскости согнутаго бруса, совпадающей съ его нейтральнымъ слоемъ*, и опять—независимо ни отъ формы сѣченія бруса, ни отъ способа его нагруженія.

Этимъ элементарнымъ путемъ мы получили, слѣд., представленіе какъ о происхожденіи сопротивленія сдвига въ продольныхъ плоскостяхъ согнутаго бруса, такъ отчасти уже и о самомъ распредѣленіи силъ сопротивленія между его продольными плоскостями, обнаружили, что крайніе, наиболѣе удаленные отъ нейтральнаго слоя, элементы сѣченія совсѣмъ не испытываютъ напряженія сдвига, и что по продольному сѣченію бруса, совпадающему съ его нейтральнымъ слоемъ, распредѣляется максимальная тангенціальная сила.

35. **Значеніе силъ сопротивленія сдвига въ поперечныхъ и продольныхъ плоскостяхъ согнутаго бруса.** Согнутый брусъ д. б. крѣпокъ по отношенію къ сдвигу, какъ въ его поперечныхъ плоскостяхъ, такъ и продольныхъ.

Въ силу этого, напр., въ деревянныхъ брусьяхъ избѣгаютъ направлять дѣйствіе сгибающей нагрузки параллельно направленію волоконъ бруса (фиг. 173), какъ потому, что дерево въ поперечномъ направленіи оказываетъ весьма слабое сопротивленіе растяженію, такъ и потому, что сопротивленіе сдвигу по направленію волоконъ у дерева также весьма незначительно.

Точно также и отъ металлической балки, составленной въ длину изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ частей, требуется, чтобы въ плоскостяхъ поперечнаго стыка была достаточная крѣпость не только по отношенію къ сгибающему моменту, но также и по отношенію къ силамъ сдвига.

Если въ области сжатыхъ волоконъ согнутаго бруса сдѣлаемъ надрѣзъ km (фиг. 171) так. обр., чтобы передача сжимающаго дѣйствія силы P могла свободно происходить справа налѣво, брусъ могъ бы и послѣ этого надрѣза выдерживать ту же величину сгибающаго момента, что и прежде, но по отношенію къ сдвигу въ поперечномъ сѣченіи онъ можетъ оказаться недостаточно крѣпкимъ.

Сдѣлаемъ подобные же надрѣзы въ продольномъ направленіи. Пусть имѣемъ брусъ, съ прямоугольнымъ поперечнымъ сѣченіемъ, защемленный однимъ концомъ въ стѣнѣ и нагруженный сосредоточеннымъ грузомъ P. Посмотримъ какой сгибающій моментъ можно передать на цѣлый брусъ и на брусъ, разрѣзанный въ продольномъ направленіи. Размѣры поперечнаго сѣченія цѣлаго бруса $a \times h$. Плоскости продольнаго разрѣза дѣлятъ высоту на n равныхъ частей. Эффектъ сгибанія цѣлаго и разрѣзаннаго бруса представленъ на фиг. 174, *I*, *II*, *III*: здѣсь *I* изображаетъ цѣлый брусъ до сгибанія, *II* — цѣлый брусъ послѣ сгибанія, его конечное поперечное сѣченіе остается послѣ сгибанія плоскимъ и нормальнымъ къ упругой линіи въ точкѣ A; *III* представляетъ сгибаніе разрѣзаннаго бруса, конечныя поперечныя сѣченія его остаются тоже плоскими и нормальными каждое къ своей упругой линіи, а потому они будутъ сдвинуты одно относительно другого; на каждомъ продольномъ стыкѣ двухъ смежныхъ частей разрѣзаннаго бруса здѣсь соприкасаются теперь уже элементы съ разноименными напряженіями, — у верхней части его будутъ сжатые элементы, а у нижней — растянутые. Въ поперечномъ сѣченіи цѣлаго бруса *II* нейтральнымъ слоемъ будетъ ось y, поэтому моментъ инерціи и модуль сопротивленія сѣченія будутъ писаться такъ:

$$I = \frac{a \cdot h^3}{12}; \quad e = \frac{h}{2}; \quad W = \frac{I}{e} = \frac{a \cdot h^2}{6}$$

Сгибающій моментъ, который можно передать на цѣлый брусъ, будетъ:

$$M = B \cdot W = B \cdot \frac{a \cdot h^2}{6} = P \cdot l$$

Если безопасную нагрузку для бруса *III*, разрѣзаннаго вдоль, обозначимъ чрезъ P_1 и допустимъ, что на каждую изъ частей передается нагрузка $P_1 : n$, тогда послѣ сгибанія такого бруса въ поперечномъ сѣченіи каждой изъ частей его будетъ свой нейтральный слой y_1 (фиг. 174, III); размѣры сѣченія — $a \times \frac{h}{n}$, моментъ инерціи и модуль сопротивленія сѣченія будутъ:

$$I_1 = \frac{a}{12} \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^3; \quad e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}; \quad W_1 = \frac{a}{6} \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2$$

Сгибающій моментъ, который можно передать на брусъ, продольно разрѣзанный на n отдѣльныхъ частей горизонтальными плоскостями, будетъ:

$$M_1 = P_1 \cdot l = n \cdot \left(\frac{P_1}{n} \cdot l\right) = n \cdot B \cdot W_1, \text{ или}$$

$$M_1 = \frac{1}{n} \cdot B \cdot \frac{a \cdot h^2}{6} = \frac{1}{n} \cdot M,$$

т. е. *разрѣзаніе прямоугольнаго бруса продольными горизонтальными*

плоскостями уменьшаетъ его крѣпость при сгибаніи въ вертикальной плоскости во столько разъ, сколько частей получается послѣ разрѣза.

Не трудно обнаружить, что разрѣзаніе того же бруса вертикальными плоскостями не вызоветъ никакого уменьшенія въ величинѣ момента, который можетъ воспринять на себя разрѣзанный брусъ. Размѣры сѣченія элементарнаго бруса будутъ $\frac{a}{n} \times h$, поэтому

$$I_2 = \frac{a}{n} \cdot \frac{h^3}{12};\ e_2 = \frac{h}{2};\ W_2 = \frac{a}{n} \cdot \frac{h^2}{6}.$$

Сгибающій моментъ для бруса, разрѣзаннаго вертикальными продольными плоскостями, будетъ:

$$M_2 = P_2 . l = n . \left(\frac{P_2}{n} . l\right) = n . B . \frac{a}{n} . \frac{h^2}{6} = M,$$

т. е. моментъ будетъ тотъ же, что и въ 1-мъ случаѣ.

Это указываетъ на то, что сдвига въ продольныхъ вертикальныхъ плоскостяхъ нѣтъ, онъ имѣется только въ плоскостяхъ горизонтальныхъ; и отъ того, въ какой мѣрѣ данный брусъ способенъ оказать сопротивленіе этому сдвигу, зависитъ и крѣпость согнутаго бруса.

Если двѣ балки будутъ положены одна на другую и нагружены общей нагрузкой, ихъ надо разсматривать, какъ сопротивляющіяся независимо одна отъ другой, т. к. на поверхности стыка ихъ можетъ имѣть мѣсто скольженіе одной балки по другой; и только, уничтоживши возможность этого скольженія, мы можемъ разсматривать обѣ балки какъ бы слитыми въ одно цѣлое и работающими съ однимъ общимъ нейтральнымъ слоемъ.

36. **Опредѣленіе продольной силы сдвига при сгибаніи бруса.** Послѣ того какъ установилось равновѣсіе между сгибающею нагрузкою и внутренними силами сопротивленія, представимъ себѣ, что въ области растянутыхъ волоконъ согнутаго бруса сдѣлана вырѣзка двухъ кусковъ CD и C_1D_1 (фиг. 175) слѣдующимъ образомъ: проведены двѣ поперечныя вертикальныя плоскости AO и A_1O_1 и одна продольная горизонтальная плоскость CC_1 на разстояніи f отъ нейтральнаго слоя. Въ этой именно продольной горизонтальной плоскости и требуется найти величину силы сдвига. Отрѣзанные куски CD и C_1D_1 въ плоскостяхъ AC и A_1C_1 имѣютъ видъ площади KLN (фиг. 175, поперечное сѣченіе справа), которую будемъ называть *площадью обрѣза*; ширина площади обрѣза въ плоскости разсматриваемаго продольнаго сѣченія $= 2 . b$.

Разсмотримъ равновѣсіе оставшагося куска CA_1. На площади обрѣза $AC - A_1C_1$ дѣйствуютъ силы растяженія Q и Q_1, а въ плоскости CC_1 должна существовать противодѣйствующая ихъ сила сопротивленія сдвига $Ж$, а потому:

$$Q - Q_1 = Ж \qquad \text{. . . . . a.}$$

Найдемъ силы Q и Q_1; каждая изъ нихъ представляетъ собою алгебраическую сумму элементарныхъ силъ растяженія, одна на площади AC, другая — на площади A_1C_1.

Пусть напряженія крайнихъ элементовъ A и A_1 будутъ H и H_1, а напряженія на произвольномъ разстояніи z отъ нейтральнаго слоя — h и h_1, тогда мы имѣемъ:

$$\frac{h}{H}=\frac{h_1}{H_1}=\frac{z}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{б.}$$

На площади обрѣза KLN выдѣлимъ элементъ площади dF, проведя двѣ безконечно близкія параллели на разстояніи dz одна къ другой; тогда элементъ площади

$$dF=2y\,.\,dz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{в;}$$

его можно принимать испытывающимъ одно и то же напряженіе h — на плоскости AC и h_1 — на плоскости A_1C_1; элементарная сила растяженія слѣва отъ AC будетъ $h\,.\,dF$, а ихъ сумма

$$Q=\Sigma h\,.\,dF;$$

точно также элементарная сила растяженія справа отъ A_1C_1 будетъ $h_1\,.\,dF$, а ихъ сумма

$$Q_1=\Sigma h_1\,.\,dF.$$

$$Q=\int_f^e H\,.\,\frac{z}{e}\,.\,2y\,.\,dz=\frac{H}{e}\,.\,U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{г,}$$

гдѣ

$$U=\int_f^e 2y\,.\,z\,.\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{д.}$$

Величина U представляетъ собою *статическій моментъ площади обрѣза*, взятый относительно нейтральной линіи O_2y.

Совершенно подобнымъ же образомъ получимъ

$$Q_1=\frac{H_1}{e}\,.\,U.$$

Величина U здѣсь будетъ та же самая, что и въ выраженіи Q, т. к. обѣ площади обрѣза AC и A_1C_1 одинаковы. Поэтому мы получимъ:

$$Ж=U.\frac{H-H_1}{e}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{А,}$$

т. е. *сила сдвига въ продольной горизонтальной плоскости согнутаго бруса между двумя данными поперечными сѣченіями равна статическому моменту площади обрѣза относительно нейтральной линіи, умноженному на дробь, у которой числитель есть разность напряженій въ крайнихъ точкахъ двухъ данныхъ сѣченій, а знаменатель —*

разстояніе этихъ крайнихъ точекъ отъ нейтральнаго слоя. Так обр. мы видимъ, что величина силы сдвига будетъ зависѣть съ одной стороны отъ формы поперечнаго сѣченія бруса, съ другой — отъ положенія разсматриваемаго продольнаго сѣченія, и съ третьей наконецъ—отъ закона распредѣленія напряженій между крайними точками бруса, наиболѣе удаленными отъ нейтральнаго слоя.

Введемъ въ ф-лу **А** выраженія M и M_1 сгибающихъ моментовъ въ сѣченіяхъ AC и A_1C_1 (см. ф-лу **9,а** въ § 4):

$$M = \frac{H.I}{e}; \quad M_1 = \frac{H_1.I}{e}, \text{ тогда}$$

$$Ж = U.\frac{M - M_1}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{Б},$$

т. е. *отношеніе разности напряженій въ крайнихъ точкахъ двухъ данныхъ сѣченій къ разстоянію этихъ точекъ отъ нейтральнаго слоя можетъ быть замѣнено въ выраженіи силы сдвига отношеніемъ разности сгибающихъ моментовъ въ двухъ данныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ къ моменту инерціи* **всего** *поперечнаго сѣченія бруса относительно нейтральной линіи.*

Выраженіе **Б** показываетъ намъ, что при разныхъ способахъ нагруженія бруса законъ измѣненія силы сдвига между двумя произвольно взятыми поперечными сѣченіями его намъ всегда будетъ указывать кривая сгибающихъ моментовъ бруса.

Если кривая сгибающихъ моментовъ не будетъ прямою, ||-ю оси бруса, тогда на опредѣленной длинѣ CC_1 величина $Ж$ будетъ перемѣнною въ разныхъ мѣстахъ по длинѣ бруса.

Пусть $ж$ будетъ величина *продольной силы сдвига, отнесенной къ единицѣ длины* бруса въ продольномъ его сѣченіи. Если предположимъ (фиг. 175), что разстояніе $CC_1 = dx$, т. е. оба поперечныхъ сѣченія AO и A_1O_1 взяты на безконечно близкомъ разстояніи другъ отъ друга, тогда

$$Ж = ж.dx; \quad M - M_1 = dM,$$

и ф-ла **Б** приметъ видъ:

$$ж.dx = U.\frac{dM}{I}, \text{ или}$$

$$ж = \frac{U}{I}.\frac{dM}{dx} = \frac{U.V}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{В},$$

т. е. **сила сдвига** *въ продольной горизонтальной плоскости согнутаго бруса,* **отнесенная къ единицѣ длины,** *равна статическому моменту площади обрѣза, умноженному на отношеніе сѣкущаго усилія къ моменту инерціи* **всего** *сѣченія бруса.*

Слѣд., въ балкахъ нагруженныхъ сосредоточенными грузами, величена $ж$ будетъ постоянной между точками приложенія силъ, а въ балкахъ съ равномѣрной нагрузкой $ж$ будетъ равномѣрно возрастать

по мѣрѣ удаленія отъ сѣченія, имѣющаго аналитическій *max* или *min* момента.

При практическомъ примѣненіи ф-лъ **Б** и **В** нерѣдко дѣлаютъ ошибку: берутъ вмѣсто I моментъ инерціи площади обрѣза, а нужно брать моментъ инерціи *всего* сѣченія бруса относительно нейтральной линіи, а если онъ срощенный изъ нѣсколькихъ брусьевъ, то — полной площ. сѣченія ихъ

Опредѣлимъ теперь *напряженіе сдвига* въ произвольномъ мѣстѣ данной продольной плоскости согнутаго бруса. Пусть оно будетъ T. Для этого представимъ себѣ, что поперечныя плоскости AC и A_1C_1 (фиг. 175) отстоятъ на разстояніи *единицы* одна отъ другой Тогда въ плоскости CC_1 будетъ дѣйствовать сила *ж*, и она будетъ распредѣляться по площади $CC_1 \times 2.b$, т. е. по площади $2.b$, п. ч. $CC_1 = 1$

Величину единицы длины мы можемъ всегда выбрать произвольно малой, т. е. такой, на протяженіи которой величину T можно считать постоянною; при такихъ условіяхъ

$$ж = T.\ 2b = \frac{U.V}{I}, \text{ или}$$

$$T = \frac{U.V}{2b.I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{Г},$$

т. е. **тангенціальное напряженіе** *въ продольной горизонтальной плоскости согнутаго бруса равно дроби, у которой числитель есть произведеніе статическаго момента площади обрѣза на сѣкущее усиліе въ данномъ сѣченіи, а знаменатель — произведеніе момента инерціи* **всего** *поперечнаго сѣченія бруса на ширину площади обрѣза въ данной продольной плоскости.*

Для полученія разсчетнаго ур-ія на сдвигъ при сгибаніи, надо найти *max* T и сдѣлать его равнымъ или меньшимъ допускаемаго при сдвигѣ напряженія S.

Выведенныя въ этомъ параграфѣ ф-лы **А** (или **Б**), **В** и **Г** и являются основными, рѣшающими вопросъ о силахъ сдвига при сгибаніи

37. **Алгебраическая сумма силъ сдвига въ поперечномъ сѣченіи согнутаго бруса.** Мы знаемъ, что эта алгебраическая сумма всегда должна равняться сѣкущему усилію даннаго сѣченія, какой бы ни былъ видъ поперечнаго сѣченія бруса и способъ нагруженія балки. Нужно, слѣд., доказать, что выведенныя нами ф-лы неизбѣжно приведутъ насъ именно къ этому результату

При точкѣ C (фиг. 175) въ согнутомъ брусѣ выдѣлимъ элементарный параллелепипедъ, покрытый на чертежѣ штрихами накрестъ и имѣющій размѣры

$$2b \times dz \times dx.$$

Разсматривая перекашиванiе этого п-да мы можемъ сказать, что на боковыхъ перекашиваемыхъ граняхъ его будетъ одно и то же напряженiе сдвига T; поэтому при точкѣ C, какъ въ продольномъ направленiи согнутаго бруса, такъ и въ поперечномъ, будетъ существовать одна и та же величина силы сдвига $ж$, приходящейся на единицу длины; на длинѣ dz по вертикальному направленiю она будетъ $ж . dz$, а на всей разсматриваемой площади обрѣза KLN она будетъ

$$R = \sum_f^e ж . dz = \frac{V}{I} \cdot \sum_f^e U . dz$$

Сдѣлаемъ въ этомъ выраженiи размѣръ f перемѣннымъ, положивъ его равнымъ z, т. е. будетъ перемѣщать линiю KN и мѣнять размѣръ площади обрѣза. Тогда

$$R = \frac{V}{I} \cdot \int_z^e U . dz = \frac{V}{I} \left[z . U - \int z . dU \right]_z^e$$

Пользуясь выраженiемъ д (§ 36), мы напишемъ, что

$$U = \int_z^e z . dF, \text{ поэтому}$$

$$dU = - z . dF .$$

$$R = \frac{V}{I} \cdot \left[z . U + \int z^2 . dF \right]_z^e$$

Такъ выражается алгебраическая сумма силъ сдвига, распредѣленныхъ по произвольной плоскости обрѣза KLN (фиг. 175) Если мы пожелаемъ слѣлать плоскостью обрѣза всю площадь поперечнаго сѣченiя, тогда нужно положить $z = - e_1$, т. е. распространить интегрированiе на всю площадь сѣченiя; но при этомъ мы найдемъ, что

$$\int_{-e_1}^e z^2 . dF = I,$$

т. е. этотъ интегралъ обратится въ моментъ инерцiи всего сѣченiя бруса, а

$$U = \int_{-e_1}^e z . dF = \bar{z} . F = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathfrak{g},$$

т. к. координата $\bar{z}$ центра тяжести всего сѣченiя бруса будетъ здѣсь равна нулю; а потому

при $z = - e_1$ . ... $R = V$

38. **Разсчетное ур-iе на сдвигъ при сгибанiи.** *а) Общiя соображенiя.* Какiя бы ни были форма поперечнаго сѣченiя согнутаго бруса и способъ его нагруженiя извнѣ, необходимо въ каждомъ отдѣльномъ

случаѣ найти тангенціальное напряженіе T, опредѣлить его max и сдѣлать $max\ T$ равнымъ или меньшимъ допускаемаго при сдвигѣ напряженія S. Разсматривая ф-лу **Г** (§ 36), мы видимъ, что $max\ T$ получится тогда, когда мы внесемъ въ эту ф-лу $max\ V$; кромѣ того,

$$max\ \frac{U}{2b\,.\,I} = \frac{\beta}{F},$$

гдѣ F есть площадь всего пеперечнаго сѣченія бруса, а β—нѣкоторый коэф., зависящій исключительно отъ формы и размѣровъ поперечнаго сѣченія согнутаго бруса. Слѣд ,

$$max\ T = \frac{max\ V\,.\,\beta}{F}$$

Эта ф-ла при каждомъ способѣ нагруженія балки должна быть относима къ сѣченію, въ которомъ сѣкущее усиліе V имѣетъ значеніе max, т. е. *къ опасному сѣченію относительно сдвига*. Если это помнить, тогда разсчетное ур-іе на сдвигъ при сгибаніи можно писать такъ:

$$S = \text{или болѣе}\ \frac{\beta\,.\,V}{F}\,. \qquad \ldots\ldots\ldots\ \textbf{Д.}$$

Эта основная ф-ла отличается отъ обычно употребляемой при разсчетѣ на сдвигъ (см. ф-лу **80** въ § 50, часть I-я) только присутствіемъ во 2-й части коэф. β, величину котораго и нужно теперь найти для сѣченій, наиболѣе часто встрѣчающихся при практическихъ примѣненіяхъ.

б) Прямоугольное сѣченіе балки. (фиг. 176). Размѣры сѣченія $a \times h$. Площадь обрѣза $KLMN$. Ея статическій моментъ будетъ

$$U = \int_z^e z\,.\,dF = \int_z^e z\,.\,a\,.\,dz = a\,.\,\frac{e^2 - z^2}{2}$$

То же самое выраженіе можно написать и непосредственно по теоремѣ о центрѣ тяжести, т. к.

$$U = F_{\kappa\mu}\,.\,\bar{z},\ \text{гдѣ}$$

$$F_{\kappa\mu} = a\,.\,(e - z)\,;\ \bar{z} = \frac{e + z}{2}$$

Умножая величину площади KM на разстояніе ц. т. ея отъ нейтральной оси и получимъ то же самое выраженіе U, что и ранѣе. Въ выраженіе T входятъ затѣмъ величины

$$2b = a\,;\ I = \frac{a\,.\,h^3}{12},\ \text{поэтому}$$

$$T = V\,.\,a\,.\,\frac{e^2 - z^2}{2} : a\,.\,\frac{a\,.\,h^3}{12} = \frac{6V}{a\,.\,h}\,.\,\frac{e^2 - z^2}{h^2} \qquad \ldots\ldots\ \textbf{i.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что кривая тангенціальныхъ напряженій будетъ параболою *mnp* (фиг. 176):

при $z=+e$ .... $T=0$ ..... на линіи LM

при $z=-e$ ..... $T=0$ ..... „ „ $L_1 M_1$

Перемѣна z съ $(+z)$ на $(-z)$ не измѣняетъ величину T, поэтому нейтральная линія Oy будетъ осью параболы.

При $z=0$, т. е. въ нейтральномъ слоѣ, получимъ

$$max\ T=T_0=\frac{6V}{a\,.\,h}\,.\,\frac{e^2}{h^2}=\frac{6V}{F}\,.\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\,.\,\frac{V}{F}$$

Так. обр. здѣсь $\beta=\frac{3}{2}$, и разсчетное ур-іе прямоугольнаго бруса будетъ:

$$S = \text{или болѣе}\ \frac{3}{2}\,.\,\frac{V}{F}\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathbf{3.}$$

в) Эллиптическое и круглое сѣченіе балки. Полуоси эллипса (фиг. 177) — a и b. Ур-іе его

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,\ \text{поэтому}$$

$$\frac{2y\,.\,dy}{b^2}+\frac{2z\,.\,dz}{a^2}=0\,;\ 2z\,.\,dz=-\frac{a^2}{b^2}\,.\,2y\,.\,dy$$

$$U=\int_z^e 2y\,.\,z\,.\,dz=-\int_y^o y\,.\,\frac{a^2}{b^2}\ 2y\,.\,dy=+\frac{2a^2}{b^2}\,.\int_o^y y^2\,.\,dy$$

$$U=\frac{2a^2}{b^2}\,.\,\frac{y^3}{3}$$

Моментъ инерціи сѣченія эллипса (см. ф-лу 21, § 9, II ч.):

$$I=\frac{\pi}{4}\,.\,b\,.\,a^3$$

Напряженіе сдвига (см. ф-лу **Г** въ § 36) будетъ

$$T=V.\frac{2a^2}{b^2}\,.\,\frac{y^3}{3}:2y\,.\,\frac{\pi}{4}\,.\,b\,.\,a^3=\frac{4}{3}\,.\,\frac{V}{\pi\,.\,a\,.\,b}\,.\,\frac{y^2}{b^2}$$

Но $$\pi\,.\,a\,.\,b=F\,;\ \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-z^2}{a^2}$$

$$T=\frac{4}{3}\,.\,\frac{V}{F}\,.\,\frac{a^2-z^2}{a^2}$$

И здѣсь кривая напряженій будетъ параболою *mnp* (фиг. 177):

при $z=+a$ ..... $T=0$ .. .... точка L

при $z=-a$ .... $T=0$ ..... . „ L_1

$$max\ T=T_0=\frac{4}{3}\,.\,\frac{V}{F}$$

Слѣд., здѣсь коэф. $\beta = \frac{4}{3}$, и разсчетное ур-іе эллиптическаго или круглаго бруса будетъ:

$$S = \text{или болѣе } \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{F} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Ж.}$$

Въ случаѣ круглаго сѣченія, когда $a = b = r$, статическій моментъ площади обрѣза относительно діаметра круга получится равнымъ

$$U = \frac{2}{3} \cdot y^3 = \frac{2}{3} \left[r^2 - z^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

При употребленіи сложныхъ балокъ, составленныхъ изъ двухъ брусьевъ, скрѣпленныхъ между собою и сопротивляющихся, какъ одно цѣлое, нейтральный слой часто не совпадаетъ съ діам. круга, а является хордою $O_1 y_1$ (фиг. 178), отстоящею отъ діаметра на разстояніе c. Посмотримъ, какъ выразится въ этомъ случаѣ статическій моментъ U_1 площади обрѣза F_1, покрытой штрихами на фиг. 177. Прежнія координаты линіи KN относительно осей yOz были y, z, новыя же координаты относительно осей $y_1 O_1 z$ будутъ y_1, z_1, причемъ

$$y = y_1 \; ; z = z_1 + c.$$

$$y^2 + (z_1 + c)^2 = r^2 \; ; 2y \, . \, dy + 2\,(z_1 + c) \, . \, dz_1 = 0.$$

Статическій моментъ U_1 относительно оси $O_1 y_1$ напишется такъ:

$$U_1 = \int_{z_1}^{r-c} 2y \, . \, z_1 \, . \, dz_1 = -\,2 \int_{y}^{0} y^2 \, . \, dy - c \int_{z_1}^{r-c} 2y \, . \, dz_1$$

$$U_1 = \frac{2}{3} \, . \, y^3 - c \, . \, F_1 = U - c \, . \, F_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{К,}$$

т. е. *статическій моментъ площади обрѣза для круглаго сѣченія, взятый относительно хорды, равняется статическому моменту той же площади, взятому относительно діаметра, параллельнаго хордѣ, безъ произведенія площади обрѣза на разстояніе хорды отъ діаметра.*

г) Двутавровое сѣченіе балки (фиг. 179). Размѣры сѣченія —

$$h \times a \times h_1 \times a_1$$

Для продольнаго сѣченія KN на разстояніи z отъ нейтральнаго слоя статическій моментъ площади будетъ

$$U = a \, . \, (e - z) \, . \, \frac{e + z}{2} = a \, . \, \frac{e^2 - z^2}{2} \; ; 2b = a$$

Но ф-лѣ **Г** (см. § 36) будемъ имѣть.

$$T = V . \frac{e^2 - z^2}{2I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Л.}$$

Въ этой ф-лѣ z м. б. измѣняемъ отъ $z = e_1$ до $z = e$.

Въ точкѣ m, при $z = e = \frac{h}{2} \ldots\ T = 0$

Въ точкѣ c, когда $min\ z = e_1 = \frac{h_1}{2} \ldots \ldots max\ T = V \cdot \frac{e^2 - e_1^2}{2I}$

Не нужно думать, что парабола $m\,O_1\,p$, представляемая ур-іемъ Л, будетъ та же самая, которая была бы въ случаѣ прямоугольнаго сѣченія балки съ размѣрами $a \times h$: въ обоихъ этихъ случаяхъ величина I будетъ совершенно различна. Здѣсь мы будемъ имѣть

$$I = \frac{a \cdot h^3 + (a - a_1)\ h_1^3}{12};$$

тогда какъ въ случаѣ прямоугольнаго сѣченія имѣли бы одно только первое слагаемое въ выраженіи I.

Для сѣченія K_1N_1 на разстояніи z_1 отъ нейтральнаго слоя статическій моментъ площади будетъ писаться такъ (см. случай *б* этого §).

$$U_1 = a \cdot \frac{e^2 - e_1^2}{2} + a_1 \cdot \frac{e_1^2 - z_1^2}{2} = \frac{a_1}{2}\left[\frac{a \cdot e^2}{a_1} - \frac{a - a_1}{a_1} \cdot e_1^2 - z_1^2\right]$$

Если въ скобкѣ послѣдняго выраженія прибавимъ и вычтемъ e^2, тогда получимъ:

$$U_1 = \frac{a_1}{2}\left[\frac{a - a_1}{a_1}\ (e^2 - e_1^2) + e^2 - z_1^2\right]$$

Въ ф-лу Г (§ 36) надо будетъ внести теперь $2b = a_1$

$$T_1 = \frac{V}{2\,I}\left[(e^2 - z_1^2) + \frac{a - a_1}{a_1}\,(e^2 - e_1^2)\right]$$

Обозначимъ чрезъ

$$н^2 = \frac{a - a_1}{a_1} \cdot (e^2 - e_1^2)\,.$$

Это выраженіе всегда будетъ положительно, т. к. въ двутавровомъ сѣченіи $a > a_1$ и $e > e_1$, поэтому

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= T + T_2, \text{ гдѣ} \\ T_2 &= V \cdot \frac{a - a_1}{a_1} \cdot \frac{e^2 - e_1^2}{2\,I} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Е}$$

Т. к. величина T_2 не зависитъ отъ z_1, то графически полученный нами результатъ будетъ выражать собою, что парабола $m\,O_1 p$ (фиг. 179) напряженій T и парабола $c_2\,n\,d_2$ будутъ эквидистантны: на всей высотѣ h_1 разность между ихъ абсциссами будетъ одна и та же, а именно:

$$T_2 = c_1c_2 = O_1\,n = d_1d_2.$$

Max $T_1 = T_0$ получимъ, сдѣлавъ $z_1 = 0$, т. е. въ нейтральномъ слоѣ:

$$T_0 = \frac{V}{2I} \cdot \left[\frac{a}{a_1} . e^2 - \frac{a - a_1}{a_1} . e_1^2 \right] = \frac{\beta . V}{F}, \text{ гдѣ}$$

$$\beta = \frac{F}{2I} \left(\frac{a}{a_1} . e^2 - \frac{a - a_1}{a_1} . e_1^2 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{M}$$

Разсчетное ур-іе на сдвигъ двутавровой балки будетъ

$$S = \text{ или болѣе } \beta . \frac{V}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{L}$$

Вычисляя по ф-лѣ **м** величины коэф. β для сѣченій двутавровыхъ желѣзныхъ прокатныхъ балокъ, получимъ:

для сѣченія	балки	№ 10		$\beta = 33{,}3$
„	„	№ 20		$\beta = 40{,}5$
„	„	№ 30		$\beta = 46{,}2$
„	„	№ 40		$\beta = 52{,}6$

Так. обр. мы видимъ, что здѣсь величины β значительно отличаются отъ тѣхъ, которыя мы имѣли для сѣченій прямоугольнаго и круглаго, а потому провѣрка сѣченій двутавровыхъ балокъ относительно сдвига въ нейтральномъ слоѣ всегда является настоятельно необходимою.

д) Крестообразное сѣченіе балки. Если при крестообразномъ сѣченіи (фиг. 180) сдѣлать ту же разстановку размѣровъ, что и при двутавровомъ (фиг. 179), тогда выводъ, сдѣланный для двутавроваго сѣченія по существу дѣла м. б отнесенъ также и къ крестообразному сѣченію. Разница будетъ только въ томъ, что здѣсь $a < a_1$, а потому T_2 будетъ отрицательно, и кривая напряженій T_1 въ видѣ параболы $c_2 n d_2$ будетъ расположена *внутри* параболы $m\ O_1\ p$ (фиг. 180).

Если крестообразное сѣченіе будетъ составлено изъ 4-хъ угольниковъ, то при разсчетѣ ихъ скрѣпленій, опредѣляя тангенціальную силу по ф-лѣ **Б** (см. § 36), надо будетъ внести въ нее статическій моментъ полукреста, т. е. написать, что

$$Ж = \frac{M - M_1}{I} \left[a . \frac{e^2 - e_1^2}{2} + a_1 . \frac{e_1^2}{2} \right]$$

Вопросы для повторенія главы о сгибаніи тѣлъ.

Какъ происходитъ явленіе сгибанія. Что такое нейтральный слой, какъ онъ располагается, что будетъ съ нимъ, если направленіе дѣйствія нагрузки измѣнится, повернувшись относительно первоначальнаго на уголъ 180°? Вытяжка и усадка продольныхъ линій согнутаго бруса; ихъ напряженіе. Зачѣмъ требуется у сѣченія по крайней мѣрѣ одна ось симметріи? Какое положеніе должна занимать нагрузка относительно плоскости симметріи тѣла? Можетъ ли это направленіе быть повернуто на уголъ 180°, 90°, 60°, 45°, на произвольный уголъ, и когда можетъ? Какъ пользуются въ практикѣ сѣченіями безъ осей симметріи, примѣняя къ нимъ изложенную теорію. Что такое сгибающій *mom*, сѣкущее усиліе? Какъ пишется зависимость между рад. кривизны сѣченія и сгиб. *mom*, разсчетное уравненіе? Какъ пишутся моменты инерціи и модули для сѣченій прямоугольнаго сплошного и полаго, двутавроваго, круглаго сплошного и полаго, эллиптическаго? Въ чемъ заключается теорема Шведлера? Что выражаетъ собою знакъ сѣкущаго усилія, какимъ образомъ возможно измѣнить его на обратный, оставаясь въ томъ же сѣченіи и съ тою же нагрузкою? Какъ пишется дифференціальное уравненіе упругой линіи и выбираются его знаки? Какъ пишется интегральное уравненіе упругой линіи? Указать по атласу опасное сѣченіе и написать разсчетное ур-іе согнутой балки въ основныхъ случаяхъ нагруженія, чаще всего встрѣчающихся въ практикѣ: фиг. 103, 106, 109, 111, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 126, 127, 138. Какъ измѣняется величина безопасной нагрузки при переходѣ отъ одного случая нагруженія къ другому (нужно знать эти числовыя данныя наизусть (въ разбивку). Указать случаи нагруженія, при которыхъ упругая линія имѣетъ точки перегиба, при которыхъ опасное сѣченіе не одно, а 2, 3, 4

Согнутый брусъ, разрѣзанный на части продольными горизонтальными и вертикальными плоскостями; его крѣпость и стрѣла прогиба. *Max* и *min* напряженія сдвига въ продольныхъ плоскостяхъ согнутаго бруса; разсчетное ур-іе на сдвигъ при сгибаніи.

Указать по атласу, гдѣ находится при каждомъ способѣ нагруженія то сѣченіе, въ которомъ имѣется *max M*, *min M*, *max V*, *min V*, гдѣ $M = 0$, гдѣ тангенціальное напряженіе во всѣхъ точкахъ сѣченія равно нулю.

СВОДЪ

формулъ и главнѣйшихъ данныхъ изъ главы о сгибаніи.

Вытяжка (усадка) продольной линіи. $=$ Разстояніе линіи отъ нейтральнаго слоя. / Радіусъ кривизны сѣченія.

$i = z : r$ . . . . . 1. § 2.

Напряженіе продольной линіи (*кг.* на кв. *мм.*). $=$ Коэффиціентъ упругости 1-го рода. $\times$ Вытяжка (усадка) линіи

$h = E \cdot i$ . . . . 2. § 2

Max сгибающаго *mom* (*кг.-мм*). $=\dfrac{\text{Коэффиціентъ упругости 1-го рода}\times\text{Моментъ инерціи сѣченія}}{\text{Радіусъ кривизны сѣченія}}$ . . . **9.** § 3

$M=\dfrac{E\,.\,I}{r}$; *E* .. *кг.* на кв. *мм.*; *I*... *мм*^{4}.

Модуль сопротивленія сѣченія при сгибаніи (куб. *мм*). $=\dfrac{\text{Моментъ инерціи сѣченія относительно нейтральной линіи въ } мм^4}{\text{Разстояніе крайнихъ точекъ сѣченія отъ нейтральной линіи въ } мм.}$ . . . **12.** § 4.

$W=I:e$ . . . .

Допускаемое напряженіе при сгибаніи (*кг.* на кв. *мм*). $\geqq\dfrac{\textit{Max}\text{ сгибающаго момента въ } кг.\text{-}мм}{\text{Модуль сопротивленія въ } мм^3}$ **10; 11.** § 4.

$B_1 \geqq M:W_1;\ B_2 \geqq M:W_2$

Модуль сопротивленія прямоугольнаго сѣченія въ *мм*^{3}. $=\dfrac{1}{6}\times$ стороны, ||-й нейтральному слою $\times$ квадратъ стороны, ⊥-й нейтральному слою. . . . **16.** § 5.

$W=\dfrac{a\,.\,h^2}{6}$ . . . .

Модуль сопротивленія сплошного круглаго сѣченія въ *мм*^{3}.. $=\dfrac{\pi}{32}\times$ Діаметръ сѣченія въ кубѣ. . . . **19.** § 8.

$W=\dfrac{\pi}{32}\,.\,d^3=$ около $0{,}1\,.\,d^3$. . .

Модуль сопротивленія эллиптическаго сѣченія въ *мм*^{3}. $=\dfrac{\pi}{32}\times$ длина оси, совпадающей съ нейтральнымъ слоемъ $\times$ квадратъ длины оси, ⊥ нейтр слою. . . . **21.** § 9.

$W=\dfrac{\pi}{4}\,.\,a\,.\,b^2=\dfrac{\pi}{32}(2a)\,.\,(2b)^2$

Сѣкущее усиліе въ данномъ сѣченіи. = Алгебраическая сумма всѣхъ силъ по одну сторону даннаго сѣченія, включая въ ихъ число и сопротивленія опоръ, расположенныхъ съ той же стороны.

Сѣкущее усиліе въ данномъ сѣченіи	= Первая производная отъ сгибающаго момента по абсциссѣ сѣченія. $V = \frac{dM}{dx}$	. . . **24**. § 11.
Коэффиціентъ дифференціальнаго ур-ія	= Коэффиціентъ упругости 1-го рода. × Моментъ инерціи сѣченія $A = E \, . \, I$	. . **25.** § 12.
Дифференціальное ур-іе упругой линіи	.... $\pm A \, . \, \frac{d^2z}{dx^2} = \pm M$	**26**; § 12.

Положительный сгибающій. } тот .... загибаетъ } балку въ данномъ сѣченіи.
Отрицательный сгибающій } тот . . . разгибаетъ } балку въ данномъ сѣченіи.

Положительный радіусъ кривизны направленъ въ сторону положительной оси z-овъ.

Интегральное ур-іе упругой линіи

$$\pm A \, . \, (h - a \, . \, tg\,\alpha) = \int_0^a M \, . \, y \, . \, dy \quad . \; . \; . \quad \textbf{27}; \ \S\ 14.$$

Сопротивленіе опоры многопролетной балки	= Суммѣ сѣкущихъ усилій *справа* и *слѣва* отъ данной опоры. $K = V_л + V_п$	.... **I.** § 29.
Сѣкущее усиліе ненагруженнаго пролета многоопорной балки	= $\frac{\text{Разность опорныхъ моментовъ у послѣдующей и предыдущей опоры.}}{\text{Длина пролета.}}$ $V_н = \frac{M_к - M_{к-1}}{l}$	... **II.** § 30*а*
Сѣкущее усиліе нагруженнаго пролета	= Суммѣ сѣкущаго усилія ненагруженнаго пролета и сопротивленія опоры, если бы въ данномъ пролетѣ концы балки были свободны. $V_а = V_н + p$	...**IV.** § 30*б*

Стрѣла прогиба согнутаго призматическаго бруса. $= \text{Коэф.} \times \dfrac{\text{1-я степень нагрузки} \times \text{Кубъ длины бруса.}}{\text{Коэф. упругости 1-го рода} \times \text{Моментъ инерціи.}}$

$$f = c \cdot \frac{P \cdot l}{EI} \; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Безопасная стрѣла прогиба бруса. $= \text{Коэф.} \times \dfrac{\text{Допускаемое напряженіе} \times \text{Квадр. длины бруса.}}{\text{Коэф. упругости 1-го рода} \times \text{Высота сѣченія бруса.}}$

$$f_б = c_1 \cdot \frac{B \cdot l^2}{E \cdot (2e)} \; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тангенціальная сила въ продольной плоскости согнутаго бруса. $= \text{Статическій моментъ площади обрѣза} \times \dfrac{\text{Разность сгибающихъ моментовъ между данными поперечн. сѣченія.}}{\text{Моментъ инерціи сѣченія.}}$ ... **Б.** § 36.

$$Ж = U \cdot \frac{M - M_1}{I} \; \ldots\ldots\ldots$$

Тангенціальное напряженіе въ продольной или поперечной плоскости согнутаго бруса. $= \dfrac{\text{Статическій моментъ площади обрѣза} \times \text{Сѣкущее усиліе въ данномъ сѣч.}}{\text{Ширина площади обрѣза} \times \text{Моментъ инерціи сѣченія.}}$ ... **Г.** § 36.

$$T = \frac{U \cdot V}{2b \cdot I} \; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Допускаемое напряженіе на сдвигъ при сгибаніи $\overline{\overline{>}}$ Коэф $\beta \times \dfrac{\text{Сѣкущее усиліе.}}{\text{Площадь поперчн. сѣчен.}}$ ... **Д.** § 38.

$$S \overline{\overline{>}} \beta \frac{V}{F} \; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Прямоугольное сѣченіе ... $\beta = \frac{3}{2}$; круглое ... $\beta = \frac{4}{3}$; двутавровое ... $\beta =$ до **50**.

Max напряженія сдвига при сгибаніи — *всегда* въ нейтральномъ слоѣ бруса.

Напряженіе сдвига при сгибаніи = 0:
1) въ крайнихъ элементахъ каждаго поперечнаго сѣченія, наиболѣе удаленныхъ отъ нейтральнаго слоя;
2) во всѣхъ точкахъ поперечнаго сѣченія, гдѣ $V = 0$.

Е. Примѣненія теоріи сгибанія къ разсчету частей машинъ и балокъ.

39. **Общій видъ разсчетныхъ ур-ій.** Разсчетныя ур-ія призматическаго сгибаемаго тѣла мы получили въ такомъ видѣ:

$$B = \text{или болѣе } \frac{M}{W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I } (\S\ 4).$$

$$S = \quad „ \quad „ \quad \beta \frac{V}{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II } (\S\ 38).$$

Ур-іе I предусматриваетъ крѣпость растянутыхъ и сжатыхъ элементовъ сѣченія, наиболѣе удаленныхъ отъ нейтральнаго слоя, въ *опасномъ* сѣченіи призматическаго бруса, гдѣ сгибающій моментъ M имѣетъ свое *наибольшее алгебраическое значеніе.*

Ур-іе II предусматриваетъ крѣпость сдвига въ нейтральномъ слоѣ того поперечнаго сѣченія, гдѣ сѣкущее усиліе V имѣетъ свое наибольшее алгебраическое значеніе; β — коэф., зависящій отъ формы поперечнаго сѣченія.

Ур-ія I и II, какъ видно, относятся къ совершенно различнымъ точкамъ разныхъ сѣченій и должны быть удовлетворены *порознь.* Но бываютъ условія дѣйствія нагрузки, когда, удовлетворивши ур-іе I, мы имѣемъ чрезъ это ур-іе II уже само собою удовлетвореннымъ. Это бываетъ тогда именно, когда длина сгибаемаго тѣла значительно болѣе высоты его сѣченія.

Пусть допускаемыя величины напряженія для желѣза будутъ $B = 7$ и $S = 3{,}5$ *кг.* на кв. *мм.* Слѣдовательно, *возможное* отношеніе напряженій сгибанія и сдвига будетъ *два*, а если *дѣйствительно существующее* отношеніе напряженій сгибанія и сдвига, вычисляемое при сліяніи ф-лъ I и II, будетъ равно возможному отношенію или болѣе его, тогда это укажетъ, что при этихъ условіяхъ можно вести разсчетъ только по одной ф-лѣ I, а ф-л[illegible]I будетъ тогда сама собою удовлетворена. Выразимъ это, раздѣливши I на II.

$$\frac{B}{S} = \frac{M}{V} \cdot \frac{F}{W \cdot \beta} = \text{или болѣе } 2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{a}.$$

Пусть имѣемъ круглое сѣченіе съ діам. d, тогда

$$\frac{F}{W \cdot \beta} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 : \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{6}{d}.$$

Поэтому необходимо имѣть

$$\frac{6\ M}{V \cdot d} = \text{или болѣе } 2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{в}$$

Если брусъ ущемленъ однимъ концомъ, а нагрузка состоитъ изъ одного груза P, навѣшеннаго на свободномъ концѣ, то

$$max\ M = P \cdot l;\ max\ V = P.$$

Условіе **в** приводится къ такому

$$\frac{l}{d} = \text{ или болѣе } \frac{2}{6}, \text{ или } \frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots \text{ г.}$$

Это условіе выполняется даже и въ самыхъ короткихъ шарнирныхъ болтахъ, гдѣ $l : d$ всегда дѣлается болѣе $\frac{3}{4}$.

Если брусъ будетъ положенъ свободно на двѣ опоры и нагруженъ между ними нагрузкою Q, равномѣрно распредѣленной по всей длинѣ, то

$$max\ M = \frac{Q \cdot l}{8};\ max\ V = \frac{Q}{2},$$

условіе **в** этого § тогда приводится къ слѣдующему:

$$\frac{6}{d} \cdot \frac{Q \cdot l}{8} : \frac{Q}{2} = \text{ или болѣе } 2, \text{ или}$$

$$\frac{l}{d} = \text{ или болѣе } \frac{4}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ д.}$$

Если оба конца бруса защемлены, и нагрузка Q равномѣрно распредѣлена по всей длинѣ его, то

$$max\ M = \frac{Q \cdot l}{12};\ max\ V = \frac{Q}{2};$$

а по условію **в** требуется въ этомъ случаѣ

$$\frac{l}{d} = \text{или болѣе } 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ж.}$$

Это послѣднее условіе не всегда выполняется, напр., въ ползунныхъ болтахъ *), гдѣ встрѣчается $l : d$, иногда $= 1$, иногда $1,25$ чаще $1,5$, но рѣдко 2 и болѣе. Слѣд., во всѣхъ такихъ случаяхъ, когда условіе **ж** неудовлетворено, необходимо обращаться къ разсмотрѣнію ур-ія **II** и опредѣлять діам. болта именно по ф-лѣ **II**-й, а не **I**-й. Но это — довольно рѣдко встрѣчающійся при разсчетахъ случай, обыкновенно же длина разсчитываемаго на сгибаніе бруса въ весьма большое число разъ превосходитъ высоту его, тогда условія **г**, **д**, **ж**, бываютъ удовлетворены, и разсчетъ можно вести только по ф-лѣ **I**.

Исключеніе изъ этого правила составляютъ, какъ мы видѣли, балки двутавроваго сѣченія.

---

*) Хотя они дѣлаются почти всегда стальными, но и въ стали допускаемая величина $B : S$ тоже близка къ **2**.

40. **Брусья съ одинаковой крѣпостью въ нѣсколькихъ поперечныхъ сѣченіяхъ.** *А) Призматическія балки.* При разсчетѣ ихъ отыскивается такъ называемое *опасное* сѣченіе, въ которомъ абсолютная величина сгибающаго момента больше, чѣмъ во всѣхъ остальныхъ. Такой моментъ называютъ *разсчетнымъ* и ставятъ условіемъ, чтобы вызываемое имъ наибольшее напряженіе въ поперечномъ сѣченіи не превосходило допускаемаго напряженія. Во всѣхъ остальныхъ сѣченіяхъ наибольшія напряженія въ каждомъ изъ нихъ будутъ гораздо менѣе допускаемаго и балка будетъ въ нихъ излишне крѣпка, такъ что крѣпость всей балки въ такомъ случаѣ опредѣляетъ одно лишь *разсчетное* или *опасное* сѣченіе ея. Очевидно, что масса матеріала, излишне затраченнаго на постройку призматическаго бруса, будетъ въ этомъ случаѣ тѣмъ больше, чѣмъ длиннѣе брусъ.

Изучая главы *В* и *Г* теоріи сгибанія, мы обнаружили, что существуютъ такіе способы нагруженія призматической балки, когда у нея, въ различныхъ мѣстахъ ея длины, являются сразу *два, три* и даже *четыре* одинаково опасныхъ сѣченія, въ которыхъ абсолютная величина сгибающаго момента одна и та же, и въ то же время она наибольшая. Мы встрѣтили и такіе примѣры нагруженія, гдѣ наибольшій моментъ сохраняетъ свою величину постоянною въ цѣломъ рядѣ поперечныхъ сѣченій, непрерывно слѣдующихъ одно за другимъ на извѣстномъ протяженіи. Несомнѣнно, что эти именно способы нагруженія призматической балки д. б. признаны наиболѣе выгодными съ практической точки зрѣнія, т. к., примѣняя ихъ, мы будемъ производить затрату матеріала на постройку балки не изъ-за одного только сѣченія, а изъ-за нѣсколькихъ, одинаково опасныхъ и распредѣленныхъ по длинѣ балки болѣе или менѣе равномѣрно.

Призматическія балки съ *двумя* одинаково опасными сѣченіями мы имѣли.

а) въ § 26 (фиг. 120)—оба конца балки защемлены, равномѣрная нагрузка занимаетъ всю длину балки;

б) въ задачѣ 49 (фиг. 125)—одинъ конецъ балки защемленъ, на свѣшивающемся концѣ скомбинированы равномѣрная нагрузка и сосредоточенный грузъ, дѣйствующіе въ разныя стороны;

в) въ задачѣ 53 (фиг. 130)—оба конца балки свободны, нагрузка сдѣлана парою силъ;

г) въ задачѣ 68 (фиг. 152)—балка на трехъ опорахъ, нагруженіе двумя симметрично расположенными грузами (при опредѣленной величинѣ отношенія $a : l$, когда $M_Д$ болѣе M_B).

д) въ задачѣ 72 (фиг. 157)—оба конца балки защемлены, нагрузка—въ видѣ нѣсколькихъ сосредоточенныхъ грузовъ;

е) въ задачѣ 73 (фиг. 158)—балка на трехъ опорахъ, равномѣрная нагрузка распредѣлена по всей длинѣ пролета, но не одинакова въ обоихъ пролетахъ (случай, когда $M_D = M_F$);

ж) въ задачѣ 74 (фиг. 159)—балка на 4 опорахъ, длина пролетовъ одинакова, нагрузка распредѣлена равномѣрно по всей длинѣ балки (опасныя сѣч.—надъ средними опорами);

з) въ задачѣ 74 (фиг. 161) – балка на 4 опорахъ, длина пролетовъ одинакова, крайние изъ нихъ нагружены равномѣрно и одинаково (опасныя сѣч.—на длинѣ крайнихъ пролетовъ);

и) въ задачѣ 75 (фиг 164)—балка на 3 опорахъ, равномѣрная нагрузка, занимающая часть длины пролетовъ, расположена симметрично (случай, когда $M_F = M_L$ и оба они болѣе M_B), или же несимметрично (случай, когда $M_B = M_L$);

i) въ задачѣ 76 (фиг. 168)—оба конца балки защемлены, симметричная равномѣрная нагрузка занимаетъ часть длины балки;

к) въ задачѣ 77 (фиг. 170)—оба конца балки защемлены, нагрузка—въ видѣ пары силъ.

Въ случаѣ употребленія многоопорныхъ балокъ, кромѣ перечисленныхъ примѣровъ, возможно подыскать еще много и другихъ комбинацій въ распредѣленіи нагрузокъ, когда у балки будетъ 2 одинаково опасныхъ сѣченія.

Призматическія балки съ *тремя* одинаково опасными сѣченіями мы имѣли:

а) въ § 25 (фиг. 119) —оба конца балки защемлены, нагрузка—сосредоточенный грузъ въ срединѣ длины балки;

б) въ задачѣ 68 (фиг. 152) — балка на 3 опорахъ, нагрузка — по одному грузу въ каждомъ пролетѣ (случай, когда $M_B = M_D = M_E$).

в) въ задачѣ 75 (фиг. 164)—балка на 3 опорахъ, симметричная нагрузка равномѣрно распредѣлена на части длины пролета (случай когда $M_B = M_F = M_L$).

Балку съ *четырьмя* одинаково опасными сѣченіями мы встрѣтили въ задачѣ 77 (фиг. 170): оба конца балки защемлены, симметричная нагрузка сдѣлана парою силъ (случай, когда плечо $a = 0{,}293 \,.\, l$).

Балку съ нѣсколькими одинаково опасными сѣченіями, непрерывно слѣдующими одно за другимъ на извѣстномъ протяженіи, мы имѣли:

а) въ § 20 (фиг. 110)—концы балки свободны, равномѣрная нагрузка занимаетъ часть длины балки и прилегаетъ къ опорамъ;

б) § 23 (фиг. 115)—одинъ конецъ балки защемленъ, на свѣшивающемся концѣ дѣйствуетъ пара силъ;

в) въ § 24 (фиг. 117 и 118)—оба конца балки свободны, нагрузка—2 сосредоточенныхъ груза, величина каждаго изъ нихъ одинакова съ ближайшимъ сопротивленіемъ опоры;

г) въ задачѣ 50 (фиг. 127)—оба конца балки свободны, нагрузка—n одинаковыхъ симметричныхъ грузовъ (n—четное);

д) въ задачѣ 52 (фиг. 129)—оба конца балки свободны, нагрузка—сосредоточенный грузъ и равномѣрно-распредѣленная нагр.;

е) въ задачѣ 55 (фиг. 131)—оба конца балка свободны, на свѣшивающихся концахъ—2 сосредоточныхъ груза;

ж) въ зад. 61 (фиг. 137) — оба конца балки свободны, на свѣшивающихся концахъ — равномѣрная нагрузка;

з) въ зад. 62 и 63 (фиг. 138 и 139) — оба конца балки свободны, между опорами — въ двухъ мѣстахъ равномѣрная нагрузка на части длины.

Б. Комбинацiи изъ нѣсколькихъ призматическихъ брусьевъ. Какой бы способъ нагруженiя ни былъ, всегда можно разсчитать брусъ, у котораго была бы одинаковая крѣпость въ нѣсколькихъ различныхъ сѣченiяхъ. Для этого нужно только выполнять разсчитываемое тѣло не изъ одного призматическаго бруса, а изъ нѣсколькихъ, хотя бы и съ разной формой поперечнаго сѣченiя, но одинаковымъ образомъ подставленныхъ подъ дѣйствiе нагрузки; изъ нихъ нѣкоторые бруски будутъ итти па протяженiи всей длины балки, а другiе будутъ усиливать ея крѣпость только между тѣми сѣченiями, гдѣ это требуется. Если желаютъ сохранить при этомъ прямолинейность оси бруса, прерываемые бруски д. б. вводимы попарно и д. б. располагаемы симметрично относительно оси всей балки.

Разсчетъ такихъ балокъ проще всего дѣлается графически, пользуясь кривою моментовъ. Для примѣра пусть имѣемъ балку $A\ C$ (фиг. 181), свободно положенную на двѣ опоры и равномѣрно нагруженную; кривою моментовъ будетъ для нея парабола AD_1C; опаснымъ сѣченiемъ призматической балки было бы среднее сѣченiе DD_1. Разсчитывая балку изъ даннаго матерiала и предполагая ее выполнить съ нѣсколькими одинаково опасными сѣченiями опредѣляемъ величину модуля сопротивленiя балки для сѣченiя D. Пусть она будетъ W; тогда это значитъ, что

$$M_D = B\,.\,W$$

Предположимъ, что по условiямъ задачи возможно и удобно будетъ выполнить балку изъ пяти брусьевъ трехъ различныхъ поперечныхъ сѣченiй съ модулями $W_0\ W_1\ W_2$, причемъ

$$W_0 + 2\ W_1 + 2\ W_2 = \text{или болѣе}\ W,\ \text{равнаго}\ \frac{M_D}{B}\,.$$

Тогда ординату DD_1 (фиг. 181) принимаемъ за сумму модулей, стоящихъ въ 1-й части предыдущаго ур-iя, т. е.

$$DE = W_0;\ \ EF = 2\ W_1;\ FD_1 = 2\ W_2$$

Затѣмъ чрезъ точки F и E проводимъ линiи FK_1 и EH_1, параллельныя оси бруса, и продолжаемъ ихъ до пересѣченiя съ параболою AD_1C въ точкахъ H_1 и K_1; эти послѣднiя опредѣлятъ собою слѣва отъ средины бруса положенiе поперечныхъ сѣченiй HH_1 и KK_1, въ которыхъ могутъ быть прерваны брусья съ модулями W_1 и W_2. Так. обр.

брусъ, имѣющій модуль W_0, будетъ итти во всю длину балки; двѣ полосы съ модулемъ W_1 могутъ занимать длину, равную или большую $H_1 H_2$; а двѣ послѣднія полосы съ модулемъ W_2 могутъ итти по длинѣ, равной K_1K_2 или нѣсколько большей ея. При этомъ получится балка, составленная изъ пяти призматическихъ полосъ, имѣющая 5 равнокрѣпкихъ сѣченій, соотвѣтствующихъ точкамъ $H_1K_1D_1K_2H_2$ (фиг. 181).

Этимъ пріемомъ весьма часто пользуются въ практикѣ при выполненіи деревянныхъ балокъ и въ особенности металлическихъ, составляемыхъ изъ большого числа прокатныхъ желѣзныхъ или стальныхъ полосъ.

В. *Тѣла равнаго сопротивленія сгибанію. а.* Мы видѣли, как. обр. можно осуществить сгибаемое тѣло съ нѣсколькими одинаково крѣпкими поперечными сѣченіями. Съ теоретической точки зрѣнія не представляется никакихъ препятствій къ осуществленію и такой формы тѣла, при которой у него во всѣхъ сѣченіяхъ была бы одинаковая крѣпость, но практическое рѣшеніе этого вопроса приводитъ нерѣдко къ весьма сложнымъ и трудно осуществимымъ формамъ, т. ч. небольшой выигрышъ въ вѣсѣ и стоимости матеріала весьма часто вовсе не покрываетъ добавочныхъ расходовъ по обработкѣ тѣла, т. е. приданію поверхности тѣла требуемаго разсчетомъ вида, и съ экономической стороны точныя формы тѣлъ равнаго сопротивленія не представляютъ въ большинствѣ случаевъ никакой выгоды. Кромѣ того, всѣ эти формы тѣлъ отличаются, какъ увидимъ далѣе, большей податливостью, чѣмъ призматическія тѣла, т. е. даютъ при той же нагрузкѣ гораздо большій провѣсъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ практики это обстоятельство является весьма крупнымъ недостаткомъ тѣла, долженствующаго выносить на себѣ сгибающее дѣйствіе нагрузки, напр., когда такое тѣло входитъ въ составъ точнаго механизма (вѣсовъ, разрывной машины, парораспредѣлительнаго прибора и т. п.), или когда оно принадлежитъ вращающейся части и осуществляетъ собою ея геометрическую ось. Въ такихъ случаяхъ, если и рѣшаются придать сгибаемому тѣлу такую форму, которая близко подходитъ къ идеальной формѣ равнаго сопротивленія, ихъ разсчитываютъ съ напряженіемъ, значительно меньшимъ обычно допускаемаго. При этомъ непремѣнномъ условіи, разумѣется, и тѣло равнаго сопротивленія можно осуществить т. о., чтобы оно давало меньшую стрѣлку прогиба, чѣмъ другое тѣло, призматическое, разчитанное съ нормальною, неповышенною степенью надежности.

Если напряженіе въ крайнихъ точкахъ поперечнаго сѣченія, наиболѣе удаленныхъ отъ нейтральнаго слоя, обозначимъ чрезъ H, тогда ур-іе поверхности, ограничивающей тѣло равнаго сопротивленія при сгибаніи будетъ:

$$H = B = \text{пост. велич.},$$

гдѣ B — допускаемое напряженіе матеріала. Это ур-іе д. и. мѣсто въ

каждомъ изъ поперечныхъ сѣченій. На основаніи данныхъ § 4 теоріи сгибанія мы можемъ написать вмѣсто предыдущаго ур-ія слѣдующее.

$$\frac{M}{W} = B = \text{пост. велич.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{III}.$$

Въ этомъ ур-іи M есть функція x, т. е. разстоянія взятаго поперечнаго сѣченія отъ нѣкоторой постоянной точки, а W есть функція y и z, обоихъ размѣровъ поперечнаго сѣченія. Слѣд., въ общемъ видѣ ур-іе **III** будетъ такимъ:

$$\varphi(x,\ y,\ z) = B = \text{пост. велич.}$$

Чтобы составить себѣ нѣкоторое представленіе о формѣ тѣлъ равнаго сопротивленія и свойствахъ ихъ, разсмотримъ случай балки, одинъ конецъ у которой защемленъ въ стѣнѣ; на свободномъ концѣ ея пусть дѣйствуетъ сосредоточенный грузъ P (фиг. 182).

б. Сѣченіе прямоугольное. Размѣры сѣченія въ ущемленномъ мѣстѣ $a \times h$, въ произвольномъ сѣченіи $N - y \times z$ (фиг. 183); модули сопротивленія

$$W_A = \frac{a \cdot h^2}{6};\quad W_N = \frac{y \cdot z^2}{6};$$

сгибающіе моменты соотвѣтственно будутъ

$$M_A = P \cdot l;\quad M_N = P \cdot x.$$

Послѣ этого ур-іе **III** приметъ видъ:

$$\frac{6\,P \cdot l}{a \quad h^2} = \frac{6\,P \cdot x}{y \cdot z^2} = B = \text{пост. вел., или}$$

$$\frac{x}{y \cdot z^2} = \frac{l}{a \cdot h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{IV}$$

Это и есть ур-іе поверхности тѣла равнаго сопротивленія съ прямоугольнымъ сѣченіемъ.

Если сдѣлаемъ у тѣла равнаго сопротивленія на всей его длинѣ постоянную высоту, т. е. $z = h$, тогда ф-ла **IV** обращается въ такую:

$$\frac{x}{y} = \frac{l}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{IV,\ a}$$

Это есть ур-іе, опредѣляющее размѣры произвольнаго сѣченія N призмы съ треугольнымъ основаніемъ DEF (фиг. 184) въ планѣ. Вѣсъ ея будетъ составлять только половину того, который будетъ имѣть призматическая балка съ размѣрами $a \times h \times l$. На самомъ дѣлѣ эту теоретическую форму придется исправить, на длинѣ x_0 *притупить*, удовлетворяя условія крѣпости сдвига. Пусть для этого требуется минимальные размѣры сѣченія $h \times a_0$. Тогда съ одной стороны по ф-лѣ **II** (§ 39)

$$S = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a_0 \cdot h},$$

а съ другой — по ф-лѣ **IV,a**

$$\frac{x_0}{a_0} = \frac{l}{a}, \text{ откуда } x_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{a \cdot h \cdot S}$$

На такой длинѣ д. б. сдѣлано притупленіе клина, чтобы имѣть его крѣпкимъ по отношенію къ сдвигу. Кромѣ того, должна быть еще добавлена наружу длина b, составляющая половину той, на протяженіи которой нагрузка передается на клинъ, не вызывая смятія на его поверхности.

Если тѣло равнаго сопротивленія будетъ выполняться съ постоянной шириною, т. е. $y = a$. тогда ур-іе

$$\frac{x}{z^2} = \frac{}{h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{б.}$$

будетъ опредѣлять собою размѣры произвольнаго сѣченія N другого клина (фиг. 185), который въ вертикальной проекціи будетъ ограниченъ параболою GHI. Вѣсъ такого тѣла составлялъ бы $\frac{2}{3}$ отъ вѣса призматической балки съ размѣрами $a \times h \times l$. На самомъ дѣлѣ приходится и здѣсь выполнять притупленіе клина, руководствуясь ф-лами

$$S = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a \cdot h_0};\ \frac{x_0}{h_0^2} = \frac{l}{h^2}, \text{ откуда}$$

$$x_0 = l \cdot \left[\frac{3}{2} \quad \frac{P}{a \cdot h \cdot S}\right]^2$$

в. Сѣченіе круглое. Діам. въ ущемленномъ сѣченіи — d, въ произвольномъ N (фиг. 182) — y; модули сопротивленія

$$W_A = 0{,}1 \cdot d^3,\ \ W_N = 0{,}1 \cdot y^3$$

Вмѣсто ур-ія **IV** получимъ здѣсь слѣдующее:

$$\frac{x}{y^3} = \frac{l}{d^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{V.}$$

Это есть ур-іе кубическаго параболлоида вращенія (фиг. 186), ограничивающаго тѣло равнаго сопротивленія. Его вѣсъ былъ бы

$$Q = \gamma \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^l y^2 \cdot d\,x = \gamma \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l\,.$$

т е. такое тѣло на 40% было бы легче равнокрѣпкаго ему цилиндра съ діам. основанія d и длиною l. Для опредѣленія размѣровъ притупленнаго мѣста послужатъ ф-лы, аналогичныя съ таковыми же для предыдущаго случая:

$$S = \frac{4}{3} \cdot \frac{4\,P}{\pi \cdot d_0^2};\ \frac{x_0}{d_0^3} = \frac{l}{d^3}, \text{ откуда}$$

$$x_0 = l \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{4\,P}{\pi\, d^2 \cdot S}\right]^{\frac{3}{2}}$$

г. Стрѣла прогиба тѣла равнаго сопротивленія. Въ дифференціальномъ ур-іи упругой линіи (ф-лы *25* и *26* въ § 12) для тѣла равнаго сопротивленія величина момента инерціи сѣченія I будетъ перемѣнною. Поэтому чтобы упростить интегрированіе этого ур-ія, въ него вводятъ стрѣлу прогиба f_1 призматическаго тѣла одинаковой крѣпости съ тѣломъ равнаго сопротивленія.

Ур-іе упругой линіи, отнесенное къ сѣченію N (фиг. 182) тѣла равнаго сопротивленія, будетъ:

$$E.I.\frac{d^2z}{dx^2}=M=B.\frac{I}{0{,}5.z}, \text{ откуда}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{0{,}5.z}\cdot\frac{B}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

Знаки въ этомъ уравненіи будутъ разставлены такъ же, какъ и въ уравненіи *26* въ § 12, т. е. знакъ 1-й части будетъ зависѣть отъ знака у радіуса кривизны, а знакъ 2-й части — отъ знака у сгибающаго момента.

Въ ф-лу VI вмѣсто $B:E$ внесемъ величину этого отношенія изъ ф-лы 35 (§ 15):

$$\frac{B}{E}=\frac{3.e.f_1}{l^2}; \text{ тогда } \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{3f_1}{l^2}\cdot\frac{2e}{z}=\frac{3f_1}{l^2}\cdot\frac{h}{z}.$$

Расположимъ оси координатъ по схемѣ фиг. 182: начало ихъ — въ центрѣ тяжести C_1 конечнаго сѣченія балки въ ея несогнутомъ видѣ, ось C_1x—по горизонтали *влѣво*, ось C_1z—по вертикали внизъ.

Найдемъ стрѣлу прогиба для тѣла равнаго сопротивленія съ постоянной высотой (фиг. 184). Соблюдая правило знаковъ (§ 13) и принимая во вниманіе, что для этого тѣла $h=z$, получимъ

$$+\frac{d^2z}{dx^2}=+\frac{3f_1}{l^2}; \quad \frac{dz}{dx}=\frac{3f_1}{l^2}.x+\text{c}.$$

Въ сѣченіи A, при $x=l\ldots\frac{dz}{dx}=0=\frac{3f_1}{l}+c.$

Послѣ того

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3f_1}{l^2}(x-l).$$

$$z=\frac{3f_1}{l^2}\left(\frac{x^2}{2}-l.x\right)+c_1.$$

При $x=l$ въ сѣченіи $A\ldots z=0$, по этому $c_1=\frac{3}{2}f_1$.

Ур-іе упругой линіи будетъ ... $z=\frac{3}{2}.f_1.\left(\frac{l-x}{l}\right)^2.$

Стрѣлу прогиба h получимъ, сдѣлавши $x = 0$; тогда $h = \frac{3}{2} \cdot f_1$, т. е. *тѣло равнаго сопротивленія съ постоянной высотой сѣченія получаетъ стрѣлу прогиба на 50% большую противъ призматическаго тѣла равной съ нимъ крѣпости.*

Не трудно доказать, что тѣло равнаго сопротивленія съ постоянной шириной сѣченія получитъ стрѣлу прогиба на 100% большую противъ призматическаго бруса, а при кругломъ сѣченіи на 80% большую противъ равнокрѣпкаго съ нимъ цилиндра. Во многихъ случаяхъ практики эти свойства тѣлъ равнаго сопротивленія считаются цѣнными (въ пружинахъ и т. п.), въ другихъ же, наоборотъ, не только не цѣнятся, но считаются вредными (у вращающихся тяжелыхъ тѣлъ, у балокъ подъ основаніями машинъ и т. п.). Но въ общемъ примѣненіе этихъ тѣлъ довольно ограничено, и главнымъ образомъ потому, что, употребляя комбинаціи изъ призматическихъ тѣлъ съ нѣсколькими равноопасными сѣченіями, можно весьма близко подойти къ идеальной формѣ тѣла, не усложняя его устройства и сводя до *min* расходы по его изготовленію, т. е. расходы на пріобрѣтеніе матеріала для балки и на его обработку.

41. **Задачи. № 78.** Балка длиною l ущемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ, на свободномъ концѣ приложенъ сосредоточенный грузъ P. Тѣло равнаго сопротивленія имѣетъ прямоугольное поперечное сѣченіе; ширина его одинакова на всемъ протяженіи балки. Найти ур-іе упругой линіи и отношеніе стрѣлы прогиба f_1 этого тѣла къ провѣсу f равнокрѣпкаго съ нимъ призматическаго тѣла, имѣющаго ту же ширину сѣченія.

Отвѣтъ. Расположеніе осей координатъ—на фиг. 182:

$$z = 2f \cdot \left\{1 + 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot \frac{x}{l}\right\};\ f_1 : f = 2.$$

№ 79. Способъ нагруженія балки тотъ же, что и въ зад. № 78; но поперечное сѣченіе—круглое. Найти ур-іе упругой линіи тѣла равнаго сопротивленія и отношеніе стрѣлы прогиба f_2 этого тѣла къ провѣсу f равнокрѣпкаго съ нимъ цилиндра.

Отв. Расположеніе осей координатъ—на фиг. 182:

$$z = 1{,}8\, f \cdot \left\{1 + 1{,}5 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{5}{3}} - 2{,}5 \cdot \frac{x}{l}\right\};\ \ f_2 : f = 1{,}8.$$

№ 80. Балка длиною l ущемлена однимъ концомъ въ стѣнѣ, нагрузка Q распредѣлена по всей длинѣ балки равномѣрно. Тѣло равнаго сопротивленія имѣетъ прямоугольное сѣченіе, ширина его b по всей длинѣ тѣла одинакова, а высота h—перемѣнная. Найти ур-іе поверхности этого тѣла, ур-іе упругой линіи и отношеніе стрѣлы прогиба

его f_3 къ провѣсу равнокрѣпкаго съ нимъ призматическаго тѣла, имѣющаго ту же ширину сѣченія.

Отвѣтъ. Ур-іе поверхности при $b = b_0$ будетъ $\frac{x}{l} = \frac{h}{h_0}$.

Расположеніе осей координатъ—на фиг. 182:

$$z = 4f . \left\{1 + \frac{x}{l}\left(ln\frac{x}{l} - 1\right)\right\}; \; f_3 : f = 4.$$

№ 81. Способъ нагруженія балки тотъ же, что въ зад. № 80; тѣло равнаго сопротивленія имѣетъ прямоугольное сѣченіе, высота его h по всей длинѣ тѣла одинакова, и ширина b — перемѣнная. Найти ур-іе поверхности этого тѣла, ур-іе упругой линіи и отношеніе стрѣлы прогиба его f_4 къ провѣсу равнокрѣпкаго съ нимъ призматическаго тѣла, имѣщаго ту же высоту сѣченій

Отвѣтъ. Ур-ніе поверхности при $h = h_0$ будетъ ... $\frac{x^2}{l^2} = \frac{b}{b_0}$.

Расположеніе осей координатъ—на фиг. 182.

$$z = 2f . \left(1 - 2 . \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right); \; f_4 : f = 2.$$

Деревянныя балки.

А. Балки изъ круглыхъ брусьевъ.

42. **Одинарныя круглыя балки.** Пусть имѣемъ n деревянныхъ круглыхъ брусьевъ, воспринимающихъ на себя нагрузку въ одинаковыхъ условіяхъ. Моментъ въ опасномъ сѣченіи балокъ — M, общій у всѣхъ балокъ діам.—d, моментъ инерціи сѣченія одной балки—I, ея модуль сопротивленія при сгибаніи—W, допускаемое напряженіе—B. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} M &= n . B . W \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ W &= I : \frac{d}{2} = \frac{\pi}{32} . d^3 = \text{ок. } 0{,}1 . d^3 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{116.}$$

Таблица 26-я.

Модули сопротивленія круглыхъ сѣченій.

d	I	W	d	I	W	d	I	W
въ сантиметрахъ.			въ сантиметрахъ.			въ сантиметрахъ.		
15	2485	331	25	19175	1534	35	73662	4209
16	3217	402	26	22432	1726	36	82448	4580
17	4100	482	27	26087	1932	37	91998	4973
18	5153	573	28	30172	2155	38	102354	5387
19	6397	673	29	34719	2394	39	113561	5824
20	7584	785	30	39761	2651	40	125664	6283
21	9547	909	31	45333	2925	41	138709	6766
22	11499	1045	32	51472	3217	42	152745	7274
23	13737	1194	33	58214	3528	43	167820	7806
24	16286	1357	34	65597	3859	44	183984	8363

По заданному M изъ ф-лы **116** опредѣляютъ $n \, . \, W$, а затѣмъ далѣе вопросъ рѣшается различно: *a*) если n дано, опредѣляютъ прямо W и помощью табл. 26 останавливаются на той или другой величинѣ діаметра, у котораго модуль будетъ болѣе разсчетнаго; *b*) если n не дано, и можно его выбирать, самый выборъ дѣлаютъ, соображаясь или съ условіями передачи нагрузки на балки, или съ ихъ относительной стоимостью, или, наконецъ, съ величиною стрѣлы прогиба, которая получится у балокъ съ тѣмъ или другимъ діаметромъ.

Величина допускаемаго напряженія B при разсчетѣ деревянныхъ балокъ берется такою:

для одинарныхъ балокъ . . $B = 0{,}8 - 1{,}0$ *кг.* на кв. *мм.*

„ срощенныхъ „ . . $B = 0{,}6 - 0{,}75$ „ „ „ „

Для перехода отъ модуля, выраженнаго въ *смт.*, къ модулю, выраженному въ *мм.*, будетъ служить слѣд. ф-ла:

$$W \text{ въ } смт. \times 1000 = W \text{ въ } мм.$$

43. **Выраженіе момента инерціи относительно произвольной оси.** Выведемъ общее выраженіе момента инерціи площади относительно произвольной оси cc (фиг. 187) въ функціи момента инерціи относительно оси y, ей ||-й и проходящей чрезъ ц. т. сѣченія.

$$I_c = \int \varrho^2 . dF; \quad I_y = \int z^2 . dF; \quad \varrho^2 = a^2 + z^2 + 2a . z.$$

Умножимъ всѣ члены этого послѣдняго р-ва на dF и возьмемъ интегралъ, распространяя его на всю площадь сѣченія:

$$I_c = a^2 . F + I_y + 2a \int z . dF; \text{ но}$$

$$\int z . dF = F . z_0 = 0, \text{ поэтому}$$

$$I_c = I_y + F . a^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{117.}$$

Эта ф-ла совершенно аналогична съ ф-лою **90** (§ 53,b, часть I-я) и показываетъ, что *моментъ инерціи площади относительно произвольной оси, лежащей въ плоскости сѣченія, = моменту инерціи, относительно оси, ей ||-й и проходящей чрезъ ц. т. сѣченія, плюсъ произведеніе площади на квадратъ разстоянія осей.*

44. **Срощенныя балки изъ круглыхъ брусьевъ.** *a) Модуль сопротивленія при двухъ балкахъ одинаковаго діаметра.* Пусть имѣемъ два круглыхъ бруса A и $Б$ (фиг. 188) одинаковаго діам. d, накрѣпко срощенныхъ одинъ съ другимъ и сгибаемыхъ, какъ одна цѣлая балка въ плоскости $AБ$.

Тогда нейтральнымъ слоемъ у этихъ балокъ будетъ линія yy, касательная къ обѣимъ окружностямъ въ точкѣ O. Моментъ инерціи такого сѣченія напишется по общей ф-лѣ **117** слѣд. обр.

$$I_y = 2 . \left[I_x + \frac{\pi}{4} d^2 . \frac{d^2}{4} \right]$$

$$I_y = 2 \left[\frac{\pi . d^4}{64} + \frac{\pi . d^4}{16} \right] = \frac{\pi . d^4}{64} . 10. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{a.}$$

Разстояніе крайнихъ точекъ сѣченія отъ нейтральной линіи

$$e = d.$$

Поэтому модуль сопротивленія срощенныхъ балокъ будетъ

$$W_1 = I_y : d = \frac{5\pi}{32} . d^3 = 5 . W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{b,}$$

т. е. *модуль сопротивленія срощенной балки изъ двухъ одинаковыхъ круглыхъ брусьевъ въ пять разъ болѣе, чѣмъ модуль сопротивленія одинарнаго бруса.* Но для этого необходимо прочно связать обѣ балки, чтобы у нихъ былъ, дѣйствительно, одинъ общій нейтральный слой Oy, а не два отдѣльныхъ $Бк$ и $Ал$, какъ это было бы въ случаѣ двухъ брусьевъ, свободно положенныхъ одинъ на другой и ничѣмъ не связанныхъ между собою. Не разсчитывая на полное совершенство такого скрѣпленія, допускаемое напряженіе при разсчетѣ срощенныхъ балокъ берутъ на 15—20% менѣе, чѣмъ въ случаѣ одинарныхъ брусьевъ.

Так. обр моментъ, выдерживаемый срощенной балкой, будетъ $M_1 = 0{,}75 \,.\, B \,.\, W_1$, а одинарнымъ круглымъ брусомъ — $M = B \,.\, W$; отношеніе моментовъ

$$\frac{M_1}{M} = \frac{0{,}75 \,.\, W_1}{W} = 0{,}75 \,.\, 5 = 3^3/_4$$

т. е. *срощенная балка изъ двухъ одинаковыхъ круглыхъ брусьевъ въ состояніи выдержать, примѣрно, въ* **4** *раза большій сгибающій моментъ, чѣмъ каждый изъ брусьевъ, ее составляющихъ.*

б) Модуль сопротивленія при двухъ балкахъ неодинаковаго діаметра. Пусть имѣемъ два круглыхъ бруса A и $Б$ (фиг. 189) неодинаковаго діаметра, накрѣпко срощенныхъ одинъ съ другимъ и сгибаемыхъ, какъ одна цѣлая балка въ плоскости $AБ$. Пусть діам. меньшаго изъ брусьевъ будетъ d, а большаго $m.d$, гдѣ $m > 1$. Въ такомъ случаѣ нейтральный слой уже не будетъ расположенъ на срединѣ высоты балки. Онъ будетъ проходить чрезъ ц. т. всего сѣченія составной балки. Площадь сѣченія верхней балки $Б$ есть $\pi . d^2 : 4$, а нижней — $\pi . m^2 . d^2 : 4$, отношеніе ихъ равно m^2; слѣд. для опредѣленія положенія ц. т. O надо длину $AБ$ раздѣлить въ отношеніи $1 : m^2$. Обозначимъ разстояніе ц. т. всего сѣченія отъ центровъ сѣченій отдѣльныхъ брусьевъ чрезъ a_1 и a_2, тогда

$$OA = a_1;\quad OБ = a_2;$$

$$AБ = a_1 + a_2 = d.\frac{m+1}{2};\quad a_2 : a_1 = m^2,$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{d}{2}\cdot\frac{m+1}{m^2+1} \\ a_2 &= \frac{d}{2}\cdot\frac{m^3+m^2}{m^2+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{г.}$$

Если вогнутая сторона балки находится сверху, а выпуклая снизу, то разница между этою балкою и предыдущею будетъ въ слѣдующемъ: у балки изъ двухъ одинаковыхъ по величинѣ брусьевъ волокна верхняго бруса были только сжаты, а нижняго — только растянуты; у балки же изъ неодинаковыхъ брусьевъ часть нижняго изъ нихъ, лежащая выше нейтральнаго слоя будетъ сжата, а ниже — растянута.

Найдемъ теперь, которая изъ крайнихъ точекъ сѣченія D и E будетъ наиболѣе удаленною отъ нейтральнаго слоя и поэтому наиболѣе опасною точкою сѣченія:

$$\left.\begin{aligned} OE &= e_1 = a_1 + \frac{m.d}{2} = \frac{d}{2}\cdot\frac{m^3+2m+1}{m^2+1} \\ OD &= e_2 = a_2 + \frac{d}{2} = \frac{d}{2}\cdot\frac{m^3+2m^2+1}{m^2+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{д.}$$

Сравненіе этихъ двухъ величинъ показываетъ, что

если $m > 1$, то e_2 всегда $> e_1$,

т. е. *наиболѣе напряженными элементами сѣченія срощенной балки, состоящей изъ двухъ брусьевъ неравнаго діам., всегда будутъ крайніе элементы меньшаго изъ двухъ брусьевъ.*

Теперь нужно найти выраженіе *mom* инерціи составной балки относительно оси Oy; для этого необходимо вычислить порознь моменты инерціи верхняго и нижняго сѣченій относительно той же оси и сложить ихъ. Каждое изъ этихъ вычисленій дѣлается по общей ф-лѣ **117** (§ 43):

$$I_{ь} = \frac{\pi}{64}\ d^4;\quad I_{yБ} = I_{ь} + \frac{\pi}{4}\cdot d^2\ a_2^2\cdot$$

$$I_{yБ} = \frac{\pi}{64}\cdot d^4 + \frac{\pi}{16}\cdot d^4 . m^4 . \left(\frac{m+1}{m^2+1}\right)^2$$

$$I_{л} = \frac{\pi}{64} . m^4 . d^4;\quad I_{yА} = I_{л} + \frac{\pi}{4} . m^2 . d^2 . a^2_1$$

$$I_{yА} = \frac{\pi}{64} . m^4 . d^4 + \frac{\pi}{16} . m^2 . d^4 . \left(\frac{m+1}{m^2+1}\right)^2 .$$

Моментъ инерціи всего сѣченія составной балки будетъ:

$$I_{АБ} = I_{yА} + I_{yБ} = \frac{\pi}{64}\cdot d^4\left[1 + m^4 + 4\,m^2 . \frac{(m+1)^2}{m^2+1}\right] \quad . . . \text{ж.}$$

Модуль сопротивленія всего сѣченія получимъ, дѣля моментъ инерціи его (ф-ла *ж*) на разстояніе наиболѣе напряженныхъ элементовъ отъ нейтральнаго слоя, т. е. на e_2, а не e_1:

$$W_2 = I_{АБ} : e_2 = \frac{\pi}{32} . d^3 . \frac{(1+m^4)(m^2+1) + 4\,m^2 . (m+1)^2}{m^3 + 2m^2 + 1} \quad . . . \text{з.}$$

Если $m = 1$, т. е. брусья одинаковаго діам, тогда

$$e_1 = e_2 = \frac{d}{2},$$

$$I_{АВ} = \frac{\pi}{64} . d^4 . \left[1 + 1 + \frac{4 . 4}{2}\right] = \frac{\pi}{64} . d^4 . 10$$

$$W_2 = \frac{\pi}{32} . d^3 . \frac{2 . 2 + 4 . 4}{1 + 2 + 1} = \frac{\pi}{32} . d^3 . 5,$$

т. е. все выходитъ согласно съ данными случая *а)* этого §.

Если $m = o$, т. е. 2-й брусъ отсутствуетъ, тогда мы должны получить ф-лы, которыя имѣли для одинарнаго бруса:

из форм. д . . . . $e_1 = e_2 = \frac{d}{2}$

из форм. ж. . . $I = \frac{\pi}{64} . d^4$

» з . . . . $W = \frac{\pi}{32} . d^3.$

Такъ какъ выводъ всѣхъ ф-лъ этого случая сдѣланъ независимо отъ того будетъ-ли m больше или меньше 1, поэтому примѣненіе ихъ возможно при какомъ угодно значеніи m. Въ табл. 27-й даны всѣ нужныя величины для 5 различныхъ соотношеній между діам. брусьевъ.

Таблица 27-я.

Разсчетныя величины для балокъ изъ двухъ неравныхъ круглыхъ брусьевъ: $d_1 = m . d$.

m	$F : \frac{\pi}{4} . d^2$	$e_1 : d.$	$e_2 : d$	$I : \frac{\pi}{64} . d^4$	$W : \frac{\pi}{32} . d^3$
1,1	2,21	1,025	1,075	12,12	5,64
1,2	2,44	1,051	1,149	14,50	6,31
1,3	2,69	1,077	1,223	17,11	7,01
1,4	2,96	1,105	1,295	20,10	7,76
1,5	3,25	1,135	1,365	23,07	8,45

Такъ какъ у этихъ балокъ e_1 не равно e_2, и дерево слабѣе сопротивляется сжатію, чѣмъ растяженію, поэтому въ такихъ балкахъ сжатою стороною ихъ слѣдуетъ дѣлать ту, элементы которой прилегаютъ ближе къ нейтральному слою.

в) Модуль сопротивленія при трехъ балкахъ равнаго діаметра, нарощенныхъ въ высоту (фиг. 190). Пусть имѣемъ 3 круглыхъ бруса одинаковаго діам. — A, $Б$, $Б_1$, накрѣпко срощенныхъ въ одно цѣлое и сгибаемыхъ въ плоскости $ББ_1$. Нейтральнымъ слоемъ будетъ линія yA. Наиболѣе напряженные элементы сѣченія будутъ отстоять отъ нейтральнаго слоя на разстояніе

$$e = AD = AE = \frac{3}{2} . d.$$

Моментъ инерціи площади $Б$ относительно оси Ay будетъ:

$$I_{yБ} = I_к + \frac{\pi}{4} . d^2 . d^2 = \frac{17}{64} . \pi . d^4.$$

Поэтому моментъ инерціи всего сѣченія составной балки напишется такъ:

$$I_{АББ_1} = I_{yA} + 2 I_{yБ} = 35 . \frac{\pi . d^4}{64} \quad \ldots\ldots\ldots \text{и.}$$

Модуль сопротивленія всей балки

$$W_3 = I_{АББ_1} : \frac{3}{2} \cdot d = \frac{35}{3} \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{32} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{i.}$$

Такимъ образомъ видно, что эта комбинація выгоднѣе, чѣмъ балки, срощенныя изъ двухъ брусьевъ, равнаго или неравнаго діаметра.

г) *Разсчетъ скрѣпленій для круглыхъ срощенныхъ балокъ.* Отъ срощенныхъ брусьевъ мы требовали, чтобы они, образовавъ балку, сгибались, какъ одно цѣлое, съ общимъ нейтральнымъ слоемъ. Это возможно будетъ только въ такомъ случаѣ, когда между срощенными брусьями не будетъ никакого скольженія, т. е. когда будутъ введены въ соединеніе добавочныя части, препятствующія сдвигу одного бруса относительно другого. Такими добавочными частями при балкахъ изъ круглыхъ брусьевъ являются обыкновенно болты, стягивающіе брусья въ плоскости дѣйствія нагрузки. Эти болты разсчитываются ни въ какомъ случаѣ *не на сдвигъ*, а на предварительную затяжку, хотя направленіе дѣйствія силъ сдвига въ мѣстѣ стыка брусьевъ и $\perp$-но къ оси болтовъ. Затяжка болтовъ выбирается такою, чтобы возбужденная ею сила тренія на стыкѣ была болѣе тангенціальной силы $Ж$, дѣйствующей въ мѣстѣ стыка.

Пусть обозначаютъ

δ — діаметръ болтовъ,

Z — напряженіе, съ которымъ они будутъ затянуты,

c — число болтовъ,

f — коэффиціентъ тренія на стыкѣ брусьевъ. Тогда

$$\frac{\frac{\pi}{4}\delta^2 \cdot Z \cdot f \cdot c}{Ж} = 2 - 2{,}5.$$

Выбираютъ при разсчетѣ: $\delta = 25 - 35$ *мм.*; $Z = 5 - 4$ *кг.* на кв. *мм.* $f = 0{,}2 - 0{,}25$

Величина $Ж$ напишется такъ (см. ф-лу **Б** въ § 36).

$$Ж = U \cdot \frac{M - M_1}{I} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{Б.}$$

При разсчетѣ балки, срощенной изъ двухъ брусьевъ равнаго діам., вносится въ ф-лу **Б** моментъ инерціи для всего сѣченія *):

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \cdot \mathbf{10},$$

*) Обычная ошибка при употребленіи этой ф-лы—внесеніе $\frac{\pi}{64} \cdot d^4$ вмѣсто I.

а статическій моментъ — для половины сѣченія, такъ какъ $Ж$ опредѣляется въ нейтральномъ слоѣ·

$$U = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi}{8} \cdot d^3;$$

такъ что въ этомъ случаѣ

$$Ж = 0{,}8 \cdot \frac{M - M_1}{d}.$$

Въ случаѣ двухъ брусьевъ разнаго діаметра, при опредѣленіи U слѣдовало бы взять статическій моментъ площади обрѣза, покрытой на фиг. 189 штрихами на крестъ, но вмѣсто этого для упрощенія вычисленія можно брать слѣдующее выраженіе:

$$U = \text{прибл.}\ \frac{\pi}{4} \cdot m^2 \cdot d^2 \cdot a_1.$$

При этомъ a_1 надо брать по ф-лѣ г, а моментъ инерціи I — по ф-лѣ ж (§ *44 б*).

Въ случаѣ балки, срощенной изъ трехъ одинаковыхъ брусьевъ, сдвигъ можетъ происходить въ двухъ стыкахъ; для устраненія этого двойного сдвига служатъ одни и тѣ же болты. При опредѣленіи $Ж$ надо брать

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot 35; \quad U = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot d = \frac{\pi}{4} \cdot d^3;$$

$$Ж = \frac{16}{35} \cdot \frac{M - M_1}{d}.$$

45. **Задачи. № 82.** Деревянную балку 400 *мм.* діам. замѣнить другою изъ двухъ одинаковыхъ срощенныхъ брусьевъ.

Для данной балки

$$M = B_0 \cdot W_0,$$

для срощенной балки

$$M = B_1 \cdot W_1 = 0{,}8 \quad B_0 \cdot W_1,$$

допуская условно, что $B_1 = 0{,}8 \cdot B$; откуда

$$W_0 = 0{,}8 \cdot W_1 = 0{,}8 \cdot 5 \cdot W = 4W,$$

если W — модуль каждаго изъ сращиваемыхъ брусьевъ. По табл. 26-й

$$W_0 = 6283\ см^3,\ \text{поэтому}\ W = 6283 : 4 = 1321.$$

Ближайшій бо́льшій модуль въ табл. 26-й будетъ *1357*, соотвѣтственный діам. брусьевъ 240 *мм.*

Не считая вѣса скрѣпленій, отношеніе вѣса составной балки къ вѣсу цѣлой будетъ:

$$2 \cdot \left(\frac{240}{400}\right)^2 = 0{,}72.$$

Отношеніе стрѣлъ прогиба этихъ двухъ балокъ будетъ прямо пропорціонально разсчетнымъ напряженіямъ ихъ и обратно пропорціонально ихъ высотамъ:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{B_1}{B_0} \cdot \frac{d_0}{2d_1} = 0{,}8 \cdot \frac{400}{2.240} = 0{,}667.$$

№ 83. Ту же самую деревянную балку 400 *мм.* діам. замѣнить другою изъ двухъ неодинаковыхъ срощенныхъ брусьевъ съ отношеніемъ діам. $m = 1{,}2$

По табл. 27 имѣемъ, что модуль срощенной балки при $m = 1{,}2$ будетъ $6{,}31 \cdot W$, гдѣ W — модуль меньшаго изъ сращиваемыхъ брусьевъ; тогда

$$W_0 = 6283 = 0{,}8 \cdot 6{,}31\ W = 5{,}048\ W,$$

$$W = 6283 : 5{,}048 = \text{ок. } 1225\ см.^3 = \frac{\pi}{32} \cdot d^3,$$

откуда $d = 232$ *мм*; $d_1 = 1{,}2 \cdot 232 = 278$ *мм.*

Отношеніе вѣса новой балки (срощенной) къ вѣсу цѣлой

$$\frac{232^2 + 278^2}{400^2} = 0{,}82,$$

т. е. такая балка выходитъ немного тяжелѣе предыдущей, составленной изъ одинаковыхъ брусьевъ. По табл. 27-й

$$I_1 = 14{,}5 \cdot \frac{\pi\, d^4}{64} = 14{,}5 \cdot W \cdot \frac{d}{2} = 14{,}5 \cdot 1225 \cdot 11{,}6,$$

$$I_1 = 206045\ см.^4;\ I_0 = \frac{\pi}{64} \cdot 40^4 = 125664,$$

$$f_1 : f_0 = I_0 : I_1 = 0{,}61.$$

№ 84. При предварительномъ разсчетѣ балки, срощенной изъ двухъ брусьевъ разнаго діаметра, приближенно было допущено, что нейтральный слой проходитъ не чрезъ ц. т. сѣченія, а чрезъ точку касанія обоихъ круговъ. Выяснить величину ошибки, допущенной въ вычисленіи модуля сопротивленія (фиг. 191).

$$I_{zБ} = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \cdot 5$$

$$I_{zA} = \frac{\pi}{64} \cdot m^4 \cdot d^4 + \frac{\pi}{4} \cdot m^2 \cdot d^2 \cdot \left(\frac{m \cdot d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \cdot 5m^4$$

$$I_{АБ} = I_z + I_{zБ} = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \cdot 5(1 + m^4).$$

$$W = I_{АБ} : md = \frac{\pi \cdot d^3}{64} \cdot 5 \cdot \frac{1 + m^4}{m}$$

$$A = W : \frac{\pi}{32} . d^3 = \frac{5}{2} . \frac{1+m^4}{m}.$$

При $m = 1{,}1$	1,2	1,3	1,4	1,5
$A = 5{,}6$	**6,4**	7,4	8,6	10,1

Сравнивая эти данныя съ тѣми, которыя приведены въ табл. 27-й, видимъ, что при m до 1,2 упрощенный, неправильный способъ вычисленія даетъ результаты, весьма близкіе къ истиннымъ, а далѣе этого они весьма быстро расходятся.

№ 85. Балка срощена изъ трехъ одинаковыхъ брусьевъ такъ, какъ показываетъ фиг. 192. Найти модуль сопротивленія такой балки, связанной въ одно цѣлое и нагруженной въ плоскости CD.

$AБ = БC = CA = d$. Пусть ц. т. сѣченія будетъ въ E. Очевидно, точка E должна дѣлить высоту CD въ отношеніи $1:2$.

$$CD = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{d}{2} . \sqrt{3}$$

$$DE = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{d}{6} \sqrt{3} = d : 2\sqrt{3}$$

$$CE = 2 . DE = \frac{d}{3} \cdot \sqrt{3} = d : \sqrt{3}.$$

Линія Ey, $\perp$-я CD, будетъ нейтральнымъ слоемъ

$$I_{yC} = \frac{\pi}{64} . d^4 + \frac{\pi}{4} . d^2 . \frac{d^2}{3} = \frac{\pi}{64} . d^4 . \frac{19}{3}$$

$$I_{yA} = \frac{\pi}{64} . d^4 + \frac{\pi}{4} . d^2 . \frac{d^2}{12} = \frac{\pi}{64} . d^4 . \frac{7}{3}$$

$$I_{AБC} = I_{yC} + 2 . I_{yA} = \frac{\pi . d^4}{64} . \frac{19 + 2 . 7}{3} = \frac{\pi}{64} . d^4 . \mathbf{11}$$

$$EF = FC + CE = \frac{d}{2} + \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d}{2} . 2{,}154$$

$$W = I_{AБC} : EF = \frac{\pi . d^3}{32} . \frac{11}{2{,}154} = \frac{\pi . d^3}{32} . \mathbf{5{,}1},$$

т. е. модуль сопротивленія балки, срощенной изъ трехъ одинаковыхъ круглыхъ брусьевъ такъ, чтобы каждый изъ нихъ касался двухъ другихъ, получается почти совершенно такимъ же, какъ и у балки, срощенной изъ двухъ только брусьевъ, нарощенныхъ одинъ на другой въ высоту; а между тѣмъ при трехъ брусьяхъ вѣсъ балки получается 1,5 раза болѣе, чѣмъ тамъ, и скрѣпленія трехъ балокъ потребуютъ для своего выполненія большихъ затратъ, чѣмъ при двухъ балкахъ. Так. обр. эта комбинація изъ трехъ брусьевъ выходитъ нераціональною.

№ 86. Срощенная балка составлена изъ двухъ круглыхъ брусьевъ, оси которыхъ по направленію дѣйствія нагрузки удалены одна отъ другой на разстояніе $2a$, большее d (фиг. 193 и 194); между брусьями заложены куски дерева C, D...., и вся система стянута болтами въ одно цѣлое. Предполагая, что при сгибаніи такой *прорѣзной балки* нейтральнымъ слоемъ будетъ линія Oy, найти W.

Обозначимъ $\frac{a}{d} = \kappa$, тогда

$$I_{yA} = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot a^2 = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 (1 + 16 \cdot \kappa^2)$$

$$e = OL = \frac{d}{2} + a = \frac{d}{2}(1 + 2 \cdot \kappa)$$

$$W = 2 \cdot I_{yA} : e = \frac{\pi \ d^3}{32} \cdot \frac{1 + 16 \cdot \kappa^2}{0.5 + \kappa}$$

$$W : \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \mathbf{A} = \frac{1 + 16 \cdot \kappa^2}{0,5 + \kappa}.$$

Если сдѣлаемъ $\kappa = 0,5$, это будетъ обозначать, что брусья наложены одинъ на другой безъ промежутка между ними, и тогда мы должны получить модуль, который имѣли уже ранѣе (§ *44 a*, ф-ла **b**):

$$\mathbf{A} = \frac{1 + 16 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 5.$$

Затѣмъ при дальнѣйшемъ увеличеніи κ, начиная съ $0,5$, величина коэф. **A** быстро возрастаетъ. Вычислимъ **A** для тѣхъ значеній κ, которыя возможно осуществить, употребляя на прокладки C, D.... (фиг. 194) обрубки тѣхъ же брусьевъ:

$\kappa = 0,6$	0,7	0,8	0,9
$\mathbf{A} = 6,15$	7,33	8,65	9,97

Если бы сдѣлать $\kappa = 1$, то

$$\mathbf{A} = \frac{1 + 16}{0,5 + 1} = \frac{34}{3}.$$

Когда мы имѣли балку изъ трехъ брусьевъ, срощенныхъ въ высоту, величина **A** была $= 35 : 3$ (см. § *44 b*, ф-ла **i**).

Это показываетъ, какое сравнительно малое участіе въ общемъ сопротивленіи принадлежитъ среднему брусу, элементы сѣченія у котораго весьма близко прилегаютъ къ нейтральному слою. Выбросивши средній брусъ, мы получили уменьшеніе модуля въ отношеніи $34 : 35$, т. е. менѣе 3%, а вѣсъ и число потребныхъ брусьевъ на составленіе балки умень-

шили на $\frac{1}{3}$. Изъ этого можно заключить, что *прорѣзныя балки* являются весьма раціональнымъ устройствомъ. Величина A съ увеличеніемъ k возрастаетъ довольно быстро. Сдѣлавши $k=2$, мы уже имѣемъ $A=26$. Передачу нагрузки на прорѣзную балку можно дѣлать только въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ находятся распорки C, D,... (фиг. 194).

Б. Деревянныя балки изъ прямоугольныхъ брусьевъ.

46. **Одинарныя прямоугольныя балки.** Если размѣры поперечнаго сѣченія балки будутъ $a \times h$, и балка при сгибаніи поставлена *на ребро*, т. е направленіе дѣйствующей нагрузки $||$-но большей изъ ея сторонъ (фиг. 195), то модуль сопротивленія сгибанію для такой балки будетъ:

$$W_1 = \frac{a \cdot h^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{a \cdot h^2}{6}.$$

Если та же самая балка будетъ положена *плашмя*, т. е. направленіе дѣйствующей нагрузки будетъ $||$-но меньшей изъ сторонъ, то выраженіе модуля будетъ другое:

$$W_2 = \frac{h \cdot a^3}{12} : \frac{a}{2} = \frac{h \cdot a^2}{6}$$

$$W_1 : W_2 = h : a,$$

т. е. *отношеніе модулей сопротивленія балки, когда она работаетъ* **„на ребро“** *и* **„плашмя“**, *равно отношенію ея сторонъ.* Поэтому прямоугольная деревянная балка можетъ быть поставлена въ работѣ и въ хорошія условія сопротивленія и въ дурныя. Матеріалъ, употребленный на постройку балки, тогда только будетъ использованъ, какъ слѣдуетъ, когда балка, воспринимаетъ на себя нагрузку, работая *„на ребро“*, т. е. когда разстояніе крайнихъ элементовъ сѣченія ея представляется наибольшимъ, какое только возможно при данныхъ размѣрахъ балки.

Разсчетное ур-іе для прямоугольной деревянной балки будетъ:

$$\left.\begin{array}{l} B = \text{или болѣе } M : W \\ W = \frac{a \cdot h^2}{6} \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad 118$$

Неизвѣстныхъ размѣровъ въ этомъ ур-іи—два, однимъ изъ нихъ нужно задаться, а другой опредѣлить. Дѣлается это, соображаясь также съ рыночными сортами брусьевъ. Чѣмъ болѣе будетъ взято h сравнительно съ a, тѣмъ лучше, тѣмъ легче будетъ балка и тѣмъ меньшій провѣсъ въ работѣ она будетъ давать, п. ч. при образованіи момента инерціи высота h входитъ въ кубѣ.

Чтобы имѣть возможность быстрѣе производить разсчеты балокъ съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, приводится составленная нами таблица модулей сопротивленія (см. табл. 28-ю) для брусьевъ съ высотою отъ 15 до 30 стм. (6 — 12 дм.) Величины модулей даны для ширины *a* отъ 1 до 10 см., поэтому выраженіе модуля быстро можетъ быть подсчитано по этой же табл. и для какой угодно другой ширины *a*.

Таблица 28-я.

Высота *h* *смт.*	Ширина сѣченія въ *смт.*									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Величины модулей сопротивленія прямоугольнаго сѣченія въ *смт.*									
15	37,5	75	112,5	150	187,5	225	262,5	300	337,5	375
16	42,67	85,3	128	170,7	213,3	256	298,7	341,3	384	426,7
17	48,17	96,3	144.5	192,7	240,8	289	337	385	433,5	481,7
18	54	108	162	216	270	324	378	432	486	540
19	60,17	120,3	180,5	240,7	300,8	361	421	481,3	541,5	601,7
20	66,67	133,3	200	266,7	333,3	400	466,7	533,3	600	666,7
21	73,5	147	220,5	294	387,5	441	514,5	588	661,5	735
22	80,67	161,3	242	322,7	403,3	484	564,7	645,3	726	806,7
23	88,17	176,3	264.5	352,7	440,8	529	617,2	705,3	793,4	881,7
24	96	192	288	384	480	576	672	768	864	960
25	104,17	208,3	312,5	416,7	520,8	625	729,2	833,3	937,5	1041,7
26	112,7	225,3	338	450,7	563,3	675	788,7	901	1014	1125,7
27	121,5	243	364,5	486	607,5	729	850,5	972	1093,5	1215
28	130,67	261,3	392	522,7	653,3	784	914,7	1045,3	1176	1306,7
29	140.17	280.3	420,5	560,7	700,8	841	981,2	1121,3	1261,5	1401,7
30	150	300	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500

W въ *смт.* $\times 1000 = W$ въ *мм.*

Пусть, напр., $a = 13{,}2$ *см.*, $h = 24$ *см.*

модуль для 10 *см.* 960
„ „ 3 „ 288
„ „ 0,2 „ 19,2

Въ суммѣ — 1267,2.

Цифры табл. 28-й наглядно указываютъ, что выраженіе модуля, равное заданной величинѣ, можетъ быть получено при разныхъ отношеніяхъ между *a* и *h*, но между всѣми возможными комбинаціями слѣдуетъ выбирать такую, при которой высота *h* наибольшая изъ всѣхъ, если только этому не препятствуютъ какія-либо мѣстныя условія.

Когда прямоугольная балка вырѣзается изъ даннаго круглаго бруса съ діам. d, можно установить между размѣрами сѣченія наивыгоднѣйшее соотношеніе подъ тѣмъ условіемъ, чтобы W былъ *max*

$$a^2 + h^2 = d; \quad h^2 = d^2 - a^2;$$

$$W = \frac{a \, . \, h^2}{6} = \frac{a(d^2 - a^2)}{6}.$$

Если предположимъ, что $a = y$ будетъ перемѣнною величиною, то:

$$W = \frac{d^2 \, . \, y - y^3}{6}; \quad \frac{dW}{dy} = \frac{d^2 - 3y^2}{6} = 0;$$

$$y^2 = \frac{d^2}{3} = a^2, \text{ или } d : a = a : \frac{d}{3},$$

т. е. сторона прямоугольнаго сѣченія балки, вырѣзанной изъ круглаго бруса съ цѣлію полученія *max* модуля, должна быть средней пропорціональной между всѣмъ діаметромъ бруса и третью діаметра.

Для выполненія этого условія достаточно продѣлать слѣдующее построеніе: произвольный діаметръ AC (фиг. 196) круглаго бруса раздѣлить на 3 части; изъ точекъ дѣленія E и F возставить $\perp$-ы къ діаметру до пересѣченія ихъ съ окружностью въ точкахъ B и D; тогда прямоугольникъ $ABCD$ — будетъ искомый. Найдемъ отношеніе его сторонъ:

$$a^2 = \frac{d^2}{3}; \quad h^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3} \, . \, d^2,$$

$$h^2 : a^2 = 2; \quad \frac{h}{a} = \sqrt{2} = \text{около } 1{,}4 = \frac{7}{5}.$$

47. **Срощенныя прямоугольныя балки.** а) *Опредѣленіе модуля сопротивленія ихъ.* Если балка срощена изъ n одинаковыхъ брусьевъ съ размѣрами $a \times h$ (фиг. 197), тогда, связавши отдѣльные брусья накрѣпко въ одно цѣлое, мы будемъ имѣть нейтральный слой составной балки на срединѣ ея высоты; модуль ея по общей ф-лѣ для прямоугольныхъ балокъ напишется такъ:

$$W_n = \frac{a \, . \, (n \, . \, h)^2}{6} = \frac{a \, . \, h^2}{6} \, . \, n^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{119},$$

т. е *модули сопротивленія балокъ, сращиваемыхъ изъ одинаковыхъ брусьевъ, возрастаютъ, какъ квадраты числа брусьевъ, употребленныхъ на образованіе балокъ.* А вѣсъ такихъ балокъ будетъ возрастать, какъ 1-я степень числа балокъ; это указываетъ на то, что при сращиваніи балокъ матеріалъ ихъ употребляется весьма раціонально.

При $n = 2$ . . .	$W_n : W = 4$	$I_n : I = 8$
„ $n = 3$ . . .	„ $= 9$	„ $= 27$
„ $n = 4$ . . .	„ $= 16$	„ $= 64$

Эти послѣдня данныя указываютъ на то, что возрастаніе момента инерціи идетъ чрезвычайно быстро вмѣстѣ съ увеличеніемъ n и что поэтому срощенныя балки будутъ давать весьма небольшой провѣсъ.

б) Опредѣленіе силы сдвига въ плоскости стыка срощенной балки. Общее выраженіе тангенціальной силы надо написать такъ:

$$Ж_n = U_n . \frac{M_1 - M_0}{I_n} .$$

Здѣсь подъ I_n надо разумѣть уже моментъ инерціи всего сѣченія срощенной балки

Если балка срощена изъ двухъ брусьевъ, каждый съ площ. сѣченія F (фиг. 198), т. е. $n = 2$, то

$$U_2 = F . \frac{h}{2} = \frac{a . h^2}{2} ; \; I_2 = \frac{a . (2h)^3}{12} = 8 . \frac{a . h^3}{12}$$

$$Ж_2 = \frac{3}{4} . \frac{M_1 - M_0}{h} = \frac{3}{2} . \frac{M_1 - M_0}{(2h)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{а.}$$

Если балка срощена изъ трехъ брусьевъ (фиг. 199), т. е. $n = 3$, то

$$U_3 = F . h = a . h^2 ; \; I_3 = \frac{a . (3h)^3}{12} = 27 . \frac{a . h^3}{12}$$

$$Ж_3 = \frac{4}{9} . \frac{M_1 - M_0}{h} .$$

При четверной срощенной балкѣ (фиг. 200) сдвигъ можетъ произойти или въ нейтральномъ слоѣ y или въ плоскости y_1, на стыкѣ крайняго внѣшняго бруса

Для нейтральнаго слоя y:

$$U_{4y} = 2F . h = 2 . a . h^2 ; \; I_4 = \frac{a . (4h)^3}{12} = 64 . \frac{ah}{12}$$

$$Ж_{4y} = \frac{3}{8} . \frac{M_1 - M_0}{h} = \frac{3}{2} . \frac{M_1 - M_0}{(4h)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{б.}$$

По ф-ламъ **а** и **б** видимъ, что какое бы ни было число нарaщиваемыхъ балокъ, тангенціальная сила въ нейтральномъ слоѣ опредѣляется всегда по общей ф-лѣ

$$\frac{3}{2} . \frac{M_1 - M_0}{(n . h)} ,$$

гдѣ $n . h$ — высота составной балки.

Для стыка въ плоскости y_1 (фиг. 200)

$$U_{4\,y_1} = F . \frac{3}{2} . h = \frac{3}{2} . ah^2 .$$

Моментъ инерціи надо вносить опять для всего сѣченія, и тогда

$$Ж_{4\,y_1} = \frac{9}{32} . \frac{M_1 - M_0}{h} .$$

Когда вычислены величины силъ сдвига, размѣры болтовъ могутъ быть опредѣлены на основанiи тѣхъ же принциповъ, которые примѣнялись при разсчетѣ и круглыхъ срощенныхъ балокъ (см. § *44*, *г*)

Кромѣ болтовъ, для воспринятiя на себя силъ сдвига употребляются также и шпонки, которыя разсчитываются всегда въ предположенiи отсутствiя болтовъ.

в) Шпонки для скрѣпленiя деревянныхъ прямоугольныхъ брусьевъ. Общiй видъ расположенiя шпонокъ на балкѣ, срощенной изъ двухъ брусьевъ, показанъ на фиг. 201: ширина шпонки c, высота ея h_0; шпонка на половину врѣзана въ одну изъ балокъ и на столько же въ другую; размѣръ h_0 остается постояннымъ по всей рабочей длинѣ шпонки a, тогда какъ размѣръ c съ той и другой стороны балки нѣсколько различенъ, благодаря уклону на боковыхъ узкихъ сторонахъ шпонки, которыми она работаетъ, какъ клинъ. Если c_1 и c_2 будутъ наибольшая и наименьшая ширина шпонки, то

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2}; \ \frac{c_1 - c_2}{2} = 0{,}01 . a$$

Врубка шпонки въ каждую изъ сращиваемыхъ балокъ дѣлается на величину

$$k = \frac{h_0}{2} = \text{отъ} \ \ 0{,}15 \, . \, h \ \text{до} \ 0{,}2 \, . \, h,$$

гдѣ h — высота каждой изъ сращиваемыхъ балокъ. Въ виду того, что врубка для шпонки и дыра для скрѣпляющаго болта ослабляютъ рабочее сѣченiе балки, ни шпонки, ни болты не должны быть располагаемы въ опасномъ сѣченiи балки.

Шпонки дѣлаются обыкновенно дубовыми *); направленiе волоконъ у нихъ ставится $\perp$ къ оси балки.

Между размѣрами шпонки c и k можетъ быть установлено соотношенiе, принимая во вниманiе условiя ея крѣпости и условiя устойчивости положенiя ея въ гнѣздѣ.

Если верхнiй брусъ A (фиг. 202) имѣетъ стремленiе перемѣститься относительно нижняго B слѣва направо, тогда нагруженными боковыми сторонами шпонки будутъ — слѣва mn, а справа m_1n_1 Нагрузка, приходящаяся на эти стороны, пусть будетъ p. Она стремится вращать шпонку въ гнѣздѣ около горизонтальной оси шпонки O (фиг. 102) Когда шпонка была поставлена на мѣсто съ предварительной затяжкой, распредѣленiе напряженiй смятiя на бокахъ mn и m_1n_1 можно было принимать равномѣрнымъ; но когда совершится подъ дѣйствiемъ нагрузки p нѣкоторое вращенiе шпонки въ гнѣздѣ по направленiю движенiя часовой стрѣлки, тогда элементы боковой снимаемой поверхности шпонки, прилегающiе къ точкамъ m и m_1, будутъ нагружены болѣе, нежели

---

*) Ниже указана одна конструкцiя шпонки, при которой шпонка можетъ быть выполнена сосновою и будетъ даже крѣпче дубовой.

элементы возлѣ точекъ n и n_1, такъ что моментъ воздѣйствующей пары будетъ нѣсколько менѣе $p.к$, который имѣли бы при равномѣрномъ распредѣленіи нагрузокъ p на сторонахъ mn и m_1n_1. Но для большей надежности разсчета шпонки на устойчивость ея, примемъ моментъ воздѣйствующей пары равнымъ $p.к$.

На верхней и нижней сторонахъ шпонки nl и n_1l_1 возбудятся силы сопротивленія q, составленныя изъ отдѣльныхъ напряженій, равномѣрно возрастающихъ по мѣрѣ удаленія отъ вертикали ll_1 вправо и влѣво (см. § 38, ч I); поэтому моментъ сопротивленія вращенію шпонки въ гнѣздѣ будетъ $q.\frac{2}{3}c$.

Условіе устойчивости шпонки въ гнѣздѣ можно выразить такъ:

$$p.к = \text{или менѣе } q.\frac{2}{3}c, \text{ или}$$

$$\frac{c}{к} = \text{или болѣе } \frac{3}{2}.\frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{а.}$$

Если допускаемое напряженіе на стыкѣ mn будетъ D, то для опредѣленія наибольшаго давленія p, которое можетъ воспринять шпонка, приближенно можно написать, что

$$p = D.к.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{б.}$$

На самомъ же дѣлѣ величина p будетъ менѣе указанной, т. к. напряженіе D будетъ существовать только въ крайнихъ точкахъ m и m_1 стыковъ, а во всѣхъ остальныхъ оно будетъ менѣе D. Но разсчитывая p по ф-лѣ б, мы дѣлаемъ допущеніе въ пользу устойчивости шпонки.

Что же касается до величины D, то по даннымъ табл. 9-й (§ 35, ч. I) видимъ, что

а) для сосноваго гнѣзда смятіе на поверхности перерѣзанныхъ волоконъ могло бы быть принято 0,45 — 0,5 *кг.* на кв. *мм.*;

б) для дубовой шпонки смятіе на боковой ея поверхности, при дѣйствіи нагрузки $\perp$ къ направленію волоконъ, характеризуется допускаемымъ напряженіемъ всего 0,35 — 0,4 *кг.* на кв. *мм.*

Поэтому, какъ *max*, можно принять $D = 0{,}4$.

Если наибольшее напряженіе смятія на поверхностяхъ nl и n_1l_1 назовемъ чрезъ D_1, тогда

$$q = \frac{D_1}{2}\ \frac{c}{2}\ a \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{в,}$$

гдѣ D_1 по табл. 9-й для сосны могло бы быть взято отъ 0,22 до 0,25. Въ пользу условія устойчивости примемъ $D_1 = 0{,}22$ *кг.* на кв. *мм.*

После этого ф-ла **а** приметъ видъ

$$\frac{c}{к} = \text{или более } \frac{3}{2}\ 0,4.к.a : \frac{0,22}{2}.\frac{c}{2}.a, \text{ или}$$

$$\frac{c^2}{к^2} \text{ более } 10,91;\ \frac{c}{к} = \text{или более } 3,3 \ldots\ldots \text{ г.}$$

Разсматривая условія крѣпости шпонки, мы должны написать, что сила p не въ состояніи перерѣзать шпонки, или

$$p = \text{или менѣе } c.a.S \ldots\ldots\ldots \text{ д.}$$

Это ур-іе написано въ пользу крѣпости шпонки относительно ея сдвига, т. к дѣйствительная длина шпонки м. б. и болѣе a (фиг. 201). По табл 10-й (§ 50, ч. I) можно принять для дубовой шпонки $S = 0,125$ *кг.* на кв. *мм* (5 *пуд* на кв. *дм.*) Тогда, соединяя ф-лы **б** и **д**, найдемъ:

$$0,4.к.a = \text{или менѣе } 0,125.c.a, \text{ или}$$

$$\frac{c}{к} = \text{или болѣе } 3,2 \ldots\ldots\ldots \text{ е}$$

Какъ видно, условія крѣпости шпонки и условія ея устойчивости удовлетворяются при значеніяхъ отношенія $c:к$ весьма близкихъ между собою.

Достаточно было бы взять для этого ф-лу **г**; но ничто не мѣшаетъ дѣлать отношеніе $c:k$ и болѣе указываемаго этой ф-лой. Часто берутъ

$$\frac{c}{k} = 4, \text{ или } \frac{c}{h_0} = 2$$

Кромѣ разсмотрѣнной формы шпонокъ, встрѣчаются въ практикѣ и другія, показанныя на фиг. 203—205.

При формѣ, приведенной на фиг. 203, на выдѣлку шпонокъ можно тратить матеріала почти вдвое менѣе, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, но зато гнѣзда имѣютъ косыя очертанія, наклонныя къ оси балки. и требуютъ большей аккуратности въ работѣ.

При формѣ, показанной на фиг. 204, возможно обходиться безъ стягивающихъ болтовъ, но тогда требуется очень аккуратная работа по выдѣлкѣ гнѣздъ и шпонокъ.

Вполнѣ раціональною является форма шпонокъ, показанная на фиг. 205: отростки s и t дѣлаютъ ее весьма устойчивою въ гнѣздѣ; разстановка брусьевъ на величину r усиливаетъ крѣпость балки и позволяетъ производить ея окраску со всѣхъ сторонъ; направленіе волоконъ въ шпонкѣ вполнѣ возможно здѣсь ставить параллельно оси балки и, выполняя шпонки сосновыми, получать крѣпость сжатія стыка шпонки при тѣхъ же его размѣрахъ болѣе, чѣмъ въ случаѣ дубовой шпонки съ волокнами, идущими $\perp$ къ оси балки (см. данныя тб. 9-й въ § 35, ч. I).

г) Размѣщеніе шпонокъ и болтовъ по длинѣ балки. Выбравши размѣры c и k у шпонокъ, приступаютъ къ ихъ размѣщенію по длинѣ балки Величина тангенціальной силы, которую можетъ воспринять на себя шпонка, дается предыдущею ф-лою *б* (см § 47.*в*)

$$p = D \, . \, k \, . \, a \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \textbf{б},$$

гдѣ $D = 0{,}4$ въ случаѣ дубовой шпонки съ волокнами $\perp$ къ оси балки и

$D = 0{,}5$ въ случаѣ сосновой шпонки съ волокнами $\|$ оси балки (фиг. 205).

Съ другой стороны величина тангенціальной силы, передаваемой на шпонку, опредѣляется общей ф-лой *Б* (см. § 36).

$$Ж = U \, . \, \frac{M - M_1}{I}$$

Во всѣхъ промежуткахъ между шпонками необходимо имѣть

$$Ж = \text{или менѣе } p,$$

откуда разность моментовъ, опредѣляющая разстояніе между шпонками, будетъ:

$$M - M_1 = m = \text{или менѣе } \frac{p \, . \, I}{U} \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \mathbf{120}$$

Пользуясь ф-лой **120**, дѣлаютъ размѣщеніе шпонокъ графическимъ путемъ весьма просто слѣд. обр.:

Пусть. напр., балка AB (фиг 206) нагружена равномѣрно по всей длинѣ; кривою моментовъ будетъ въ этомъ случаѣ парабола AKB; наибольшая ордината ея въ опасномъ сѣченіи балки будетъ KL. Вычисляемъ величину m по ф-лѣ **120** и откладываемъ на чертежѣ

$$Kc = cd = de = ef = m.$$

Изъ полученныхъ точекъ проводимъ горизонтали Cc, Dd .... до пересѣченія съ параболою въ точкахъ C, D, E . .. Проводя чрезъ эти точки вертикали CC_1, DD_1 ...., опредѣлимъ мѣста для шпонокъ.

1-я шпонка слѣва отъ средины д. б. расположена правѣе точки C_1,

2-я—правѣе D_1 и т. д. При этомъ получилось на фиг. 206 Lf менѣе m. Если желаемъ, чтобы крайняя лѣвая шпонка расположилась какъ разъ надъ опорою A, тогда въ нашемъ случаѣ (фиг 206) дѣлимъ ординату KL ровно на *5* частей и находимъ новое расположеніе шпонокъ, при которомъ онѣ будутъ поставлены въ условія, еще болѣе благопріятныя, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ.

Такимъ же образомъ поступаютъ и при всякомъ другомъ способѣ нагруженія балокъ.

Расположеніе осей *zz* болтовъ при свертываніи брусьевъ, скрѣпленныхъ шпонками, встрѣчается въ трехъ видахъ, какъ показано на фиг. 201, 207 и 208.

Изъ нихъ расположеніе, показанное на фиг 207, наименѣе удачно, такъ какъ здѣсь ослабленіе поперечнаго сѣченія и болтомъ и шпонкою происходитъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ

Болты выполняются съ большой предварительной затяжкой, чтобы не происходило ослабленія ихъ въ случаѣ измѣненія величины нагрузки или направленія ея дѣйствія. Разсчетъ ихъ производится такъ, какъ будто бы шпонокъ вовсе не было (см. § 44 *г*), но при этомъ принимается во вниманіе также и воздѣйствіе момента *p к* отъ шпонки на смежную пару болтовъ, какъ усиливающее величину напряженія въ нихъ. Число болтовъ здѣсь назначается въ зависимости отъ расположенія ихъ и отъ числа шпонокъ (фиг. 201, 207, 208). Діаметръ болтовъ во всякомъ случаѣ не дѣлается менѣе $^3/_4$ *дм.*

Употребленіе срощенныхъ деревянныхъ балокъ въ машиностроеніи практикуется весьма давно Такъ строились между прочимъ всѣ коромысла первыхъ по времени паровыхъ машинъ. Наиболѣе грандіознымъ изъ нихъ является коромысло атмосферной машины *Smeaton* (1775 г.), имѣвшей діаметръ парового цилиндра 72 *дм*, ходъ поршня—9 фут; число оборотовъ въ мин.—9; все коромысло составлено было изъ 24 деревянныхъ брусьевъ, поставленныхъ по ширинѣ въ 2 ряда, такъ что наращивалось въ высоту 12 брусьевъ, а для усиленія крѣпости средняго сѣченія примѣненъ былъ принципъ устройства прорѣзной балки. (*Galloway The steam engine*).

48. **Задачи**. **№ 87**. Деревянная балка срощена изъ двухъ прямоугольныхъ брусьевъ одинаковой ширины $a = 180$ *мм*, но разной высоты — $h_1 = 180$ и $h_2 = 220$ *мм* Найти ея модуль сопротивленія

Общая высота балокъ $h = 180 + 220 = 400$ *мм.*

Для балки съ такой высотой модуля въ табл. 28-й (см. § 46) нѣтъ, но есть модули для балки съ высотой вдвое меньшей—въ 20 *см.* При одной и той же ширинѣ балки модули пропорціональны квадратамъ высотъ.

При высотѣ въ 20 *см.* табличный модуль

для ширины 10 *см.* . . . 666,7 }
„ „ 8 „ . . . 533,3 } сумма ихъ ... 1200 *см.*

Для балки съ высотою въ 40 *см.* модуль долженъ быть

$$W = 1200 . 4 = 4800 \text{ см}$$

№ 88. Деревянная балка накрѣпко срощена изъ двухъ одинаковыхъ брусьевъ $a \times h$, но такъ, что одинъ изъ нихъ *Б* (фиг. 209) поставленъ на ребро, а другой *А* работаетъ плашмя. Найти модуль сопротивленія такой балки.

Разстояніе между центрами тяжести сѣченій обѣихъ балокъ

$$АБ = \frac{a + h}{2}.$$

Центръ тяжести сѣченія всей балки опредѣлится равенствомъ:

$$AO = БO = \frac{АБ}{2} = \frac{a+h}{4}$$

Спрашивается, можетъ-ли точка O совпасть съ E, т. е. можетъ-ли *ц. т.* всего сѣченія лежать въ плоскости стыка?

Для этого было бы необходимо имѣть $БO = БE$, т. е

$$\frac{a+h}{4} = \frac{h}{2}, \text{ или } a = h.$$

Разстояніе крайнихъ элементовъ площади сѣченія отъ нейтральнаго слоя

$$CO = БC + БO = \frac{h}{2} + \frac{a+h}{4} = \frac{a+3h}{4}.$$

Съ другой стороны

$$OD = \frac{3a+h}{4}.$$

Вычисляемъ теперь моменты инерціи сѣченій отдѣльныхъ брусьевъ и всего сѣченія балки

$$I_{yБ} = \frac{a.h^3}{12} + a.h.\left(\frac{a+h}{4}\right)^2 = \frac{a.h^3.}{12}.\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{a+h}{h}\right)^2\right]$$

$$I_{yA} = \frac{h.a^3}{12} + a.h.\left(\frac{a+h}{4}\right)^2 = \frac{a.h^3.}{12}.\left[\frac{a^2}{h^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{a+h}{h}\right)^2\right]$$

$$I_{AБ} = I_{yA} + I_{yB} = \frac{a.h^3}{12}\left[1 + \frac{3.(a+h)^2 + 2a^2}{2h^2}\right]; \; W = I_{AБ} : CO.$$

При $\frac{h}{a} = 2 \;.\;.\;.\;.\; I_{AБ} : \frac{ah^3}{12} = \frac{37}{8} \;.\;.\;.\;.\; W : \frac{ah^2}{6} = \frac{37}{14}$

„ „ $= 3 \;.\;.\;.\;.$ „ „ $= \frac{34}{9} \;.\;.\;.$ „ „ $= \frac{34}{15}.$

Эти послѣднія цифры показываютъ, что такая комбинація балокъ является гораздо менѣе раціональною, чѣмъ однообразное наращиваніе балокъ, поставленныхъ сбѣ на ребро.

№ 89. Изъ круглаго бруса нужно вырѣзать n досокъ одинаковаго прямоугольнаго сѣченія подъ тѣмъ условіемъ, чтобы сложенныя вмѣстѣ и поставленныя на ребро онѣ дали *max* модуля

Сѣченіе доски $\delta \times h$. Пусть ширина пропила между отдѣльными досками будетъ s.

Если $$n.\delta + (n-1).s = a,$$

то брусъ $a \times h$ будетъ тотъ самый, относительно котораго мы уже рѣшали вопросъ объ опредѣленіи его размѣровъ подъ условіемъ *max* W (см. § *46*), и для котораго нашли

$$h : a = 7 : 5$$

и способъ расчерчиванія, показанный на фиг. 196. Для него имѣли также

$$h^2 = \frac{2}{3} . d^2; \quad h = 0{,}816 . d.$$

Затѣмъ теперь имѣемъ

$$n . \delta + (n - 1) . s = \frac{5}{7}\ h = 0{,}58 . d\ .$$

Изъ этого ур-ія, задаваясь шириною пропила $s = 2 - 3$ мм., можно опредѣлить или число досокъ n по толщинѣ ихъ δ, или наоборотъ. Замѣтимъ однако, что такой распилъ не будетъ раціоналенъ, ибо здѣсь $h =$ всего $0{,}816 . d$, слѣд. у нѣкоторыхъ досокъ теряется до 15% высоты, что соотвѣтствуетъ потерѣ на величинѣ модуля

$$(1{,}15)^2 - 1 = 0{,}323,$$

т. е. около 30%. Поэтому при распилѣ брусьевъ на доски никоимъ образомъ не слѣдуетъ требовать, чтобы онѣ были вырѣзаны *съ одинаковой высотой*. Нужно озаботиться только объ одинаковой ширинѣ ихъ; затѣмъ, будучи взяты отъ разныхъ брусьевъ, онѣ будутъ подсортированы по высотѣ, и утрата матеріала такимъ образомъ м. б. доведена до *min*.

№ 90 Найти выраженіе модуля сопротивленія для *прорѣзной* балки (фиг. 210), составленной изъ двухъ брусьевъ прямоугольнаго сѣченія, и обнаружить выгодность ея употребленія.

Размѣры каждаго изъ брусьевъ — $a \times h$, высота всей балки — $n . h$, нейтральный слой yy дѣлить ее пополамъ.

$$I_y = a\ .\ h^3 . \frac{n^3 - (n - 2)^3}{12} = a\ .\ h^3 . \frac{6n^2 - 12n + 8}{12}$$

$$e = \frac{n\ .\ h}{2}; \quad W = \frac{a . h^2}{6} . \frac{6n^2 - 12n + 8}{n}.$$

Для одинарной балки съ размѣрами $a \times h$ выраженіе модуля было

$$W_1 = \frac{a\ .\ h^2}{6}.$$

Такимъ образомъ $W : W_1 = \dfrac{6\ .\ n^2 - 12\ .\ n \quad 8}{n} = \mathsf{A}$.

Въ этомъ выраженіи $n =$ или болѣе *двухъ*. При $n = 2$ получаемъ $\mathsf{A} = 4$, какъ это имѣли для сращенной балки, изображенной на фиг. 198 (§ 47,*б*).

При $n = 2{,}25$	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4
„ $\mathsf{A} = 5{,}05$	6,2	7,41	8,66	9,93	11,3	12,63	14

№ 91. Сравнить между собою модули сопротивленія трехъ деревянныхъ балокъ: 1) круглой съ діам. d, 2) прямоугольной, вырѣзанной

изъ этой круглой подъ условіемъ *max* W и 3) квадратной, вырѣзанной изъ круглой

Называемъ модули балокъ соотвѣтственно — $W_1 W_2 W_3$. Тогда

$$W_1 = \frac{\pi}{32} \cdot d^3; \quad W_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot d^2 = \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot d^3;$$

$$W_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{12\sqrt{2}} \cdot d^3.$$

Такимъ образомъ отношеніе модулей будетъ соотвѣтственно:

$$\frac{\pi}{32} : \frac{1}{9\sqrt{3}} : \frac{1}{12\sqrt{2}}, \text{ или}$$

0,09818 : 0,06414 : 0,05893, или

1 : 0,653 : 0,600, или

1,5314 : 1 : 0,9187, или

1,6667 1,0883 . 1.

Желѣзныя балки.

49. **Желѣзныя балки съ круглымъ поперечнымъ сѣченіемъ.** Сгибаемыя части машинъ и сооруженій, выполняемые изъ желѣза съ круглой формой поперечнаго сѣченія, примѣняются главнымъ образомъ въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ ожидается возможность измѣненія направленія вдѣйствія сгибающей нагрузки. Если M будетъ разсчетный моментъ B — допускаемое напряженіе при сгибаніи, W — модуль сопротивленія разсчетнаго сѣченія и d — діаметръ его, то

$$\left.\begin{aligned} M &= B \cdot W \\ W &= \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{121.}$$

Въ табл. 29-й приведены величины модулей W.

Таблица 29-я.

d — въ *мм.*, W — въ куб. *мм.*

d	25	30	35	40	45	50	55	60
W	1534	2651	4209	6283	8946	12272	16334	21206
d	65	70	75	80	85	90	95	100
W	26961	33674	41417	50265	60292	71569	84173	98175

Величины B для *сварочнаго* желѣза берутся такъ:

направленіе дѣйствія нагрузки постоянно . . . . $B = 6,5 — 7,5$

" " " перемѣнно. . $B = 3 — 4$

Для *литого* желѣза *(Flusseisen)*:

направленіе дѣйствія нагрузки постоянно . . . . . $B = 8 — 10$

" " " перемѣнно . . . $B = 5 — 6$

50. **Желѣзныя балки съ прямоугольнымъ сѣченіемъ.** Такую форму поперечнаго сѣченія получаютъ рычаги, небольшіе балансиры и т п. части машинъ. Разсчетъ этихъ балокъ производится по тѣмъ же общимъ ф-ламъ, какъ и для деревянныхъ балокъ прямоугольнаго сѣченія (см. ф-лы **118** въ § 46). При нахожденіи модуля можно пользоваться цифрами табл. 28 (въ § 46), помня, что модули прямоугольныхъ балокъ пропорціональны 1-й степени ширины сѣченія и квадрату его высоты, т. е. квадрату размѣра, ||-го направленію нагрузки.

а. Случай передачи нагрузки на нѣсколько балокъ съ различными размѣрами поперечнаго сѣченія, имѣющихъ общую стрѣлу прогиба Подобный примѣръ встрѣчаемъ при разсчетѣ чеки и причеки, гдѣ имѣются двѣ или три сгибаемыя части, воспринимающія общую нагрузку и дающія общій провѣсъ.

Пусть имѣемъ 3 такихъ балки I, II, III (фиг. 211) съ высотами h_1 h_2 h_3; у каждой изъ нихъ будетъ свой нейтральный слой y_1 y_2 y_3, и каждая будетъ воспринимать свой сгибающій моментъ M_1 M_2 M_3; въ суммѣ они даютъ заданный моментъ M.

Всѣ ф-лы для опредѣленія допускаемой стрѣлы прогиба имѣли такой общій видъ (см. ф-лы **35, 41, 47, 55, 62** и др.)·

$$f = c\,\frac{l^2}{E}\cdot\frac{B}{e} \qquad \ldots\ldots \qquad \mathbf{122},$$

гдѣ l — длина балки.

e — разстояніе крайнихъ точекъ сѣченія отъ нейтральнаго слоя, т. е. полувысота въ случаѣ прямоугольнаго сѣченія,

E — коэф. упругости матеріала,

B — допускаемое напряженіе матеріала,

c — постоянный коэф., зависящій отъ способа нагруженія балки

Предполагая, что всѣ три балки имѣютъ общую длину, сдѣланы изъ одного и того же матеріала и одинаковымъ образомъ нагружены, т. е. въ ф-лѣ **122** для нихъ будутъ одинаковы величины c, l и E, мы видимъ, что всѣ 3 балки дадутъ общій провѣсъ тогда только, когда при разсчетѣ ихъ будетъ сдѣлано

$$\frac{B}{e} = \text{постоян. велич., или}$$

$$\frac{B_1}{e_1} = \frac{B_2}{e_2} = \frac{B_3}{e_3} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \mathbf{a}$$

Послѣ этого мы можемъ написать *3* разсчетныхъ ур-ія:

$$M_1 = B_1 . \frac{I_1}{e_1}; \quad M_2 = B_2 . \frac{I_2}{e_2}; \quad M_3 = B_3 . \frac{I_3}{e_3}.$$

Если высота $h_2 = 2 . e_2$ будетъ наибольшею изъ всѣхъ, а безопасное напряженіе матеріала будетъ B, тогда разсчетный моментъ

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = B . \frac{I_1 + I_2 + I_3}{e_2},$$

т. е. выраженіе модуля сопротивленія здѣсь будетъ:

$$W = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{e_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 123.$$

Эта ф-ла показываетъ, что *въ случаѣ передачи нагрузки на нѣсколько балокъ съ различными размѣрами сѣченій, но съ общей стрѣлой прогиба, модуль сопротивленія для нихъ получимъ, взявши сумму моментовъ инерціи, написанныхъ для каждаго изъ сѣченій относительно своего нейтральнаго слоя, и раздѣливши эту сумму на полувысоту самаго высокаго изъ всѣхъ сѣченій.*

Обычная ошибка въ такихъ разсчетахъ заключается въ томъ, что, складывая M_1 M_2 M_3, напряженія B_1 B_2 B_3 допускаютъ равными, и, вынося ихъ за скобку, образуютъ модуль въ такомъ видѣ:

$$\frac{I_1}{e_1} + \frac{I_2}{e_2} + \frac{I_3}{e_3},$$

т. е. каждый моментъ инерціи дѣлятъ на свою полувысоту сѣченія; при этомъ происходитъ ошибка въ ущербъ крѣпости разсчитываемыхъ балокъ.

б. Случай воздѣйствія на балку нагрузки, измѣняющей свое направленіе. Пусть имѣемъ балку прямоугольнаго сѣченія, на которую передается сгибающій моментъ M (фиг. 212), постоянный по величинѣ, но измѣняющій свое направленіе, т. и е. плоскость нагруженія съ осью *oy* дѣлаетъ перемѣнный уголъ β. Слагающія этого момента будутъ

$$M_1 = M . Cos\beta; \quad M_2 = M . Sin\beta.$$

Напишемъ модули сопротивленія сѣченія для сгибанія въ плоскостяхъ координатъ:

$$W_1 = \frac{h . a^2}{6} \dots \text{ для сгибанія въ плоск. } oy,$$

$$W_2 = \frac{h^2 . a}{6} \dots \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad oz.$$

Отъ дѣйствія момента M_1 наиболѣе растянутые элементы сѣченія пусть прилегаютъ къ линіи AC, обладая напряженіемъ B_1, которое будетъ опредѣляться такъ:

$$B_1 = \frac{M_1}{W_1} = \frac{M}{W_1} . Cos\beta$$

Если отъ дѣйствія момента M_2 наиболѣе растянутыми элементами сѣченія будутъ прилегающіе къ линіи CD, по напряженіе ихъ B_2 будетъ:

$$B_2 = \frac{M_2}{W_2} = \frac{M}{W_2} . Sin\beta.$$

Такимъ образомъ въ точкѣ C, на пересѣченіи наиболѣе напряженныхъ линій AB и CD, получится наивысшее въ данномъ сѣченіи напряженіе

$$H = B_1 + B_2 = M . \left(\frac{Cos\beta}{W_1} + \frac{Sin\beta}{W_2}\right) \quad . \; . \quad . \; . \quad \mathbf{124}$$

Съ измѣненіемъ величины угла β будетъ измѣняться и напряженіе H; найдемъ его *max*:

$$\frac{dH}{d\beta} = M . \left(- \frac{Sin\beta}{W_1} + \frac{Cos\beta}{W_2}\right) = 0, \text{ откуда}$$

$$tg\beta = \frac{W_1}{W_2} = \frac{a}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{125.}$$

Очевидно, что уголъ $CAD = \beta$, т. е. *при перемѣнѣ направленія дѣйствія нагрузки на балку съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, наиболѣе опаснымъ положеніемъ плоскости нагруженія будетъ такое, когда она перпендикулярна къ одной изъ діагоналей поперечнаго сѣченія балки.*

Взявши 2-ю производную отъ H по β, легко обнаружить, что это значеніе β будетъ соотвѣтствовать *max* величины H, а не *min.*

Послѣ этого можно написать

$$Cos\;\beta = 1 : \sqrt{1 + tg^2\beta} = h : \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$Sin\;\beta = tg\beta . Cos\,\beta = a : \sqrt{a^2 + h^2}$$

Вносимъ эти величины въ ф-лу **124**, подставляя въ нее вмѣсто модулей ихъ значенія въ функціи размѣровъ сѣченія; тогда

$$max\;\; H = \frac{6M}{\sqrt{a^2 + h^2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}\right), \text{ или}$$

$$max\;\; H = \frac{6M}{a^2 . h^2} . \sqrt{a^2 + h^2}$$

Разсчетное, ур-іе балки получится послѣ замѣны этого наибольшаго напряженія допускаемою для него величиною B:

$$B = \frac{M}{\left(\frac{a . h^2}{6}\right)} . \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{126.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что *отношеніе разсчетнаго напряженія въ случаѣ наиболѣе* **опаснаго** *расположенія плоскости нагруженія къ разсчетному напряженію въ случаѣ наиболѣе* **выгоднаго** *расположе-*

нія плоскости нагруженія, когда балка поставлена „на ребро", равно отношенію діагонали къ наименьшей изъ сторонъ прямоугольнаго сѣченія.

Слѣд., если направленіе воздѣйствія нагрузки строго опредѣленное, т. е. β постоянно, тогда разсчетъ слѣдуетъ производить по ф-лѣ **124**, а при перемѣнномъ β по — ф-лѣ **126**. Дѣлая β равнымъ 0 или 90°, получаемъ частныя рѣшенія вопроса объ изгибѣ тѣла въ горизонтальной плоскости или вертикальной.

в) Эллипсъ прогибовъ. Въ случаѣ воздѣйствія на прямоугольную балку такой нагрузки, направленіе которой не совпадаетъ съ осями симметріи сѣченія, плоскость прогиба тѣла дѣлаетъ съ плоскостью нагруженія нѣкоторый уголъ. Откладывая величины стрѣлокъ прогиба по величинѣ и по направленію отъ *ц. т.* сѣченія въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ прогиба, получимъ на плоскости поперечнаго сѣченія нѣкоторую кривую; ея радіусы векторы графически будутъ изображать собою величины стрѣлокъ прогиба и указывать направленіе послѣдняго. Проф. *Intze* *) показалъ, что кривая эта будетъ эллипсомъ и назвалъ ее *эллипсомъ прогибовъ.*

Какой бы ни былъ способъ нагруженія тѣла, стрѣла прогиба f м. б. выражена слѣдующею ф-лою (см. §§ 15—26):

$$f = k\ \frac{M}{I}\ \ldots\ldots\ldots\ б,$$

гдѣ M — сгибающій моментъ,

I — моментъ инерціи сѣченія,

$к$ — постоянный коэф., зависящій отъ рода матеріала и способа нагруженія тѣла

Пусть $a = OA = OB$ (фиг 213) будетъ величина стрѣлки прогиба, которую получилъ бы данный брусъ, если бы заданный моментъ M дѣйствовалъ въ горизонтальной плоскости Oy;

$b = OD = OE$ — подобная же стрѣлка при воздѣйствіи M въ вертикальной плоскости;

$I_1 = \frac{h.c^3}{12}$ — моментъ инерціи сѣченія, взятый относительно нейтральной линіи Oz, т. е. при изгибѣ тѣла въ плоскости Oy;

$I_2 = \frac{c.h^3}{12}$ — моментъ инерціи сѣченія относительно оси Oy для случая изгиба въ вертикальной плоскости:

На основаніи этого, пользуясь ф-лой б этого §, мы можемъ написать:

$$a = k.\frac{M}{I_1},\quad b = k.\frac{M}{I_2}$$

*) Въ журн. *Z. d. Ver. deutsch Ing.* 1881, *H* 10.

Дѣлая разложенiе заданнаго сгибающаго момента M по осямъ координатъ, получимъ слагающiя его M_1 и M_2 слѣд. обр :

$$\text{по оси } Oy \quad . \; . \; . \quad M_1 = M \quad Cos\beta$$

$$\text{„} \quad Oz \; . \; . \quad . \quad M_2 = M \; . \; Sin\beta$$

Соотвѣтственныя этимъ моментамъ стрѣлки прогиба будутъ опредѣляться такъ:

$$\left. \begin{aligned} f_1 = k \, . \, \frac{M_1}{I_1} = k \, . \, \frac{M \, . \, Cos\beta}{I_1} = a \, . \, Cos\beta \\ f_2 = k \, . \, \frac{M_2}{I_2} = k \, . \, \frac{M \, . \, Sin\beta}{I_2} = b \, . \, Sin\beta . \end{aligned} \right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{г.}$$

Искомая стрѣла прогиба будетъ

$$h = \sqrt{f_1^{\,2} + f_2^{\,2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad . \; \text{д.}$$

Образуя сумму квадратовъ синуса и косинуса β, получимъ:

$$\frac{f_1^2}{a^2} + \frac{f_2^2}{b^2} = 1 . \; . \; . \; . \qquad . \; . \; . \; . \; \mathbf{127.}$$

Это и есть искомое ур-iе эллипса прогибовъ, если f_1 принять за абсциссу, а f_2 — за ординату точки, радiусъ векторъ которой равенъ по величинѣ и по направленiю стрѣлѣ прогиба, вызываемой въ брусѣ заданнымъ сгибающимъ моментомъ M.

Ф-лы **127** и **д** указываютъ способъ построенiя эллипса прогибовъ: проведемъ окружности ANB и DHE радiусами a и b; построенiе можетъ быть сдѣлано въ произвольномъ масштабѣ, нужно только соблюсти условiе:

$$a \, . \, I_1 = b \, . \, I_2 \, , \quad \text{или} \; \frac{a}{b} = \frac{OA}{OE} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{h^2}{c^2};$$

затѣмъ проводимъ направленiе ON подъ угломъ β къ оси Oy; это будетъ слѣдъ плоскости нагруженiя; отмѣчаемъ точки N и H пересѣченiя этого радiуса ON съ окружностями DE и AB; если изъ N проведемъ вертикаль KN, а изъ H горизонталь HL, тогда, очевидно, будемъ имѣть слѣдующее:

$$OK = ON \, . \, Cos\beta = f_1 = a \; . \; Cos\beta$$

$$KL = OH \, . \, Sin\beta = f_2 = b \; . \; Sin\beta ,$$

т. е. длина OL по величинѣ и по направленiю будетъ представлять собою стрѣлу прогиба, въ то же время—радiусъ векторъ эллипса прогибовъ и слѣдъ плоскости изгиба бруса, дѣлающiй съ осью Oy уголъ γ. Подобнымъ же образомъ построятся и всѣ другiя точки эллипса прогибовъ ALD при измѣненiи угла β.

Помощію эллипса прогибовъ возможно рѣшеніе и обратнаго вопроса, т. е. отысканіе положенія плоскости нагруженія ON по заданному положенію плоскости прогиба OL; для этого изъ точки L проводятъ вертикаль LN или же горизонталь HL; тогда направленіе OHN и будетъ отмѣчать положеніе плоскости нагруженія.

Какъ видно изъ чертежа (фиг. 213), при измѣненіи β отъ 0 до 90^0 плоскость прогибовъ все время отстаетъ отъ плоскости нагруженія; онѣ совпадаютъ между собою только при крайнихъ значеніяхъ β, когда изгибъ бруса происходитъ или въ горизонтальной плоскости или въ вертикальной.

Зависимость между углами β и γ устанавливается слѣдующимъ образомъ (фиг. 213):

$$KL = f_2 = OH \,.\, Sin\beta = b \,.\, Sin\beta$$

$$KL = OK \,.\, tg\gamma = a \,.\, Cos\beta \,.\, tg\gamma,$$

откуда $b \,.\, Sin\beta = a \,.\, Cos\beta \,.\, tg\gamma$, или

$$\frac{tg\beta}{tg\gamma} = \frac{a}{b} = \frac{h^2}{c^2}. \qquad \ldots\ldots \quad 128,$$

т. е. *отношеніе тангенсовъ угловъ, которые дѣлаютъ съ горизонталью плоскость нагруженія и плоскость прогиба, равно отношенію квадратовъ сторонъ прямоугольнаго сѣченія бруса.*

Вопросъ объ эллипсѣ прогибовъ поставленъ здѣсь так. обр., что всѣ разсужденія и выводы м. б. отнесены также и къ брусьямъ съ другимъ поперечнымъ сѣченіемъ, лишь бы у нихъ имѣлось по двѣ оси симметріи. Полученными здѣсь результатами приближенно пользуются также при косомъ выгибѣ рельсовъ, желѣзныхъ угольниковъ и проч. Въ случаѣ круглаго поперечнаго сѣченія $a = b$, эллипсъ прогибовъ обращается въ кругъ, и плоскость нагруженія всегда совпадаетъ съ плоскостью прогиба.

51. **Желѣзныя балки съ двутавровымъ поперечнымъ сѣченіемъ.** *a) Одинарныя прокатныя балки.* Двутавровыя балки изъ сварочнаго и литого желѣза получаются прокаткою. Главные размѣры ихъ слѣдующіе (фиг. 214): h—высота сѣченія, a—ширина *„полки"*, или *„подошвы"*, t—толщина *„полки"*, или *„ребра"*, d—толщина вертикальной стѣнки (или просто толщина „стѣнки"). Между этими размѣрами установлено заграницею вполнѣ опредѣленное соотношеніе; по взаимному соглашенію между потребителями балокъ и производителями ихъ установлены *нормальные размѣры* и нумерація балокъ. *Нумеромъ* балки въ Германіи принято называть число сантиметровъ, заключающихся въ высотѣ балки. Въ Америкѣ готовятъ двутавровыя балки, какъ рыночный товаръ, съ высотою до 600 *мм.* (24 дм.), въ Германіи — до 500 *мм.* (20 дм.), въ Россіи — до 300 *мм* (12 дм.).

Ниже приведены таблицы для разсчета такихъ балокъ. Въ нихъ обозначаютъ:

№ — нумеръ профиля балки.

F въ кв. *см.* — площадь поперечнаго сѣченія балки,

I_y и I_z въ $см^4$. — моменты инерціи относительно осей yy и zz (фиг. 214),

W въ $см^3$. — модуль сопротивленія сѣченія относительно оси yy,

q въ *кг* — вѣсъ погоннаго *метра* балки.

Для перевода однѣхъ мѣръ въ другія могутъ служить слѣдующія данныя:

q въ *кг* для $mt = 1{,}344 \, . \, q$ въ рус. *фунт.* для *фута.*

q въ рус. *фунт.* для фута $= 0{,}744 \, . \, q$ въ *кг.* для mt.

F въ кв. *дм.* $= 0{,}15501$ F въ кв. *см.*

F въ кв *см.* $= 6{,}45137 \, . \, F$ въ кв. *дм*

I въ $см^4. = 41{,}6 \, . \, I$ въ $дм^4$.

I въ $дм^4. = 0{,}024 \, . \, I$ въ $см^4$.

W въ $см^3. = 16{,}38 \, . \, W$ въ $дм^3$.

W въ $дм^3 = 0{,}061 \, . \, W$ въ $см^3$

Въ таблицѣ 30-й приведены данныя для нормальныхъ двутавровыхъ профилей, установленныхъ германскими инженерами.

Александровскій сталелитейный заводъ въ Спб. готовитъ двутавровыя балки съ высотою въ *мм.*

127; 150; 178; 200; 235; 260; 280; 300;

соотвѣтственные имъ модули въ $см^3$. таковы:

60; 99; 166; 216; 314; 446; 560; 659.

Данныя для профилей *Путиловскаго завода* въ Спб. приведены въ табл. 31-й.

Длину двутавровыхъ балокъ можно имѣть отъ 7 до 42 фут. (2,1 до 12,8 *мт.*) до № 15, а выше этого № — отъ $18\frac{2}{3}$ до 42 фут., или же отъ 8 до 18 аршинъ.

Таблица 30-я.

Нормальные двутавровые нѣмецкіе профили.

№ профиля.	Площадь F кв. *см.*	Вѣсъ 1 *mt* q килогр.	Моменты инерціи въ *см* 4 I_y	I_z	Модули W_y въ *см.*³
8	7,61	6,0	78,4	7,35	19,6
9	9,05	7,1	118	10,4	26,2
10	10,69	8,3	172	14,3	34,4
11	12,36	9,6	241	18,9	43,8
12	14,27	11,1	331	25,2	55,1
13	16,19	12,6	441	32,2	67,8
14	18,35	14,3	579	41,3	82,7
15	20,5	16,0	743	51,8	99,0
16	22,9	17,9	945	64,0	118
17	25,4	19,8	1177	78,8	139
18	28,0	21,9	1460	95,9	162
19	30,7	24,0	1779	115,2	187
20	33,7	26,2	2162	138	216
21	36,6	28,5	2587	163	246
22	39,8	31,0	3090	192	281
23	42,9	33,5	3642	224	317
24	46,4	36,2	4288	261	357
26	53,7	41,9	5798	341	446
28	61,4	47,9	7658	429	547
30	69,4	54,1	9888	530	659
32	78,2	61,0	12622	652	789
34	87,2	68,0	15827	789	931
36	97,5	76,1	19766	956	1098
38	107,5	83,9	24208	1138	1274
40	118,3	92,3	29446	1349	1472
42,5	133,0	103,7	37266	1672	1754
45	147,7	115,2	46204	2004	2054
47,5	163,6	127,6	56912	2424	2396
50	180,2	140,5	69245	2871	2770
55	215,2	167,9	99838	4028	3630

Таблица 31-я.

Двутавровые профили Путиловскаго завода въ С.-Петербургѣ.

Размѣры сѣченія въ дюймахъ.	Площадь сѣченія въ кв. *дм.*	Вѣсъ погоннаго фута балки въ *фунт.*	Модуль сопротивленія балки въ куб. *дм.*
$4 \times 2 \times \frac{3}{16}$	1,77	6,9	2,27
$5 \times 2\frac{1}{4} \times \frac{7}{32}$	2,36	9,2	3,70
$5\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{7}{32}$	2,65	10,4	4,88
$6 \times 2\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$	3,33	13,2	6,30
$7 \times 3\frac{3}{16} \times \frac{1}{4}$	4,32	16,7	9,70
$8 \times 3\frac{1}{2} \times \frac{5}{16}$	5,41	20,5	13,6
$9 \times 3\frac{15}{16} \times \frac{11}{32}$	6,70	25,7	19,70
$10 \times 4\frac{7}{16} \times \frac{3}{8}$	8,01	31,4	25,9
$12 \times 4\frac{13}{16} \times \frac{15}{32}$	11,13	42,8	40,80

Разсматривая данныя таблицъ *30* и *31*, мы видимъ, что при переходѣ къ высшимъ №-мъ возрастаніе модуля сопротивленія у двутавровыхъ балокъ идетъ гораздо быстрѣе, чѣмъ увеличеніе вѣса ихъ.

Таблица 32-я.

Характеристика нормальныхъ нѣмецкихъ профилей.

№ балки	8	13	19	24	28	32
Вѣсъ q	6	12,6	24	36,2	47,9	61
Отношеніе вѣсовъ	1	2	4	6	8	10
Модуль W_y..	19,6	67,8	187	357	547	789
Отношеніе модулей	1	3,46	9,54	18,2	27,9	40,24

Это сопоставленіе данныхъ сдѣлано въ табл. 32-й, гдѣ указано отношеніе соотвѣтственнаго вѣса балокъ и модулей ихъ Слѣдоват., когда нагрузка д. б. передана не на одну балку, а на нѣсколько, выборъ балокъ высшаго № всегда приведетъ къ меньшей стоимости балокъ, чѣмъ при употребленіи низшихъ №-овъ. Выборъ болѣе высокихъ балокъ выгоденъ еще и потому, что такія балки будутъ давать при той же крѣпости ихъ значительно меньшій прогибъ, а именно: *если балки будутъ разсчитаны съ однимъ и тѣмъ же напряженіемъ матеріала, прогибы ихъ будутъ обратно пропорціональны №-амъ ихъ.*

б) *Клепаныя балки двутавроваго сѣченія* (фиг. 215) Такія балки образуются наклепкою на вертикальную стѣнку угловыхъ полосъ, числомъ 4, изъ нихъ — двѣ вверху и двѣ внизу. Если нужно дальнѣйшее увеличеніе модуля балки, къ угольникамъ приклепываются полки или подошвы L, показанныя на фиг. 215 пунктиромъ, изъ балочнаго желѣза.

Чтобы съ одной стороны облегчить разсчетъ такихъ балокъ, а съ другой — привести результатъ разсчета къ такимъ комбинаціямъ въ размѣрахъ полосъ и угольниковъ, которыя являются наиболѣе удобными и практичными, существуютъ разсчетныя таблицы для клепаныхъ балокъ. Эти таблицы содержатъ въ себѣ данныя относительно размѣровъ, величину модуля балки, а также и вѣсъ погоннаго *мт.* ея.

Такія таблицы имѣются въ слѣдующихъ работахъ:

а) въ работѣ инж. *Шаровскаго (Scharowsky—Musterbuch für Eisenconstructionen)* собраны данныя для клепаныхъ балокъ, у которыхъ величина модуля измѣняется отъ 3.000 до 20.0000 *см*^{3};

б) въ работѣ *Boehm & John — Wiederstandsmomente, Tragheitsmomente und Gewichte von Blechtragern* собраны данныя для клепаныхъ балокъ съ величиной модуля отъ 59 до 25622 *см*^{3} и приведенъ указатель всѣхъ балокъ въ порядкѣ возрастанія ихъ модуля;

в) въ работѣ *Zimmermann — Genietete Trager.*

Возьмемъ одну изъ клепаныхъ балокъ и прослѣдимъ возрастаніе ея модуля и вѣса при наклепываніи полокъ вверху и внизу сѣченія.

Возьмемъ клепаную балку съ сѣченіемъ фиг. 215, у которой размѣры стѣнки — 400 $\times$ 10 *мм.*, а размѣры угольниковъ — 100 $\times$ $\times$ 100 $\times$ 10 Для такой балки у *Boehm & John* (сокращенно *B. & J*) на стр. 18 находимъ модуль $W = 1292$ *см*^{3}., а вѣсъ погоннаго *мт.* — $q = 91$ *кг.*, не принимая во вниманіе вѣсъ заклепочныхъ головокъ (діам. закл. — 20 *мм.*).

Если бы та же балка имѣла полки, очертаніе которыхъ показано на фиг. 215 пунктиромъ, съ размѣрами $a \times б$, тогда у нея повысились бы и вѣсъ, и модуль. Такъ, напр., если полки будутъ каждая *изъ*

одной полосы съ размѣрами сѣченія 250 × 12 *мм.*, тогда у *В. & J.* на стр. 54 находимъ

модуль — 2203, вѣсъ — 137,8;

для балки съ полками той же ширины, но *изъ двухъ полосъ*, т. е. съ размѣрами сѣченія 250 × 24, у *В. & J.* на стр. 56 находимъ

модуль — 3155, вѣсъ — 184,6,

для балки съ полками *изъ трехъ полосъ* на стр. 57 имѣемъ

модуль — 4124, вѣсъ — 231,4.

Послѣдовательное возрастаніе модуля и вѣса балки при измѣненіи числа полосъ въ полкахъ указываетъ для этого случая табл. 33-я.

Таблица 33-я.

Модули и вѣсъ клепаной балки съ размѣрами: стѣнки — 400 × 10 *мм.*, угольниковъ — 100 × 100 × 10, каждой изъ полосъ — 250 × 12.

	Балка безъ полокъ	Число полосъ въ каждой полкѣ: одна	двѣ	три
Модули.	1292	2203	3155	4124
Отношеніе модулей.	1	1,71	2,44	3,2
	—	1	1,43	1,87
	—	—	1	1,30
Вѣсъ q.	91	137,8	184,6	231,4
Отношеніе вѣсовъ.	1	1,51	2,03	2,54
	—	1	1,34	1,68
	—	—	1	1,25

Цифры этой таблицы ясно указываютъ, какимъ образомъ происходитъ возрастаніе модуля и вѣса балки по мѣрѣ утолщенія ея полокъ; вмѣстѣ съ тѣмъ, сравнивая данныя таблицъ *30* и *33*, видимъ, что клепаныя балки безъ полокъ и съ одной полкою, даже при высотѣ h въ 400 *мм.* съ выгодою могутъ быть замѣнены прокатными балками № 38 и $47^1/_2$ соотвѣтственно, а при всѣхъ болѣе низкихъ балкахъ это будетъ имѣть мѣсто даже и при полкахъ изъ двухъ полосъ. Напр., клепаная балка

съ размѣрами стѣнки . . . . . . 220 × 10 *мм.*

" уголковъ. . . . . . 75 × 75 × 10 *мм.*

" полокъ . . . . 2 × 10 × 170 "

по *B.* & *J.* (стр. 35) будемъ имѣть модуль 930 *см.*^{3} и вѣсъ погон *мт.* 114,3 *кг*, тогда какъ прокатная балка № 34, имѣющая ту же величину модуля, обладаетъ вѣсомъ $q = 68$ *кг.*, т. е почти на 30% легче.

По отношенію къ клепанымъ балкамъ таблицы *B.* & *J* позволяютъ рѣшать вопросы не только относительно тѣхъ размѣровъ балокъ, которыя приведены въ таблицахъ, но также и относительно нѣкоторыхъ другихъ промежуточныхъ комбинацій въ размѣрахъ ихъ. Это можно будетъ выяснить на нѣсколькихъ числовыхъ примѣрахъ въ видѣ задачъ.

52. **Задачи. № 92** *). Для клепаной двутавровой балки, образованной изъ уголковъ 100 × 100 × 12 и трехъ полосъ въ каждой полкѣ 260 × 12, въ таблицахъ *B.* & *J.* (стр. 62) даны модули при высотѣ стѣнки 1160 и 1180 *мм.* и толщинѣ ея 10 *мм.* Требуется найти величину модуля той же балки при высотѣ ея 1175 *мм.*

Вопросъ рѣшается интерполированіемъ. Величина модуля

При высотѣ 1180 *мм.* . . . . 15231 *см.*^{3}

„ „ 1160 „ . . . . 14923 „

Разность на 20 *мм.* высоты . . . . . 308 „

„ „ 1 „ „ . . . . . 15,4 „

„ „ 5 „ „ . . . . . 77 „

Модуль при высотѣ балки 1175 *мм.* можно принять

$$15231 - 77 = 15154 \text{ см.}^3$$

№ 93. * Клепаная двутавровая балка изъ уголковъ 100 × 100 × 12, трехъ полосъ въ каждой полкѣ 260 × 12 и стѣнки 1180 × 10 имѣетъ модуль 15231 *см.*^{3} Найти модуль сѣченія при ширинѣ полокъ 274 *мм.*

У *B.* & *J.* на стр. 146 даны модули сопротивленія для полокъ въ 10 *мм.* шириною. При толщинѣ полокъ 3 × 12 *мм.* и высотѣ стѣнки у нея 1180 *мм.* получается модуль

на 10 *мм.* ширины полки 425,3

„ 14 „ „ „ . . . . 425,3 × 1,4 = 595,4.

Поэтому искомый модуль будетъ

$$15231 + 595{,}4 = 15826{,}4 \text{ см.}^3$$

№ 94.* Балка та же, что и въ предыдущей задачѣ, но толщина стѣнки не 10, а 12 *мм.* Найти модуль сопротивленія новаго сѣченія.

---

*) При рѣшеніи задачъ, отмѣченныхъ *, надо имѣть подъ руками разсчетныя таблицы *Boehm & John.*

У *B. & J.* на стр. 147 приведены величины модулей стѣнки, отнесенные къ 1 *мм.* ширины ея при разной толщинѣ полокъ. При высотѣ стѣнки 1180 *мм.* и толщинѣ полокъ 3×12 *мм.* величина модуля

для 1 *мм* ширины . . . . 218,7 *см.*^{3}

для 2 „ „ . . . . 437,4 „

Искомая величина модуля сопротивленія будетъ:

$$15231 + 437{,}4 = 15668{,}4 \text{ см.}^3$$

№ 95. * Двутавровая прокатная балка № 30, у которой $W = 659$ *см.*^{3} и $q = 54{,}1$ *кг*, нарощена двумя полками, одной внизу и одной вверху, съ размѣрами полосъ 150×10, вѣсъ погоннаго *мт.* которыхъ равенъ 11.55 *кг.* Найти модуль сопротивленія новой балки и ея вѣсъ

У *B. & J* на стр. 146 при высотѣ стѣнки 300 *мм.* модуль полки толщиною въ 10 *мм*

на 10 *мм.* ширины . . . . 30 *см.*^{3}

„ 150 „ „ . . . . $30 \times 15 = 450$ *см.*^{3}

Искомый модуль будетъ

$$450 + 659 = 1109 \text{ см.}^3$$

Искомый вѣсъ новой балки

$$54{,}1 + 2 \quad 11{,}55 = 77{,}2.$$

По табл. 30 видно, что эта новая балка могла бы быть замѣнена прокатною № 36.

№ 96. Двѣ прокатныя двутавровыя балки № 12 склепаны между собою своими полками (фиг. 216). Найти модуль сопротивленія новаго сѣченія

По табл. 30-й для балки № 12

$$I_{y1} = 331 \text{ см.}^4; \ F = 14,\ 27 \text{ см.}^2$$

Моментъ инерціи новаго сѣченія относительно нейтральной оси yy (фиг 216) напишется по ф-лѣ **117** (см. § 43):

$$I_y = 2\,.\,[331 + 14,\ 27\,.\,6^2] = 1689{,}44 \text{ см.}^4;$$

модуль сопротивленія будетъ

$$W = I_y : h = 1689{,}44 : 12 = 140{,}6 \text{ см}^3$$

Такая балка будетъ вѣсить $2 \times 11{,}1 = 22{,}2$ *кг.* на 1 *мт.* Между тѣмъ прокатная балка № 17 имѣетъ (см. тб. 30):

$$W_{17} = 139 \text{ см.}^3; \ q = 19{,}8 \text{ кг.},$$

т. е. такая комбинація балокъ не представляетъ никакой выгоды сравнительно съ прокатными балками высшаго №.

№ 97. Изъ двухъ двутавровыхъ балокъ № 12 образована прорѣзная балка (фиг. 217), причемъ скрѣпленіе главныхъ балокъ сдѣлано посредствомъ обрѣзковъ тѣхъ же балокъ № 12. Найти модуль сопротивленія новаго сѣченія балки.

По ф-лѣ **117** (см. § 43):

$$I_y = 2[331 + 14,27 \,.\, 12^2] = 4771,76 \ см^4$$

Поэтому модуль сѣченія балки будетъ

$$W = I_y : \frac{3}{2} \,.\, h = 4771,76 : 18 = 265 \ см^3,$$

т. е. такая комбинація балокъ въ состояніи замѣнить собою прокатную балку № 22, у которой модуль $= 281$, а вѣсъ $q = 31$ *кг.*

№ 98. Деревянная прямоугольная балка съ размѣрами $a_1 \times h_1$ срощена съ желѣзною полосою $a_2 \times h_2$ накрѣпко; нагрузка дѣйствуетъ въ плоскости симметріи сѣченія $0z$ (фиг. 218). Найти разсчетное ур-іе для такой составной балки.

Пусть нейтральная линія сѣченія будетъ O_1y. Продольную линію, проходящую чрезъ точку O_1, будемъ называть здѣсь осью бруса.

Пусть обозначаютъ:

e_1 — разстояніе крайнихъ сжатыхъ линій деревянной части сѣченія отъ нейтральнаго слоя,

H_1 — напряженіе этихъ линій,

e_2 — разстояніе крайнихъ растянутыхъ линій металлической части сѣченія отъ нейтральнаго слоя,

H_2 — напряженіе этихъ линій,

e_3 — разстояніе поверхности стыка деревянной и металлической части балки отъ нейтральнаго слоя,

H_3 и H_0 — напряженія элементовъ металла и дерева на поверхности стыка соотвѣтственно,

r — радіусъ кривизны согнутой оси бруса въ точкѣ O_1,

E_1 — коэф. упругости дерева,

E_2 — „ „ желѣза.

Для произвольнаго элемента сѣченія, взятаго на разстояніи z отъ нейтральной линіи, вытяжка будетъ $i = z : r$ (см. ф-лу *1* въ § 2), а элементарная растягивающая или сжимающая сила будетъ выражаться ф-лой *3* (§ 2). Предполагая, что нагрузка воздѣйствуетъ на балку въ плоскости симметріи сѣченія xoz и перпендикулярна къ оси x-овъ,

1-е условіе равновѣсія, выражаемое ф-лой 5 (§ 3) мы напишемъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{E_2}{r}\int_{e_3}^{e_2} z\; dF + \frac{E_1}{r}\int_0^{e_3} z\,.\,dF = \frac{E_1}{r}\int_0^{e_1} z\; dF\text{, или}$$

$$E_2\,.\,a_2\;h_2\,.\left(e_3+\frac{h_2}{2}\right)+E_1\,.\,a_1\;\frac{e_3^2}{2}=E_1\;a_1\,.\frac{e_1^2}{2}\;.\;.\;.\;.\;\text{в}$$

Но $e_3 = h_1 - e_1$, поэтому

$$E_2\,.\,a_2\,.\,h_2\left(h_1-e_1+\frac{h_2}{2}\right)+\frac{E_1\,.\,a_1}{2}\,(h_1^2-2h_1\,.\,e_1+e_1^2)=E_1\,.\,a_1\,.\frac{e_1^2}{2};$$

$$E_2\,.\,a_2\;h_2\,.\frac{2h_1+h_2}{2}+\frac{E_1\,.\,a_1\,.\,h_1^2}{2}=e_1\;[E_1\,.\,a_1\;h_1+E_2\,.\,a_2\,.\,h_2]\text{, или}$$

$$e_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{E_1\,.\,a_1\,.\,h_1^2+E_2\,.\,a_2\;h_2\,(2h_1+h_2)}{E_1\;a_1\,.\,h_1+E_2\,.\,a_2\,.\,h_2}\;.\;.\;.\quad \mathbf{129}$$

Если $E_1 = E_2$, $a_1 = a_2$, т. е. имѣемъ однородную прямоугольную балку, тогда ф-ла **129** даетъ:

$$e_1=\frac{h_1+h_2}{2}$$

Когда величина e_1 будетъ найдена, моменты инерціи отдѣльныхъ частей сѣченія представятся въ слѣд. видѣ:

$$\text{для части } OA\ldots\; I_1=\frac{a_1\,.\,e_1^3}{3}$$

$$\text{„ „ } OC\ldots\; I_3=\frac{a_1\,.\,e_3^3}{3}$$

$$\text{„ „ } BD\ldots\; I_2=\frac{1}{3}\,.\,a_2\,.\,(e_2^3-e_3^3)$$

Затѣмъ 6-е ур-іе равновѣсія, выражающее равенство моментовъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ относительно оси oy (см. ф-лу **9** въ § 3), напишется такъ:

$$M=\frac{1}{r}\sum E\,.\,I=\frac{E_1\,.\,(I_1+I_3)+E_2\,.\,I_2}{r}\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{г.}$$

Но такъ какъ

$$\left.\begin{aligned}H_1&=E_1\;\frac{e_1}{r};\;H_0=E_1\,.\,\frac{e_3}{r}\\ H_2&=E_2\;\frac{e_2}{r};\;H_3=E_2\,.\,\frac{e_3}{r}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{д,}$$

поэтому

$$\frac{E_1}{r}=\frac{H_1}{e_1};\;\frac{E_2}{r}=\frac{H_2}{e_2}\text{, или}$$

$$\frac{H_2}{e_2}=\frac{E_2}{E_1}\,.\,\frac{H_1}{e_1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{ж.}$$

Так. обр. разсчетное ур-іе балки будетъ:

$$M = \frac{H_1}{e_1}\left\{I_1 + I_3 + \frac{E_2}{E_1} \cdot I_2\right\} \quad \ldots\ldots\ \mathbf{130},$$

т. е. *разсчетное ур-іе балки, связанной въ одно цѣлое изъ двухъ разнородныхъ брусьевъ, пишется по обыкновенной разсчетной ф-лѣ съ тѣмъ лишь различіемъ, что моментъ инерціи сѣченія добавляемой полосы вводится въ общее выраженіе момента инерціи всей составной балки съ множителемъ, представляющимъ собою отношеніе коэффиціентовъ упругости добавляемой полосы и остальной части балки.*

Пусть, напр., имѣемъ у деревяннаго бруса $a_1 = 200$ *мм.*, $h_1 = 300$, у желѣзной полосы $a_2 = 100$, $h_2 = 30$; кромѣ того,

$$E_2 = 20 \;.\; E_1 = 20.000 \text{ кг. на кв. мм.};$$

тогда по ф-лѣ **129**:

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \,.\, 30^2 + 20 \,.\, 10 \,.\, 3\,(60+3)}{20 \,.\, 30 + 20 \,.\, 10 \,.\, 3} \text{ см.}$$

$$e_1 = \frac{30+63}{4} = 232{,}5 \text{ мм.};\; e_3 = 67{,}5 \text{ мм.};$$

$$e_2 = h_2 + e_3 = 97{,}5 \text{ мм.}$$

Пусть возможныя величины напряженій матеріала будутъ:

для желѣза.... 7 *кг.* на кв. *мм.*

„ дерева 1 „ „ „

По ф-лѣ ж существующее въ балкѣ отношеніе напряженій получится равнымъ

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{e_2}{e_1} = \frac{20 \,.\, 97{,}5}{232{,}5} = 8{,}4$$

Полученное отношеніе напряженій показываетъ, что въ заданной комбинаціи брусьевъ болѣе слабою частью будетъ желѣзная полоса, п. ч. въ ней получилось бы напряженіе 8,4 *кг.*, если бы въ деревянномъ брусѣ взять напряженіе въ 1 *кг.* Поэтому здѣсь нужно вычислять допускаемую величину H_1 слѣд. образ :

$$H_1 = 7 \,.\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = \frac{7}{8{,}4} = 0{,}83$$

Послѣ этого по ф-лѣ **130** получаемъ

$$M = \frac{0{,}83}{232{,}5} \,.\left[I_1 + I_3 + 20 \,.\, I_2\right]$$

Если бы нужно было выяснить, какой высоты x деревянную балку замѣняетъ наша комбинація брусьевъ, предполагая, что одинарная балка будетъ имѣть ту же ширину 200 *мм.*, тогда нужно было бы написать такое равенство:

$$\frac{20 \,.\, x^2}{6} = \frac{1}{23{,}25}\left\{\frac{20 \,.\, 23{,}25^3}{3} + \frac{20 \,.\, 6{,}75^3}{3} + 20 \cdot \frac{10}{3}(9{,}75^3 - 6{,}75^3)\right\}$$

$$x = 40{,}48 \text{ см.} = \text{около } 405 \text{ мм.}$$

53. Желѣзныя балки съ коробчатымъ поперечнымъ сѣченіемъ. *а) Одинарныя прокатныя балки.* Балки съ коробчатымъ или корытообразнымъ поперечнымъ сѣченіемъ наз. также *швеллерами.* Ихъ получаютъ прокаткою изъ желѣза или стали. Форма сѣченія и его главные размѣры указаны на фиг. 219. Между размѣрами сѣченія установлено заграницею вполнѣ опредѣленное соотношеніе, т. е. выработаны так. наз. нормальные размѣры. *Нумеромъ* балки въ Германіи наз. и здѣсь также число сантиметровъ, заключающихся въ высотѣ балки. Данныя для разсчета такихъ балокъ германскаго нормальнаго образца собраны въ табл. 34-й.

Брянскій заводъ выкатываетъ 7 нумеровъ такихъ балокъ съ размѣрами, указанными въ табл. 35-й.

Возрастаніе модуля сопротивленія балки по мѣрѣ увеличенія ея вѣса охарактеризовано въ табл. 36-й по отношенію къ нормальнымъ нѣмецкимъ профилямъ. Сравнивая данныя этой таблицы съ таковыми же въ табл. 32, видимъ, что въ коробчатыхъ нормальныхъ профиляхъ послѣдовательное возрастаніе модуля балки при увеличеніи ея вѣса идетъ значительно быстрѣе, чѣмъ въ двутавровыхъ нормальныхъ профиляхъ. Сравненіе данныхъ тѣхъ же таблицъ указываетъ, кромѣ того, что, при одномъ и томъ же вѣсѣ балокъ, коробчатые профили имѣютъ бо̀льшую величину I_z и даютъ большую величину W_z, чѣмъ двутавровые профили, т. е. употребленіе 1-хъ выгоднѣе чѣмъ 2-хъ въ случаѣ работы балки плашмя, а при работѣ *„на ребро“*, наоборотъ, будутъ выгоднѣе двутавровыя балки.

Таблица 34-я.

Нормальные размѣры нѣмецкихъ профилей коробчатаго желѣза (фиг. 219).

№ профиля	Площадь F кв. *см.*	Вѣсъ 1 *мт.* q въ *кг.*	Разстояніе центра тяж. y_0 въ *мм.*	Моменты инерціи въ *см.*^{4}			Модули W_y въ *см.*^{3}
				J_h	J_z	J_y	
3	5,42	4,2	14,4	16,4	5,2	6,5	4,3
4	6,20	4,8	14,6	20,5	7,3	14,2	7,1
5	7,12	5,6	14,8	25,6	10,0	26,7	10,7
$6^1/_2$	9,05	7,1	15,4	37,2	15,7	58,2	17,9
8	11,04	8,6	15,7	48,9	21,7	107	26,7
10	13,5	10,5	16,9	71,7	33,1	207	41,4
12	17,04	13,3	17,4	100,8	49,2	368	61,3
14	20,4	15,9	19,1	145,6	71,2	609	87,0
16	24,1	18,8	20,1	194,8	97,4	932	117
18	28,0	21,9	21,0	253,5	130	1364	152
20	32,3	25,2	22,0	327,3	171	1927	193
22	37,6	29,3	23,4	431,9	226	2712	247
24	42,3	33	23,3	—	248	3598	300
26	48,4	37,8	25,8	687,2	365	4857	374
28	53,3	41,6	25,3	—	399	6276	450
30	58,8	45,9	29,5	—	564	8064	538

Таблица 35-я.

Профили коробчатаго желѣза Брянскаго завода.

		1	2	3	4	5	6	7
Заводскій № . . .		1	2	3	4	5	6	7
Разм. h . . .	въ мм.	300	235	145	120	105	114	60
„ a . . .	въ мм.	76	89	60	55	64	51	35
„ t . . .	въ мм.	10	12	8	8,5	8	8	7
„ d . .	въ мм.	10	9,5	8	7	8	8	7
Площ. F... см.^{2}.		43,2	42,5	20	16,6	17,26	16,0	7,66
Коорд. y_0... см. . .		2,80	2,52	1,65	1,7	2,33	1,49	1,22
Мом. инерціи I_y	въ сантим.	5026,5	3402	594	356	285,2	294	39,5
„ „ I_z	въ сантим.	238,8	305	63,2	47,3	68,2	38,3	8,8
Модуль W_y	въ сантим.	335	289,5	81,9	59,3	54,4	51,5	13,2
„ W_z	въ сантим.	49,8	48	14,5	12,5	17,0	10,4	3,86
Фунтовъ на футъ .		25,37	24,50	11,6	9,7	9,95	9,22	4,47

Таблица 36-я.

Характеристика нормальныхъ нѣмецкихъ профилей.

№ балки	4	8	14	20	26
Вѣсъ q	4,2	8,6	15,9	25,2	37,8 кг.
Отношеніе вѣсовъ	1	2,05	3,81	6	9
Модуль W_y	4,3	26,7	87,0	193	374 см.^{3}
Отношеніе модулей	1	6,21	20,23	44,9	87

Правильное примѣненіе теоріи сгибанія къ коробчатымъ балкамъ, работающимъ *„на ребро“*, будетъ имѣть мѣсто тогда только, когда такія балки дублируются, или вводятся въ четномъ числѣ (см. фиг. 220), какъ этого требуетъ удовлетвореніе всѣхъ условій равновѣсія (см. § 3).

б) *Клепаныя коробчатыя балки.* Онѣ могутъ быть образованы трояким образомъ: 1) на фиг. 221 показано сѣченіе балки, образованное изъ двухъ нормальныхъ профилей, къ которымъ приклепаны двѣ полки; 2) на фиг. 222 имѣемъ сѣченіе балки изъ двухъ клепаныхъ швеллеровъ; 3) на фиг. 223 предыдущее сѣченіе комбинировано съ двумя полками, — изъ нихъ обѣ могутъ быть выполнены такъ именно, какъ показана верхняя полка на фиг. 223, или обѣ такъ—какъ нижняя, или, наконецъ, въ той комбинаціи, которая указана на фиг. 223. Разсчетъ такихъ балокъ проще всего дѣлается съ помощію таблицъ *Boehm & John.*

54. **Задачи. № 99***). Изъ двухъ коробчатыхъ прокатныхъ балокъ № 26 образовано сѣченіе, показанное на фиг. 221; размѣры полокъ 320 × 14 *мм.* Найти модуль сопротивленія такого сѣченія и вѣсъ балки.

Въ табл. 34-й находимъ модуль для профиля № 26. Онъ равенъ 374 *см.*^{3}. Но теперь высота балки будетъ не 260 *мм.*, а 260+28= =288 *мм.*, поэтому, входя въ составъ новой балки, такой профиль дастъ намъ модуль:

$$374 \cdot \frac{260}{288} = 337{,}7 \text{ см.}^3$$

Затѣмъ по таблицамъ *B. & J.* (стр. 146) при высотѣ стѣнки 26 *см.* и толщинѣ полки 1,4 *см.* получается модуль;

для 1 *см.* ширины полки 36,5

„ 32 „ „ „ . . . 32 × 36,5=1168

Поэтому полное выраженіе модуля будетъ

$$1168 + 2.337{,}7 = 1843{,}4 \text{ см.}^3$$

Вѣсъ погоннаго мт. такой балки составится изъ вѣса

двухъ полокъ	2 × 34,5 = 69	*кг.*
„ профилей № 26 . . .	2 × 37,8 = 75,6	„
Всего	144,6	„

Для такого модуля, какъ нужно, двѣ прокатныхъ двутавровыхъ балки достаточно было бы имѣть № 34; для нихъ модуль былъ бы 2 × 931 = 1862 *см.*^{3}, и вѣсъ ихъ 2 × 68, или *136* кг. на мт. длины. Вѣсъ заклепочныхъ головокъ и работа по склепкѣ полокъ при этомъ отсутствовали бы.

№ 100. * Найти модуль сопротивленія и вѣсъ погон. *мт.* коробчатой клепаной балки съ сѣченіемъ, представляемымъ фиг. 222 и состоящимъ изъ 4 уголковъ 60 × 60 × 10 *мм.* и стѣнки 330 × 10 *мм.* при діам. заклепокъ 16 *мм.*

Разсчетъ такой балки ничѣмъ не отличается отъ разсчета двутавровой. Въ таблицахъ *B. & J.* на стр. 5 находимъ модуль для двутавровой балки, у которой стѣнка 330 × 10 и заданные угольники, равнымъ 663. Остается добавить модуль стѣнки. На той же стр. 5 модуль для стѣнки высотою 330 *мм.* и толщиною 1 *мм.* данъ =14,9, а при 10 *мм.* онъ будетъ 149. Так. обр. полный модуль сѣченія фиг. 222 будетъ

$$663 + 149 = 812 \text{ см.}^3$$

*) Задачи, отмѣченныя звѣздочкой, рѣшаются при помощи таблицъ *Boehm & John*.

Вѣсъ двутавровой балки съ тѣми же уголками и стѣнкой 330 × 10 данъ у *B. & J.* на стр. 5 равнымъ 60,3 *кг.* Къ нему надо еще добавить вѣсъ 2-й стѣнки 330 × 10. Его находимъ тамъ же на стр. 41:

при высотѣ 320 . . . . . . 25 *кг.*

" " 340 . . . . . . 26,5 "

" " 330 онъ будетъ $\frac{25+26,5}{2}=25,75$,

т. е. вѣсъ всей балки будетъ около 86 *кг.* на *мт.*

Къ характеристикѣ этого сѣченія замѣтимъ, что одна двутавровая балка № 34 дала бы модуль 931 и вѣсъ 68 кг.

№ 101 * Найти модуль сопротивленія сѣченія, изображеннаго на фиг. 223.

Для двутавровой клепаной балки съ уголками 90 × 90 × 11 и съ полками 240 × 10 у *B. & J.* на стр. 45 имѣемъ модули:

при высотѣ 34 *см.* . . . . 1612 *см.*^{3}

" " 36 " . . . . 1735 "

" " 35 " модуль будетъ $\frac{1612+1735}{2}=1673,5$

Но мы имѣемъ ширину полокъ не 240, а 460 *мм.* Для добавочной ширины полокъ въ 22 *см.* имѣемъ данныя тамъ же на стр. 146. Для 1 *см.* ширины модуль будетъ 35, а для всей добавочной ширины

$$35 \times 22 = 770 \ см^3.$$

Затѣмъ остается добавить модуль еще одной вертикальной стѣнки 350 × 10. Тамъ же на стр. 147 для 1 *мм.* ширины находимъ его равнымъ 19,35, а въ нашемъ случаѣ онъ будетъ 193,5 Модуль всего сѣченія

$$1673,5 + 770 + 193,5 = 2637 \ см.^3$$

55. **Балки изъ угловаго желѣза и зетовъ.** „*Уголки*" и „*зеты*", т. е. полосы съ поперечнымъ сѣченіемъ въ видѣ угольника (фиг. 224 и 225) или въ видѣ буквы *z* (фиг 226) получаются прокаткою изъ желѣза или стали (литого желѣза) Уголки готовятся равнобокими (фиг. 224) и неравнобокими (фиг. 225), въ томъ и другомъ случаѣ толщина обѣихъ полокъ дѣлается одинаковою.

Таблица 37-я содержитъ въ себѣ данныя для разсчета равнобокихъ уголковъ германскихъ нормальныхъ профилей, табл. 38-я даетъ то же для неравнобокихъ уголковъ, а табл. 39-я — для зетовъ. Въ 1-мъ вертикальномъ столбѣ этихъ таблицъ даны размѣры сѣченія, во 2-мъ — площадь его F, въ 3-мъ — вѣсъ q погоннаго *мт.* полосы въ *кг.*, далѣе координаты y_0 и z_0 (фиг. 224 и 225), опредѣляющія положеніе ц. т.

сѣченія, и наконецъ моменты инерціи сѣченій относительно осей yy, zz, bb. Въ табл. 37-й приведены данныя только для нѣсколькихъ ходовыхъ сортовъ уголковъ. Кромѣ указанныхъ въ этой таблицѣ, существуютъ еще 16 профилей ниже наименьшаго табличнаго и 12 профилей выше указанныхъ въ таблицѣ.

Таблица 37-я.

Равнобокіе уголки германскихъ нормальныхъ профилей (фиг. 224).

$h \times t$	F	q	z_0	I_b	I_y
мм.	кв. см.	кг. на мт.	мм.	см.	см.
50 . 5	4,75	3,7	14,4	21,1	11,2
50 . 7	6,51	5,1	15,1	29,7	14,8
50 . 9	8,19	6,4	15,9	38,8	18,1
55 . 6	6,24	4,9	15,9	30,6	14,8
. 8	8,16	6,4	16,7	45,2	22,5
. 10	10	7,8	17,4	57,2	26,9
60 . 6	6,84	5,3	17,2	43,6	23,4
8	8,96	7	17,9	58,5	29,8
. 10	11	8,6	18,6	73,3	35,3
65 . 7	8,61	6,7	18,8	64,7	34,4
. 9	10,9	8,5	19,5	83,7	42,3
. 11	13,1	10,2	20,2	103	49,5
70 . 7	9,31	7,3	20,2	80,9	43,3
. 9	11,8	9,2	20,8	105	53,6
. 11	14,2	11,1	21,5	129	63,6
75 . 8	11,4	8,9	21,7	114	60
. 10	14,0	10,9	22,6	144	72,7
. 12	16,6	12,9	23,1	223	84
80 . 8	12,2	9,5	22,9	138	73,9
. 10	15	11,7	23,7	173	89,1
12	17,8	13,9	24,4	208	102
90 . 9	15,4	12	25,7	220	118
. 11	18,6	14,5	26,5	271	140
. 13	21,7	16,9	27,2	321	160
100 . 10	19	14,8	28,7	337	180
. 12	22,6	17,6	29,4	406	210
. 14	26	20,3	30,1	474	239
110 . 10	21	16,4	31,2	447	243
. 12	25	19,5	31,9	535	281
. 14	28,9	22,5	32,6	631	324
120 . 11	25,2	19,7	34,1	639	346
. 13	29,5	23	34,8	758	400
. 15	33,8	26,3	35,5	877	451

Таблица 38-я.

Неравнобокіе уголки нормальныхъ германскихъ профилей.

$a \times b \times t$	F	q	y_0	z_0	I_y	I_z
20. 30. 3	1,41	1,10	5,1	10,1	1,28	0,46
. 4	1,84	1,44	5,5	10,5	1,66	0,52
30. 45. 4	2,84	2,22	7,5	15	5,83	2,09
. 5	3,5	2,73	7,9	15,4	7,01	2,51
40. 60. 5	4,75	3,71	9,9	19,9	17,4	6,26
. 7	6,51	5,08	10,6	20,6	23,1	8,23
50. 75. 7	8,26	6,4	12,6	25,1	46,9	16,8
. 9	10,44	8,1	13,3	25,8	57,9	20,6
65.100. 9	14,04	11,0	16,2	33,7	142	47,9
.11	16,94	13,2	16,9	34,4	169	56,3
80.120.10	19	14,8	19,7	39,7	279	100
.12	22,96	17,6	20,5	40,5	326	116
100.150.12	28,56	22,3	24,5	49,5	656	237
.14	33,04	25,8	25,2	50,2	749	269
20. 40. 3	1,71	1,33	4,5	14,5	2,83	0,49
. 4	2,24	1,75	4,9	14,9	3,62	0,61
30. 60. 5	4,25	3,32	6,9	22,0	15,7	2,7
. 7	5,81	4,53	7,7	22,7	20,8	3,5
40. 80. 6	6,84	5,34	9	29	45,2	7,83
. 8	8,96	7	9,7	29,7	57,9	9,81
50.100. 8	11,36	8,9	11,4	36,4	117	20,1
.10	14	10,9	12,1	37,1	141	24
65.130.10	18,5	14,4	14,7	47,2	322	55,6
.12	21,96	17,1	15,4	47,9	377	64,4
80.160.12	27,36	21,3	17,9	57,9	725	125
.14	31,64	24,7	18,17	58,7	829	141
100.200.14	40,04	31,2	22	72	1672	289
.16	45,44	35,4	22,8	72,7	1870	323
въ *мм.*	кв. *см.*	*кг.* на *мт.*	въ *мм.*	въ *см.*		

Таблица 39-я.

Зеты германскихъ нормальныхъ профилей.

$h \times a \times d \times t$	F	q	I_y	I_z
въ *мм.*	кв. *см*	*кг.* на *мт.*	*см.*	*см.*
30 . 38 . 4 . 4,5	4,26	3,3	5,95	13,9
40 . 40 4,5 . 5	5,35	4,2	13,4	17,9
50 . 43 . 5 . 5,5	6,68	5,2	26	24,4
60 . 45 . 5 . 6	7,8	6,1	44,2	30,8
80 . 50 6 . 7	10,96	8,6	107,9	48,7
100 . 55 6,5 . 8	14,26	11,1	218,6	74,5
120 60 7 . 9	17,94	14	396,5	107,6
140 . 65 . 8 . 10	22,6	17,6	663,8	153,8
160 . 70 . 8,5 . 11	27,13	21,2	1043,3	208,5

Русскіе прокатные заводы выкатываютъ свои профили углового желѣза и даютъ для нихъ свои разсчетныя таблицы. Длина полосъ бываетъ отъ 25 до 30 фут.

Примѣненіе уголковъ весьма часто находимъ при образованіи клепаныхъ балокъ. Въ этомъ случаѣ моментъ инерціи каждаго уголка будетъ введенъ въ общее выраженіе момента инерціи всей балки при помощи ф-лы *117* (см. § 43). Кромѣ этого, уголки и зеты находятъ себѣ въ настоящее время обширное примѣненіе при образованіи сѣтчатыхъ балокъ инженеръ-механика В. Г. Шухова.

56. **Сѣтчатыя балки Шухова**. Схема расположенія уголковъ въ планѣ при образованіи сѣтчатой балки показана на фиг. 227: всѣ уголки дѣлаютъ съ осью балки уголъ β; вертикальныя полки уголковъ верхняго ряда, идущихъ, положимъ, по направленію ab, направлены кверху, а въ уголкахъ нижняго ряда, расположенныхъ $\parallel$ ac, вертикальныя полки направлены книзу, въ узловыхъ точкахъ, гдѣ происходитъ скрещиваніе горизонтальныхъ полокъ уголковъ, онѣ скрѣпляются между собою заклепьами. Так. обр. получается жесткое соединеніе уголковъ, заставляющее ихъ при нагруженіи работать какъ одно цѣлое, какъ балку съ осью AB (фиг 227).

На фиг. 228 показанъ выдѣленнымъ одинъ изъ элементовъ сѣтчатой балки. Пусть BC и BD будутъ двѣ полосы, задѣланныя въ стѣну подъ угломъ β къ линіи AB, которая будетъ осью балки; въ узловой точкѣ B полосы между собою соединены и нагружены, положимъ, сосредоточеннымъ грузомъ P, $\perp$ къ плоскости чертежа. Тогда слѣдъ плоскости прогиба полосъ представитъ намъ линія AB. Длиною балки будетъ линія $AB = l$, отличающаяся отъ длины полосъ

$$BC = BD = l_1 = l : Cos\ \beta.$$

Если бы обѣ полосы были направлены вдоль линіи AB, на каждую изъ полосъ передавался бы сгибающій моментъ $\frac{1}{2}$ $P.l$; теперь же каждая изъ балокъ выноситъ на себѣ дѣйствіе сгибающаго момента $\frac{1}{2}.P.l_1$, т. е. болѣе предыдущаго въ отношеніи $1:Cos\,\beta$.

Если бы оси полосъ совпадали съ AB, тогда поперечнымъ разсчетнымъ сѣченіемъ каждой полосы было бы сѣченіе, $\perp$-ное къ оси балки AB и равное, положимъ, F. Теперь же, когда оси полосъ дѣлаютъ съ осью балки углы β, разсчетными поперечными сѣченіями полосъ будутъ сѣченія, лежащія въ плоскости CD, $\perp$-ной къ оси балки AB; эта ось лежитъ въ плоскости прогиба балки. Так. обр. здѣсь разсчетнымъ сѣченіемъ каждой полосы будетъ не F, а $F:Cos\beta$, т. е. больше прежняго также въ отношеніи $1:Cos\beta$; въ такой же мѣрѣ послѣдуетъ увеличеніе и момента инерціи каждой полосы, а также и ея модуля сопротивленія.

Слѣд., *двѣ наклонныя одна къ другой полосы* **BC** *и* **BD**, *связанныя между собою въ одно цѣлое и принужденныя прогибаться въ плоскости* **AB**, *будутъ работать съ тѣмъ же напряженіемъ матеріала, какое онѣ имѣли бы при одинаковомъ расположеніи ихъ вдоль оси балки* **AB**, т. е. при $\beta=0$.

Видно при этомъ, что крѣпость связанныхъ между собою наклонныхъ полосъ BC и BD не зависитъ отъ угла β, составляемаго ими съ осью балки. Инж. Шуховъ въ своихъ сѣтчатыхъ балкахъ дѣлаетъ $tg\beta=0{,}4$.

Обращаясь теперь отъ разсмотрѣнія элемента сѣтки къ разсмотрѣнію цѣлой сѣтчатой балки (фиг. 227), мы можемъ сказать, что разсчетъ ея ничѣмъ не будетъ отличаться отъ балки съ прямолинейной осью AB (фиг. 227). Пусть, напр., на данномъ протяженіи EF по ширинѣ сѣтчатой балки, произвольное поперечное сѣченіе NN пересѣкаетъ m полосъ, направленныхъ $\|ab$, и m полосъ $\|ac$; тогда крѣпость такой балки будетъ одинакова съ крѣпостью $2m$ полосъ, расположенныхъ $\|$ оси балки AB, независимо отъ β. Для большей надежности разсчета при этомъ слѣдуетъ предполагать, что каждый рядъ полосъ будетъ имѣть свой нейтральный слой yy (фиг. 228).

Такія сѣтчатыя балки находятъ себѣ въ практикѣ обширное примѣненіе въ видѣ арочныхъ стропильныхъ фермъ *), съ наклонными струнами, протянутыми отъ различныхъ точекъ арки къ опорамъ. Употребленіе же плоскихъ сѣтчатыхъ балокъ, т. е. съ сѣткою, расположенною вдоль нѣкоторой плоскости, не представляетъ особыхъ выгодъ, п. ч здѣсь идутъ въ дѣло профили съ небольшой сравнительно

*) Разсчетъ и условія раціональнаго устройства арочныхъ фермъ даны въ сочиненіи *В. Г. Шухова — Стропила.* (Изданіе Политехническаго Общества въ Москвѣ).

высотою, результатомъ чего является менѣе выгодное использованіе матеріала, чѣмъ при высокихъ профиляхъ, и полученіе большей стрѣлы прогиба, чѣмъ въ послѣднемъ случаѣ.

57. **Балки изъ тавроваго желѣза.** *a*) *Прокатныя балки.* Видъ однотавроваго или просто тавроваго профиля даетъ намъ фиг. 229. Между главными размѣрами сѣченія *a*, *h* и *t* установлено опредѣленное соотношеніе. Данныя для разсчета нормальныхъ германскихъ тавровыхъ профилей приведены въ таблицѣ 40-й.

Таблица 40-я.

Тавровое желѣзо германскихъ нормальныхъ профилей (фиг. 229).

$a \times h \times t$	F	q	z_0	I_b	I_y	I_z
въ *мм.*	кв. *см.*	*кг.* на *мт*	*мм.*	въ *см.*		
60 . 30 . 5,5	4,64	3,6	7	5,18	2,91	9,98
70 . 35 . 6	5,94	4,6	8,1	9,03	5,12	17,3
80 . 40 . 7	7,91	6,2	9,3	15,7	8,87	30,1
90 . 45 . 8	10,16	7,9	10,5	24,8	14,4	49
100 . 50 . 8,5	12,02	9,4	11,6	37,4	21,2	71,3
120 . 60 . 10	17	13,3	13,8	75	43,2	145
140 . 70 . 11,5	22,8	17,8	16,1	138,2	79,1	265
160 . 80 . 13	29,5	23	18,3	233	134	446
180 . 90 . 14,5	37	28,9	20,5	368	213	709
200 . 100 . 16	45,4	35,4	22,8	559	323	1073
20 . 20 . 3	1,11	0,9	6,1	0,82	0,40	0,21
25 . 25 . 3,5	1,63	1,3	7,5	1,85	0,93	0,46
30 . 30 . 4	2,24	1,7	9	3,67	1,86	0,92
35 . 35 . 4,5	2,95	2,3	10,4	6,53	3,34	1,63
40 . 40 . 5	3,75	2,9	11,8	10,78	5,56	2,70
45 . 45 . 5,5	4,65	3,6	13,3	16,97	8,74	4,23
50 . 50 . 6	5,64	4,4	14,7	25,3	13,1	6,33
60 . 60 . 7	7,91	6,2	17,6	50,9	26,4	12,8
70 . 70 . 8	10,6	8,2	20,4	92,5	48,4	23,1
80 . 80 . 9	13,6	10,6	23,3	155	81,5	38,8
90 . 90 . 10	17	13,3	26,2	246	129	61,4
100 . 100 . 11	20,8	16,2	29	370	195	92,7
120 . 120 . 13	29,5	23	34,8	746	389	189
140 . 140 . 15	39,8	31	40,5	1387	734	347

Таблица 41-я.

Тавровые профили Брянскаго завода.

$a \times h \times t$.	$F \begin{cases} кв. \\ см. \end{cases}$	$q \frac{фн.}{фт.}$	z_0 см.	I_y	W_y	I_z	W_z
				въ сантиметрахъ			
$3\frac{3}{4} \times 3\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$ д.	27,76	16	2,96	225,5	34,35	117,16	24,6
$3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} \times \frac{7}{16}$ "	25,56	14,65	2,06	158,8	23,2	328,5	43,1
$5 \times 2\frac{1}{2} \times \frac{13}{32}$ "	18,55	10,68	1,45	53	10,82	176,3	27,76
$3 \times 3 \times \frac{3}{8}$ " .	13,58	7,95	2,25	73,08	13,6	35,5	9,32
$2 \times 2 \times \frac{1}{4}$ " .	6,05	3,47	1,5	14,7	4,1	7,0	2,75
$60 \times 30 \times 6$ *мм.*	5,04	2,95	0,73	3,1	1,4	10,84	3,61

Для тавровыхъ профилей Брянскаго завода данныя сгруппированы въ табл. 41-й.

Сравнивая между собою съ одной стороны данныя тб. 30, а съ другой данныя таблицъ 34 — 41, нетрудно обнаружить, что при одномъ и томъ же вѣсѣ балокъ, выгоднѣе всего матеріалъ бываетъ употребленъ въ двутавровыхъ балкахъ, затѣмъ идутъ коробчатыя балки, далѣе зеты и наконецъ неравнобокіе уголки и тавры.

б) Клепаныя тавровыя балки. Типы сѣченій такихъ балокъ представлены на фиг. 230. Разсчетъ ихъ можетъ быть легко производимъ, пользуясь таблицами *Boehm & John* для двутавровыхъ сѣченій вдвое большей высоты противъ даннаго тавроваго.

Пусть, напр., двутавровая балка съ высотою h, изображенная на фиг. 231, представляетъ собою удвоенный данный тавровый профиль и имѣетъ относительно оси yy моментъ инерціи I. Если xx будетъ проходить чрезъ ц. т. тавроваго сѣченія $\|$ yy и на разстояніи a отъ послѣдней, тогда, называя площадь тавроваго сѣченія чрезъ F, а моментъ инерціи его относительно оси xx — чрезъ i, будемъ имѣть:

$$I = 2(i + F.a^2); \text{ откуда } i = \frac{1}{2}.I - F.a^2.$$

По вопросу о разсчетѣ балокъ и покрытій изъ волнистаго желѣза рекомендуемъ брошюру инж.-мех. П. С. Страхова — „Волнистое желѣзо и его примѣненія въ строительномъ дѣлѣ“. Изданіе Политехническаго Общества въ Москвѣ.

По вопросу о разсчетѣ и примѣненіяхъ рельсовыхъ балокъ рекомендуемъ брошюру инж.-мех. Е. В. Зотикова — „Желѣзно-дорожные рельсы, какъ балки. Сравненіе стоимости рельсовыхъ и прокатныхъ двутавровыхъ балокъ“. Въ брошюрѣ доказывается нераціональность и невыгодность рельсовыхъ балокъ.

Чугунныя балки.

58. **Особенности, наблюдаемыя при сгибаніи чугунныхъ балокъ.** При изложеніи общей теоріи сгибанія мы предполагали (см. §/2), что согнутое тѣло состоитъ изъ элементовъ въ видѣ продольныхъ матеріальныхъ линій, у которыхъ:

1) вытяжка возрастаетъ прямо пропорціонально разстояніямъ взятыхъ линій отъ нейтральнаго слоя,

2) напряженіе матеріала слѣдуетъ тому же закону измѣненія, какъ и вытяжка (см. ф-лу 2), т. к. величина коэф. упругости E является постоянною величиною.

Проф. *Бахъ* (*Carl Bach in Stuttgart*) обнаружилъ опытнымъ путемъ, что при соблюденіи 1-го условія въ чугунныхъ балкахъ второе условіе не выполняется, т. к. коэф. упругости при растяженіи чугуна не есть постоянная величина. Съ увеличеніемъ напряженія матеріала величина E для чугуна уменьшается *). Такимъ образомъ если прямая ob (фиг. 232) будетъ изображать графически законъ измѣненія вытяжки при сгибаніи согнутаго бруса при переходѣ отъ одной продольной линіи къ другой, тогда законъ измѣненія напряженій представится уже не прямою od, а кривою omc, касательною къ этой прямой.

Слѣд., для волокна, отстоящаго на разстояніе z отъ нейтральнаго слоя, вытяжка будетъ представлена на чертежѣ (фиг. 232) длиною ab, а напряженіе длиною ac вмѣсто ad.

При выводѣ ф-лы 9 (см. § 3), выражающей равенство моментовъ внѣшней нагрузки и внутреннихъ силъ, величину E мы выводили за знакъ интеграла, какъ постоянное, а здѣсь эта величина будетъ перемѣнною. Чрезъ это вводится въ разсчетное у-ріе чугунной балки нѣкоторая ошибка. По счастію эта ошибка выходитъ въ пользу крѣпости балки: пусть балка разсчитывается съ допускаемымъ напряженіемъ ac (фиг. 232); тогда по изложенной теоріи (§ 3) предполагается, что всѣ напряженія въ поперечномъ сѣченіи будутъ измѣняться по закону, выражаемому прямой линіей oc, а они измѣняются на самомъ дѣлѣ по закону, выражаемому кривой omc, т. е. въ дѣйствительности сумма моментовъ внутреннихъ силъ будетъ всегда больше величины, вычисляемой

---

*) Крайними значеніями E (коэф. упруг. 1-го рода) считаются для чугуна 7500 и 10500 *кг.* на кв. *мм*, а соотвѣтственныя величины G (коэф. упр. 2-го рода)—2900 и 4000.

по ф-лѣ **9а** (см. § 4). На этомъ основаніи разсчетными ур-іями **10** и **11** (§ 4) пользуются также и въ случаѣ чугунныхъ балокъ, допуская въ пользу крѣпости балки, что напряженія въ сѣченіи согнутаго бруса измѣняются по закону, выражаемому прямой *ос*.

Другою особенностью, наблюдаемою при сгибаніи чугунныхъ балокъ является то, что въ нихъ величина напряженія, разрушающаго балку при сгибаніи, значительно болѣе, чѣмъ при растяженіи, и притомъ это напряженіе при сгибаніи зависитъ отъ формы поперечнаго сѣченія бруса и свойствъ матеріала, а именно: при одной и той же формѣ поперечнаго сѣченія бруса одна величина разрушающаго напряженія получается, когда брусъ будетъ подвергнутъ сгибанію безъ предварительнаго удаленія съ его поверхности мало тягучей литейной коры, и совершенно другую величину, значительно большую предыдущей, получимъ, если до испытанія балки кора будетъ удалена*).

Величины допускаемыхъ напряженій въ растянутыхъ элементахъ чугунныхъ сгибаемыхъ полосъ и балокъ даны въ таблицѣ 42-й; онѣ даны здѣсь для полосъ безъ литейной коры и съ корою въ трехъ случаяхъ:

a — когда нагрузка постоянна,

b — когда нагрузка измѣняетъ свою величину,

c — „ „ „ и величину и знакъ.

Въ сжатыхъ элементахъ сѣченія, имѣющаго двѣ оси симметріи, напряженіе берется то же, что и въ растянутыхъ элементахъ, а въ сѣченіяхъ съ одной осью симметріи въ сжатыхъ элементахъ напряженіе можетъ быть допущено въ 2 раза болѣе, чѣмъ въ растянутыхъ.

Таблица 42-я.

Допускаемыя напряженія въ растянутыхъ элементахъ чугунныхъ балокъ (въ *кг.* на кв. *мм.*).

Форма поперечнаго сѣченія балки.	Безъ литейной коры *a*	Безъ литейной коры *b*	Безъ литейной коры *c*	Съ литейной корой *a*	Съ литейной корой *b*	Съ литейной корой *c*
Круглая и квадратная, когда нагрузка дѣйствуетъ по діагонали	6,15	4,10	2,05	5,1	3,4	1,7
Прямоугольная. .	5,1	3,4	1,7	4,2	2,8	1,4
Двутавровая. . .	4,35	2,9	1,45	3,6	2,4	1,2

*) См работу проф *Баха* — *Die Biegungslehre und das Gusseisen*, напечатанную въ журн *Z d Ver deutsch Ing*, **1888** г.—стр 193—199, 221—226, 1089—1094, **1889** годъ—стр 140—143.

59. Чугунныя балки съ поперечными сѣченіями, имѣющими двѣ оси симметріи. Придавать сѣченіямъ чугунной балки такія формы, у которыхъ имѣются двѣ оси симметріи, *обязательно* только тогда, когда:

А) нагрузка мѣняетъ направленіе своего воздѣйствія (зубья и спицы зубчатыхъ колесъ, спицы шкивовъ, блоковъ, маховиковъ и т. п.);

Б) согнутая ось балки имѣетъ точки перегиба (§§ 22, 23, 25, 26, зад. 68—77).

Въ этомъ случаѣ растянутыми могутъ быть элементы, лежащіе и выше и ниже нейтральнаго слоя. Въ каждомъ сѣченіи наиболѣе опасною будетъ растянутая сторона сѣченія.

Ур-ія **10** и **11** (см. § 4) обращаются въ одно

$$M = B \,.\, W.$$

Величины B въ него вносятся изъ табл. 42-й.

Такія балки встрѣчаются съ сѣченіями: круглымъ сплошнымъ и полымъ, квадратнымъ сплошнымъ и полымъ, шестиграннымъ, двутавровымъ, крестообразнымъ, эллиптическимъ сплошнымъ и полымъ.

а) *Сѣченіе круглое сплошное*, діам. d; модуль сопротивленія будетъ вычисляться по ф-лѣ **19** (§ 8):

$$W = \frac{\pi}{32} \,.\, d^3 = 0{,}1 \,.\, d^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{19.}$$

б) *Сѣченіе круглое полое*, діам. d_1 и d_0, отношеніе $d_0 : d_1 = c$.

Величина модуля вычисляется по ф-лѣ **20** (§ 8):

$$W = 0.1 \; d_1^3 \, (1 - c^4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{20.}$$

Сѣченіе выполняютъ полымъ, когда изъ ф-лы **19** получится величина d болѣе 60 $^m/_m$. Толщина стѣнки полаго сѣченія

$$\delta = \frac{d_1 - d_0}{2} = d_1 \,.\, \frac{1 - c}{2}.$$

Величина δ не должна быть менѣе 15 *мм*.

Сравнивая ф-лы **19** и **20**, можно выразить d_1 чрезъ d и c слѣд. образомъ:

$$d_1 = d \cdot \sqrt[3]{1 - c^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{20a.}$$

При c = 0,4	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
$\frac{d_1}{d}$ = 1,01	1,02	1,033	1,05	1,068	1,1	1,14
$\frac{\delta}{d_1}$ = 0,3	0,25	0,225	0,2	0,175	0,15	0,125

в) Сѣченіе эллиптическое сплошное, оси его m и n,

$$m = 2a \; ; \; n = 2b.$$

По ф-лѣ **21** (см. § 9) модуль такого сѣченія будетъ

$$W = \frac{\pi . b . a^2}{4} = 0,1 \,.\, n \,.\, m^2 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{21.}$$

Отношеніе между осями $m:n$ выполняется отъ 2 до 3.

г) Сѣченіе эллиптическое полое съ круглою полостью діам. d (фиг. 233), на основаніи ф-лъ **19** и **21**, будутъ имѣть модуль

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{n \,.\, m^3 - d^4}{m} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{21,a.}$$

д) Сѣченіе прямоугольное со сторонами $a \times h$ будетъ имѣть модуль (см. ф-лу **16** въ § 5 и фиг. 95)

$$W = \frac{a \,.\, h^2}{6} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{16.}$$

е) Сѣченіе прямоугольное полое (фиг. 96) имѣетъ модуль (см. ф-лу **17** въ § 6)

$$W_1 = \frac{A \,.\, H^3 - A_1 \,.\, H_1^{\,3}}{6H} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{17.}$$

Сравнимъ между собою модули двухъ прямоугольныхъ балокъ — сплошной и полой — при условіи, что на образованіе ихъ затрачена одна и та же масса матеріала, т. е.

$$a . h = A . H - A_1 . H_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{к.}$$

Допустимъ, что

$$\frac{H}{A} = \frac{H_1}{A_1} = \frac{h}{a} = c \quad \ldots\ldots \quad \text{л,}$$

тогда по ф-лѣ к найдемъ

$$a^2 = A^2 - A^2_1$$

$$A^2_1 = A^2 - a^2$$

Затѣмъ отношеніе модулей будетъ

$$\frac{W_1}{W} = \frac{A . H^3 - A_1 . H^3_1}{H . a . h^2} = \psi$$

Пользуясь соотношеніемъ л, напишемъ

$$\psi = \frac{A^4 - A^4_1}{A . a^3} = \frac{A^2 - A^2_1}{a^2} \; \frac{A^2 + A^2_1}{A . a}$$

$$\psi = \frac{2\,A^2 - a^2}{A . a} = 2 \,.\, \frac{A}{a} - \frac{a}{A} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{131}$$

Т. к. отношеніе $A:a$ всегда болѣе 1, и то ψ тоже всегда болѣе 1. Напримѣръ,

$$A:a = 1{,}5 \ldots\ldots \psi = 2{,}33$$

$$„ \ = 2 \ \ldots\ldots \psi = 3{,}5 \text{ и т. д.}$$

При конструированіи балокъ съ такимъ сѣченіемъ надо имѣть въ виду, что толщина стѣнки м. б. выполнена не меньше 15 $^m/_m$.

ж) Сѣченіе двутавровое (фиг. 97) въ смыслѣ образованія модуля является производнымъ отъ прямоугольнаго полого сѣченія (по § *6, б*), поэтому модуль его напишется такъ:

$$H_1 = H - 2t;\ A_1 = A - d;$$

$$W = \frac{A.H^3 - (A-d).(H-2\,t)^3}{6.H} \ldots\ldots \mathbf{17,a}$$

з) Сѣченіе крестообразное (фиг. 89) будетъ имѣть модуль

$$W = \frac{a.h^3 + (h_1 - a).a_1^3}{6.h}$$

60. **Задачи № 102**. Для треугольника съ основаніемъ a и высотою e найти моментъ инерціи относительно осей yy, xx и oo (фиг. 234), параллельныхъ одна другой, причемъ ось oo проходитъ чрезъ ц. т. сѣченія.

$$dF = y.dz;\ y = a.\frac{e-z}{e}$$

$$I_y = \int_0^e z^2.a.\frac{e-z}{e}.dz = \frac{a.e^3}{12} \ldots\ldots \mathbf{132}$$

Пользуясь ф-лой **14** (§ 5), напишемъ, что

$$I_x = a.e^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = \frac{a.e^3}{4} \ldots\ldots \mathbf{133}$$

При помощи ф-лы **117** (§ 43) получимъ

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= I_y - F.\frac{e^2}{9} = \frac{a.e^3}{12} - \frac{a.e}{2}.\frac{e^2}{9} = \frac{a.e^3}{36} \\ I_0 &= I_x - F.\frac{4\,e^2}{9} = \frac{a.e^3}{4} - \frac{a.e}{2}.\frac{4\,e^2}{9} = \frac{a.e^3}{36} \end{aligned}\right\} \ldots \mathbf{134}$$

№ 103. Найти моментъ инерціи ромба или, равновеликаго съ нимъ по площади, треугольника, поставленнаго на ребро (фиг. 235).

Отв. $\dfrac{a.e^3}{6}$, или $\dfrac{a.h^3}{48}$.

№ 104. Найти моментъ инерціи и модуль сопротивленія сѣченія въ видѣ правильнаго 6-угольника со стороною a.

По ф-ламъ **132** и **133** выраженіе момента инерціи для 6-угольника съ расположеніемъ фиг. 236 будетъ:

$$I = 4 . \frac{a . e^3}{12} + 2 . \frac{a . e^3}{4} = \frac{5}{6} . a . e^3$$

$$e = \frac{a}{2} . \sqrt{3}\,;\; I = \frac{5}{16} . a^4 . \sqrt{3} = 0{,}54 . a^4 \quad \dots\dots \quad \mathbf{135.}$$

Выраженіе модуля при расположеніи фиг. 236 будетъ

$$W = \frac{5}{6} . a . e^2 = \frac{5}{8} . a^3 = 0{,}625 . a^3 \quad \dots\dots \quad \mathbf{136.}$$

Для нахожденія I въ случаѣ 6-угольника при расположеніи его, какъ на фиг. 237, пишемъ моментъ инерціи для разности площадей ABC и CDE (по даннымъ задачи № 103):

$$I = 4 . e . \frac{a^3}{6} - 2 . e \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} . a^4 . \sqrt{3}\,,$$

что тождественно съ ф-лой **135;** а новое выраженіе модуля будетъ

$$W_1 = \frac{5}{16}\, a^3 . \sqrt{3} = 0{,}54 . a^3 \quad \dots\dots \quad \mathbf{137,}$$

т. е. *наименьшій модуль 6-угольнаго сѣченія получается тогда, когда два противоположные ребра 6-гранника находятся въ плоскости сгибанія.*

№ 105. Найти выраженіе модуля сопротивленія балки съ чечевицеобразнымъ сѣченіемъ, оси котораго $2a$ и $2b$ (фиг. 98) съ отношеніемъ $a : b = n$.

При помощи ф-лы **18** (§ 7) моментъ инерціи всего сѣченія напишется такъ

$$I = \frac{r^4}{6}\left[3\varphi - 3 . Sin\varphi . Cos\varphi - 2 . Sin^3\varphi . Cos\varphi\right]$$

$$b = r . Sin\varphi;\quad r - a = r . Cos\varphi;\quad (r - a)^2 + b^2 = r^2;$$

$$\text{откуда } r = \frac{a^2 + b^2}{2a} = b . \frac{1 + n^2}{2n} \quad \dots\dots \quad \mathbf{м}$$

$$Sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{2n}{1 + n^2} \quad \dots\dots \quad \mathbf{н}$$

$$Cos\varphi = \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \quad \dots\dots \quad \mathbf{о}$$

$$\varphi = arc\ Sin \frac{2n}{1 + n^2} \quad \dots\dots \quad \mathbf{р}$$

Таблица 43-я.

Чечевицеобразное сѣченіе.

n	$= 0,5$	$0,4$	$0,3$
$\frac{r}{b}$	$= 1,25$	$1,45$	$1,71$
$Sin\,\varphi$	$= 0,8$	$0,69$	$0,585$
$Cos\,\varphi$	$= 0,6$	$0,723$	$0,811$
$\varphi : \pi$	$= 0,295$	$0,242$	$0,199$
$I : b^4$	$= 0,295$	$0,23$	$0,2$

61. **Чугунныя балки съ поперечными сѣченіями, имѣющими одну ось симметріи.** Примѣромъ такого сѣченія, часто встрѣчающагося при выполненіи балокъ изъ чугуна, можетъ служить тавровое сѣченіе (фиг. 238). Употребленіе такой формы сѣченія допускается тогда только, когда нагрузка не мѣняетъ направленія своего воздѣйствія на балку, и когда, по свойству нагруженія балки, упругая линія не имѣетъ ни одной точки перегиба. Особенность разсчета балокъ съ такимъ сѣченіемъ заключается въ томъ, что здѣсь въ области сжатыхъ элементовъ сѣченія допускается величина напряженія B_2, отличающаяся отъ B_1, допускаемаго напряженія въ области растянутыхъ элементовъ сѣченія. Въ чугунѣ отношеніе между этими величинами допускается имѣть равнымъ

$$B_2 : B_1 = \text{отъ } 2 \text{ до } 3.$$

Поэтому и провѣрка крѣпости балки дѣлается здѣсь по обѣимъ ф-ламъ **10** и **11** (см. § 4), а не по одной.

а. Разсчетъ балки существующей. Даны размѣры балки

$$h \times a \times t \times d,$$

требуется найти безопасную величину сгибающаго момента, принимая $B_2 = 2B_1$. Тогда прежде всего находится положеніе нейтральнаго слоя yy, проходящаго чрезъ ц. т. сѣченія. По теоремѣ о ц. т. пишемъ, что статическій моментъ всей площади сѣченія = суммѣ таковыхъ для отдѣльныхъ элементовъ площади. Беремъ моменты относительно линіи mm:

$$[h.d + (a-d).t].e_1 = h.d.\frac{h}{2} + (a-d).t.\frac{t}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{ф}$$

$$e_1 = \frac{1}{2}.\frac{d.h^2 + (a-d).t^2}{d.h + (a-d).t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{138.}$$

Затѣмъ $e_2 = h - e_1$.

Послѣ этого высота сѣченія разбивается на двѣ части въ отношеніи $e_2 : e_1$, находится положеніе ц. т. O и строится прямая напряженій fl (фиг. 238). Тогда

$$H_2 : H_1 = e_2 : e_1.$$

Если окажется, что

$$\frac{e_2}{e_1} \text{ болѣе } 2, \text{ то } \frac{H_2}{H_1} \text{ будетъ также болѣе } 2;$$

въ этомъ случаѣ разсчетною стороною будетъ сжатая часть сѣченія, т. е. надо будетъ сдѣлать $H_2 = B_2$, тогда

$$H_1 = B_2 . \frac{e_1}{e_2} \text{ будетъ менѣе } B_1,$$

слѣд., верхніе, растянутые элементы сѣченія и подавно будутъ при этомъ крѣпки.

А если бы взять при этомъ $H_1 = B_1$, тогда

$$H_2 = B_1 . \frac{e_2}{e_1} \text{ оказалось бы болѣе } 2B_1,$$

что недопустимо.

Наоборотъ, если $\frac{e_2}{e_1}$ менѣе 2, то и $\frac{H_2}{H_1}$ будетъ менѣе 2; въ такомъ случаѣ разсчитывается верхняя, растянутая сторона сѣченія, т. е. берется $H_1 = B_1$, тогда

$$H_2 = B_1 . \frac{e_2}{e_1} \text{ будетъ менѣе } 2B_1,$$

что и слѣдуетъ имѣть.

Въ случаѣ $e_2 = 2e_1$ получится $H_2 = 2H_1$, и обѣ части сѣченія будутъ равноопасны. Такое сѣченіе наз. *благопріятнымъ*.

Моментъ инерціи тавроваго сѣченія, пользуясь ф-лой **14** (§ 5) напишется такъ:

$$I = \frac{1}{3}\left\{d(e_2^3 + e_1^3) + (a - d) . [e_1^3 - (e_1 - t)^3]\right\} \quad . \; . \; . \quad \mathbf{139.}$$

Если e_2 болѣе $2e_1$, разсчетное ур-іе будетъ:

$$M = B_2 . I : e_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{140,}$$

а въ случаѣ, когда e_2 менѣе $2e_1$, разсчетнымъ ур-іемъ будетъ

$$M = B_1 . I : e_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{141.}$$

б. *Разсчетъ балки строющейся.* Въ этомъ случаѣ стараются выполнить сѣченіе благопріятнымъ, т. е. удовлетворяютъ условію

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{e_2}{e_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{142}$$

При этомъ оба ур-ія **140** и **141** даютъ одну и ту же величину безопаснаго момента, т. е. и сжатые и растянутые элементы сѣченія будутъ равнокрѣпки. Въ такомъ случаѣ можно выбрать только 3 размѣра сѣченія, напр.

$$d = 1\,;\, h = \beta_1 \,.\, d\,;\, t = \beta_2 \,.\, d\,;$$

размѣръ же $a = x \,.\, d$ нужно будетъ отыскать, удовлетворяя условіе **142**.

Пусть $B_2 = 2B_1$, тогда $e_2 = 2\, e_1$. Съ другой стороны

$$e_1 + e_2 = h = \beta_1 \,.\, d = 3\, e_1, \text{ откуда}$$

$$e_1 = \frac{\beta_1 \,.\, d}{3};\; e_2 = \frac{2}{3} \,.\, \beta_1 \,.\, d$$

По ф-лѣ **ф** этого § имѣемъ

$$a = d + \frac{h \,.\, d}{t} \cdot \frac{h - 2e_1}{2e_1 - t} = x \,.\, d$$

$$x = 1 + \frac{h}{t}\; \frac{h - 2e_1}{2e_1 - t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{143}$$

При соблюденіи этого условія точка O, ц. т. сѣченія, будетъ дѣлить высоту балки въ требуемомъ отношеніи 1 : 2.

Послѣ этого ф-ла **139** обратится въ такую

$$I = \beta_3 \,.\, d^4,$$

а разсчетное ур-іе будетъ

$$M = B_2 \,.\, \frac{I}{e_2} = B_1 \,.\, \frac{I}{e_1} = B_2 \,.\, \frac{3\beta_3 \,.\, d^4}{2\beta_1 \,.\, d},$$

$$d^3 = \frac{2 \,.\, \beta_1}{3 \,.\, \beta_3} \cdot \frac{M}{B_2}.$$

Такъ находится разсчетная 1 сѣченія; при этомъ d не должно быть менѣе 15 $^m/_m$. Если же окажется изъ разсчета, что d выходитъ менѣе 15 $^m/_m$, это будетъ значить, что сѣченіе выбрано чрезмѣрно высокимъ, т. е. коэффиціентъ β_1 излишне великъ. Измѣняя β_1, надо снова опредѣлить x изъ *143* и повторить разсчетъ съ новыми размѣрами сѣченія.

62. **Задачи. № 106**. У четырехъ тавровыхъ балокъ (фиг. 238) съ размѣрами:

$$d = 1;\; e_1 = 4 \,.\, d;\; e_2 = 8 \,.\, d,$$

при разсчетной толщинѣ t полки равной

$$d - 1{,}5\; d - 2\; d - 2{,}5\; d,$$

найти ширину полки подъ условіемъ, чтобы сѣченіе балки было благопріятнымъ, и сравнить между собою крѣпость этихъ балокъ.

Отв. Пользуясь ф-лами **143** и **139**, найдемъ слѣдующія данныя:

При $t:d=$	1	1,5	2	2,5
$a:d=$	7,86	5,92	5	4,5
$F:d^2=$	18,86	20,88	20	20,75
$I:d^4=$	275,94	271,33	266,67	262,72

Данныя этой таблицы показываютъ, что при измѣненіи t отъ $1,5 \,.\, d$ до $2,5 \,.\, d$ площади сѣченія балки, и слѣдовательно и вѣсъ ихъ, почти не мѣняются, тогда какъ моменты инерціи сѣченія балокъ, а стало быть и модули сопротивленія ихъ, все время уменьшаются.

№ 107. Тавровая балка (фиг. 238) имѣетъ размѣры $t=1,5\ d$; $e_2=3,5\ d$: $e_1=10,5\,.\,d$.

Найти для нея недостающія разсчетныя величины.

Отв. $a=12,8\,.\,d$; $F=31,7\ d^2$;

$$I=537,3\,.\,d^4$$

№ 108. Тавровая балка (фиг. 238) имѣетъ размѣры

$$t=2\,.\,d;\ e_2=4\,.\,d;\ e_1=12\,.\,d.$$

Найти для нея недостающія разсчетныя величины.

Отв $a=11,66\,.\,d$; $F=37,32\,.\,d^2$;

$$I=762,97\,.\,d^4.$$

Сравненіе этихъ двухъ примѣровъ съ данными задачи № 106 показываетъ, насколько быстро возрастаетъ крѣпость балки при увеличеніи ея высоты.

Сопротивленіе призматическихъ тѣлъ одновременному воздѣйствію нормальной и тангенціальной нагрузки.

Въ дополненіе къ разсмотрѣннымъ ранѣе примѣрамъ (см. § *55 г*, 66 въ ч. I) разсчета тѣлъ на одновременное воздѣйствіе нормальной и тангенціальной нагрузки, приведемъ здѣсь еще нѣсколько характерныхъ и наиболѣе часто встрѣчающихся въ практикѣ случаевъ нагруженія.

63. **Разсчетъ цилиндра на одновременное дѣйствіе сгибающей и крутящей нагрузки.** Въ этомъ случаѣ пользуются ф-лой *Баха* (см. ф-лу **96** въ § *55 в*, ч. I) для опредѣленія сложнаго напряженія:

$$H = \frac{3}{8} \cdot h + \frac{5}{8}\sqrt{h^2 + (2\,x \cdot t)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{96.}$$

Пусть обозначаютъ:

M_0 — крутящій моментъ,

M_1 — сгибающій „

y — діам. разсчетнаго сѣченія,

$W_0 = \pi \cdot y^3 : 16$ — модуль сопротивленія при крученіи,

$W_1 = \pi \cdot y^3 : 32$ — „ „ „ сгибаніи.

$$\text{Тогда} \quad h = \frac{M_1}{W_1}; \quad t = \frac{M_0}{W_0} = \frac{M_0}{2 \cdot W_1}$$

$$t : h = M_0 : 2M_1$$

$$\left.\begin{aligned} H &= h \cdot A = A \cdot \frac{M_1}{W_1} \\ A &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{x \cdot M_0}{M_1}\right)^2} \\ x &= \frac{4}{5} \cdot \frac{h}{t} \; . \; . \; . \; . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{144.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что разсчетъ можетъ быть сведенъ здѣсь къ разсчету на одно сгибаніе, но только по сложному моменту $A . M_1$,

опредѣляемому въ зависимости какъ отъ величины заданныхъ моментовъ M_0 и M_1, такъ и отъ способа воздѣйствія ихъ на тѣло.

64. **Разсчетъ призматическаго тѣла на одновременное воздѣйствіе растягивающей и сгибающей нагрузки** (фиг. 239). *a. Общій случай.* Пусть нагрузка R на призм тѣло даетъ слагающія: Q — по оси бруса и P — нормально къ оси. Тогда опаснымъ сѣченіемъ, очевидно, будетъ A, какъ и въ случаѣ воздѣйствія одной нагрузки P. Распредѣленіе напряженій въ сѣченіи A даетъ намъ фиг. 240: прямая p_1q_1 показываетъ законъ распредѣленія напряженій, вызываемыхъ въ различныхъ точкахъ сѣченія отъ сгибанія бруса, а прямая pq ||-ая p_1q_1 показываетъ, что каждое изъ предыдущихъ напряженій получаетъ еще приращеніе въ видѣ напряженія h_0, являющагося отъ растяженія бруса силою Q. Если F — площадь сѣченія, I — его моментъ инерціи относительно оси у-овъ, т. е. оси, проходящей въ сѣченіи чрезъ ц. т. его A перпендикулярно плоскости изгиба, тогда:

$$h_0 = \frac{Q}{F};\ h_1 = \frac{P \, . \, l \, . \, e_1}{I};\ h_2 = \frac{P \, . \, l \, . \, e_2}{I}$$

Разсчетное ур-іе для растянутыхъ элементовъ сѣченія будетъ

$$B_1 = \text{или болѣе } h_0 + h_1, \text{ или}$$

$$B_1 \overline{>} \frac{Q}{F} + \frac{P \, . \, l \, . \, e_1}{I} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{145},$$

а для сжатыхъ элементовъ сѣченія —

$$B_2 = \text{или болѣе } h_2 - h_0, \text{ или}$$

$$B_2 \overline{>} \frac{P \, l \, e_2}{I} - \frac{Q}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{146}$$

Если сѣченіе имѣетъ двѣ оси симметріи, а брусъ желѣзный, стальной или деревянный, т. е. выполненъ изъ такихъ матеріаловъ, для которыхъ допускаемыя величины B_1 и B_2 одинаковы, то достаточно удовлетворить одно только ур-іе **145**, а **146**-е будетъ удовлетворено само собою; въ случаѣ же сѣченія съ одною осью симметріи, расположенной въ плоскости сгибанія, а также въ случаѣ чугуннаго бруса, приходится обращаться къ повѣркѣ крѣпости бруса по обѣимъ вышенаписаннымъ ф-ламъ.

б) Эксцентрическое растяженіе бруса. Подобный же эффектъ м б. вызванъ въ призматическомъ тѣлѣ и одной продольной нагрузкой Q, если она будетъ дѣйствовать на брусъ съ эксцентриситетомъ a (фиг. 241). Разница отъ предыдущаго будетъ только въ томъ, что здѣсь почти всѣ сѣченія между A и C будутъ одинаково опасны, т к. величина плеча сгибающей силы для сѣченій A и C разнится только на величину стрѣлки прогиба бруса f, допускаемая величина которой вообще можетъ быть весьма невелика.

Но наиболѣе опасными сѣченіями здѣсь будутъ все таки сѣченія, прилегающія къ C, гдѣ приложена внѣшняя нагрузка.

Разсчетныя ур-ія для растянутыхъ и сжатыхъ элементовъ сѣченія, вмѣсто ф-лъ **145** и **146**, будутъ такими:

$$B_1 \gtrless \frac{Q}{F}\left(\frac{a \cdot e_1 \cdot F}{I} + 1\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \textbf{147.}$$

$$B_2 \gtrless \frac{Q}{F}\left(\frac{a \cdot e_2 \cdot F}{I} - 1\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \textbf{148}$$

Величины стрѣлы прогиба м. б. опредѣлены обычнымъ путемъ:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = Q \cdot a = Const. \text{ (фиг. 241).}$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dz}{dx} = Q \cdot a \cdot x + c.$$

$$\text{При } x = l \ldots \frac{dz}{dx} = 0 \ldots c = -Q \cdot a \cdot l$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dz}{dx} = Q \cdot a\,(x - l).$$

$$E \cdot I \cdot z = Q \cdot a \cdot \frac{(x-l)^2}{2} + c_1 \cdot$$

$$\text{При } x = l \ldots z = 0 \ldots c_1 = 0$$

$$\text{При } x = 0 \ldots z = f = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot a \cdot l^2}{E \cdot I} \quad \cdots\cdots \quad \textbf{149.}$$

Если желаютъ, что бы отклоненіе оси балки $cc_1 = f$ (фиг. 241) не превосходило опредѣленной заданной величины, надо вести опредѣленіе размѣровъ поперечнаго сѣченія по ф-лѣ **149.**

65. **Задачи. № 109.** Нагрузка Q, воспринимаемая ушкомъ L (фиг. 242) передается на цилиндрическую часть желѣзнаго стержня діам. d съ эксцентриситетомъ a. Составить разсчетное ур-іе стержня и выяснить зависимость его крѣпости отъ величины плеча a.

Повѣрку крѣпости въ этомъ случаѣ достаточно сдѣлать по ф-лѣ **147,** гдѣ

$$e_1 = \frac{d}{2}\,;\ F = \frac{\pi}{4} \cdot d^2\,;\ I = \frac{\pi}{64} \cdot d^4,$$

$$B_1 = \frac{Q}{F}\left(1 + 8 \cdot \frac{f}{d}\right) = \frac{Q}{F} \cdot C.$$

Эта ф-ла показываетъ, что разсчетъ тѣла на эксцентричное растяженіе сводится къ разсчету на центральное растяженіе, но подъ дѣй-

ствіемъ нагрузки $C \, . \, Q$, всегда значительно превышающей заданную. Величины поправочнаго коэффиціента таковы:

При $f:d=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
Коэф. $C=2$	3	4	5	6	7	8	9 и т. д.

№ 110. Діагональная полоса C (фиг. 243) приклепана къ поясу D рѣшетчатой балки т. о., что передача нагрузки въ 1-мъ заклепочномъ ряду mn происходитъ съ эксцентриситетомъ a, т. к. заклепка h поставлена отъ оси діагонали на разстояніи $b=35^m/_m$. Выяснить вліяніе этого плеча b на крѣпость діагонали.

Размѣры полосы $120 \times 10^m/_m$, діам. заклепочнаго отверстія $\partial=20$.

Найдемъ положеніе ц. т. сѣченія mn:

$$20.10.25+10.(120-20).(60+a)=120.10.60,$$

откуда $a=7$ *мм.*

Тогда $$e_1=67; \; e_2=53;$$

$$F=(120-20).10=1000 \text{ кв. } мм.$$

Моментъ инерціи сѣченія mn относительно оси yy будетъ:

$$I=\frac{1}{3}.10\left[53^3+67^3-52^3+32^3\right]=1139333 \; мм^4.$$

$$I:F=1139{,}3 \; мм^2.$$

По ф-лѣ **147** имѣемъ:

$$B_1=\frac{Q}{F}.\left[\frac{7.67}{1139{,}3}+1\right]=\frac{1{,}412.Q}{F},$$

т. е благодаря существованію плеча b въ $35^m/_m$ напряженіе въ діагонали повысилось болѣе нежели на $40^0/_0$, а чрезъ это нагрузка на нее д. б. уменьшена въ отношеніи $1:1{,}412=0{,}708$, или на $30^0/_0$. Выбросивши заклепку h (фиг. 243) и располагая 1-ю заклепку $г$ центрально, можно возстановить крѣпость діагональной полосы.

№ 111. На фиг. 244 изображенъ эскизъ подвѣски для вала и ея сѣченіе; на подвѣску передается нагрузка $Q=500$ *кг.* съ плечомъ $b=55$ *мм.* относительно крайнихъ растянутыхъ элементовъ сѣченія. Выяснить условія крѣпости послѣдняго.

Для опредѣленія положенія ц. т. O имѣемъ:

$$(80.18+127.18).e_1=80.18.9+127.18.(18+63{,}5), \text{ откуда}$$

$$e_1=53{,}5; \; e_2=127+18-53{,}5=91{,}5;$$

$$a=53{,}5+55=108{,}5; \; F=18(127+80)=3726.$$

$$I=\frac{1}{3}\left[18(91,5^3+53,5^3)+62(53,5^3-35,5^3)\right]=7770768\ мм^4.$$

$$I.F=2085,5\ мм^2$$

По **147** . . . . . . $B_1=\frac{Q}{F}\left(\frac{108,5\,.\,53,5}{2085,5}+1\right)=\frac{3,75\,.\,Q}{F}=0,5.$

„ **148** . . . . . . $B_2=\frac{Q}{F}\left(\frac{108,5\,.\,91,5}{2085,5}-1\right)=\frac{3,76\,.\,Q}{F}$

Напряженіе B_2 могло бы быть въ 2 раза болѣе B_1, а здѣсь они равны: крѣпость у сѣченія вполнѣ достаточная, но утилизація крѣпости матеріала могла бы быть и лучше.

№ 112. На фиг. 245 изображено соединеніе растягиваемыхъ деревянныхъ брусьевъ въ длину при помощи врѣзныхъ зубьевъ, соприкасающихся между собою по плоскости *mn*; выяснить условія крѣпости такого соединенія.

На стыкѣ *mn* происходитъ смятіе матеріала. Разсчетнымъ ур-іемъ этого стыка будетъ:

$$Q=D.\kappa.d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{л.}$$

Сѣченіе *mp* испытываетъ эксцентричное растяженіе. Величины, входящія въ ф-лу **147**, будутъ:

$$F=d.h;\quad a=\frac{h+\kappa}{2};\quad e_1=\frac{h}{2};\quad I=\frac{d.h^3}{12}$$

$$B_1=\frac{Q}{d.h}\left(1+6.\frac{a}{h}\right)=Q.\frac{h+6a}{d.h^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{м.}$$

Сравнивая между собою два найденныя ур-ія крѣпости, получимъ:

$$D:B_1=\frac{h^2}{\kappa(h+6a)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{н.}$$

Обыкновенно въ этомъ соединеніи дѣлается $h=2\kappa$, тогда найдемъ $a=1,5.\kappa$, и по ф-лѣ **н**:

$$D:B_1=\frac{h}{\kappa}.\frac{1}{1+6.\frac{a}{\kappa}.\frac{\kappa}{h}}=4:11.$$

Таково д. б. соотношеніе между напряженіями, чтобы оба разсчетныхъ сѣченія были одинаково крѣпки. Если

$$D=0,4. \; . \; . \; . \; . \; . \quad B_1=\frac{11}{4}.0,4=1,1,$$

т. е. установленное въ практикѣ соотношеніе можно признать возможнымъ для исполненія. Но тогда по ф-лѣ **л** получимъ

$$Q=0,4.\kappa.d,$$

а цѣлое сѣченіе бруса могло бы передавать растягивающую нагрузку

$$Q_1 = 1{,}1 \, . \, (\kappa + 2h) \, . \, d = 1{,}1 \, . \, 5 \, . \, \kappa \, . \, d$$

$$Q : Q_1 = 4 : 55 \simeq \mathbf{0{,}073},$$

т. е. въ такомъ соединеніи не утилизируется даже и 8% употребленнаго въ дѣло матеріала. Болѣе раціональнымъ будетъ скрѣпленіе двухъ брусьевъ посредствомъ боковыхъ желѣзныхъ накладокъ, стянутыхъ поперечными болтами (см. *Худяковъ - Сидоровъ — Атласъ деталей машинъ*, изд. 3-е, ч. *1*, тб. *22*, фиг. *8*).

№ 113. На фиг. 246 — 247 изображено соединеніе концовъ двухъ желѣзныхъ (или стальныхъ) шахтныхъ стержней A и B; головки ихъ C и D охватываются половинками E и F муфты; эти половинки удерживаются какимъ-либо приспособленіемъ *) отъ распаденія и все соединеніе расклинивается клиномъ H. Стержни A и B нагружаются центрально нагрузкой $2P$. Найти разсчетное ур-іе для муфты $E-F$.

Прежде всего найдемъ центръ давленія нагрузки P на опорномъ полукольцѣ муфты, имѣющемъ ширину mn (фиг. 247).

Опредѣляя положеніе ц. т. K (фиг. 248) площади полукруга съ радіусомъ r, мы можемъ написать:

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad 2x \, . \, dx + 2y \, . \, dy = 0.$$

При $\quad y = 0 \ldots\ldots x = r$; при $x = r \ldots\ldots y = 0$

$$\frac{\pi \, . \, r^2}{2} \, . \, z = \int_0^r y \, . \, 2x \, . \, dy = \int_0^r 2x^2 \, . \, dx = \frac{2}{3} \, . \, r^3,$$

$$z = \frac{4r}{3\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{150}.$$

Пусть обозначаютъ (фиг. 247 и 249):

r_0 — радіусъ стержней A и B;

r_1 — радіусъ головокъ C и D, или внутренній радіусъ муфты $E-F$;

r_2 — внѣшній радіусъ муфты $E-F$;

z_0 — разстояніе ц. т. опорной поверхности mn (фиг. 247) отъ оси стержней;

z_1 — разстояніе ц. т. поперечнаго сѣченія одной изъ половинокъ муфты отъ оси стержней. По теоремѣ о ц. т., пользуясь ф-лой **150**, будемъ имѣть:

$$\frac{\pi}{2} \, . \, r_1^2 \, . \, \frac{4}{3\pi} \, . \, r_1 = \frac{\pi}{2} \, . \, r_0^2 \, . \, \frac{4}{3\pi} \, . \, r_0 + \pi \, . \, \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \, . \, z_0$$

$$z_0 = \frac{4}{3\pi} \, . \, \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^2 - r_0^2} \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{151}.$$

---

*) См. *Худяковъ-Сидоровъ, Атласъ деталей машинъ*, изд. 3-е, таблица 41-я.

Аналогично съ этимъ получимъ также, что

$$z_1 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{152.}$$

Сгибающій моментъ для каждой изъ половинокъ муфты будетъ

$$M = P.(z_1 - z_0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{153.}$$

Моментъ инерціи поперечнаго полукольцевого сѣченія каждой половинки муфты относительно линіи yy (фиг. 249), проходящей чрезъ ц. т. κ_1 ея сѣченія напишется такъ (см. ф-лы **19** въ § 8 и **117** въ § 43):

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r_2^4 - r_1^4}{2} - \pi . \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} . z_1^2 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{154.}$$

Для растянутыхъ элементовъ сѣченія, прилегающихъ къ линіи ab (фиг. 249), разсчетное ур-іе будетъ:

$$B_1 \overline{\gtrless} \frac{2P}{\pi . (r_2^2 - r_1^2)} + \frac{P.(z_1 - z_0) . z_1}{I} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{155,}$$

а для сжатыхъ элементовъ сѣченія, прилегающихъ къ образующей f (фиг. 249), разсчетное ур-іе будетъ:

$$B_2 \overline{\gtrless} \frac{P.(z_1 - z_0) . (r_2 - z_1)}{I} - \frac{2P}{\pi . (r_2^2 - r_1^2)} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{156.}$$

Оба эти ур-ія должны быть удовлетворены одновременно, задаваясь радіусомъ r_2. Величина его, очевидно, должна быть болѣе той, которую получимъ, сдѣлавъ въ ур-іи *155* плечо $z_1 = 0$, т. е. болѣе величины

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + \frac{2P}{\pi . B_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{157.}$$

Пусть, напр., $2P = 50.000$ *кг.* Допуская для стали $Z = 10$ *кг.* на кв. *мм.*, найдемъ $r_0 = 40$ *мм.* Примемъ затѣмъ на поверхности mn (фиг. 246) допускаемое напряженіе $D = 7{,}5$ *кг.*, тогда найдемъ

$$r_1 = \sqrt{40^2 + \frac{50000}{3{,}14 . 7{,}5}} = 61 \text{ мм.}$$

По ф-лѣ **151**... $z_0 = 32{,}6$ *мм.* Если примемъ $B_1 = 9$ *кг.*, то по ф-лѣ **157** найдемъ $r_2 = 75$ *мм.* Увеличивая исполняемую величину r_2 до 80 *мм.*, находимъ:

по **152** . . . $z_1 = 45{,}4$ *мм.* $= e_1$; $e_2 = 80 - 45{,}4 = 34{,}6$ *мм.*

по **153** . . . $M = 25000.(45{,}4 - 32{,}6) = 320000$ *кг.-мм.*

по **154** . . . $I = 10555600$ *мм*^{4}.

$$\text{по } \mathbf{155} \ldots B_1 = \frac{50000}{20106 - 11690} + \frac{320000.45,4}{10555600} =$$

$$= 5,94 + 1,36 = 7,3 \textit{ кг. на кв. мм.}$$

$$\text{по } \mathbf{156} \ldots B_2 = \frac{1,36.34,6}{45,4} - 5,94 = -4,9 \textit{ кг. на кв. мм.},$$

т. е. вся площадь сѣченія будетъ состоять изъ растянутыхъ элементовъ. Полученная величина B_1 показываетъ, что исполняемая величина r_2 могла бы быть и менѣе 80 *мм.* Если бы оставили ее равной 75 *мм.*, тогда тѣмъ же порядкомъ пришли бы къ слѣд. результатамъ:

$z_1 = e_1 = 43,4$ *мм.*	$I = 6854700$ *мм.*^{4}
$e_2 = 34,6$ „	$B_1 = 10,85$ *кг.* на кв. *мм.*
$a = 10,8$ „	$B_2 = 7,53$ „ „ „ „

№ 114. Замѣнить въ предыдущей задачѣ внѣшнее очертаніе муфты эллиптическимъ подъ тѣмъ условіемъ, чтобы эксцентриситетъ a при передачѣ давленія былъ $= 0$.

Опредѣляя координату *ц. т.* площади полуэллипса съ осями $2c$ и $2b$, получимъ (фиг. 250):

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y.dy = -\frac{b^2}{c^2}.x.dx.$$

$$\frac{\pi \,.\, c \,.\, b}{3}.z = \int_0^b y \,.\, 2x.dy = \frac{2b^2}{c^2}.\int_0^c x^2 \,.\, dx = \frac{2}{3} \,.\, b^2 \,.\, c$$

$$z = \frac{4}{3 \,.\, \pi}.b \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{158}.$$

Для поперечнаго сѣченія муфты, имѣющаго круглое внутреннее очертаніе съ радіусомъ r_1 и эллиптическое внѣшнее очертаніе съ полуосями b и c, ц. т. пусть находится въ k_0 (фиг. 250). Тогда:

$$\frac{\pi \,.\, c \,.\, b}{2}.\frac{4}{3\pi}.b = \frac{\pi \,.\, r_1^2}{2}.\frac{4}{3\pi}.r_1 + \left(\frac{\pi \,.\, b \,.\, c}{2} - \frac{\pi \,.\, r_1^2}{2}\right).z_0$$

$$z_0 = \frac{4}{3\pi}.\frac{c.b^2 - r_1^3}{c.b - r_1^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{159}.$$

Если размѣры осей эллипса подобраны такимъ образомъ, что передача давленія происходитъ безъ эксцентриситета, т. е. всѣ элементы сѣченія муфты работаютъ на одно растяженіе, тогда ф-лы **151** и **159** должны давать одну и ту же величину:

$$\frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^2 - r_0^2} = \frac{c.b^2 - r_1^3}{c.b - r_1^2}, \text{ откуда}$$

$$c = \frac{r_1^2}{b}.\frac{r_0^2}{r_0^2 - (r_0 + r_1).(b - r_1)} \ldots\ldots \mathbf{160}.$$

Разсчетное ур-іе муфты обратится въ слѣдующее:

$$2P = \text{или менѣе } Z . \pi . (b.c - r_1^2).$$

Пользуясь ф-лой **160**, можно привести это ур-іе къ такому виду:

$$2P \overline{\lessgtr} Z . \pi \quad r_1^2 . \frac{(r_0 + r_1).(b - r)}{r_0^2 - (r_0 + r_1).(b - r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{161.}$$

Задаваясь b, удовлетворяютъ ур-іе **161** по знаку неравенства, а затѣмъ вычисляютъ c по ф-лѣ **160.**

66. **Разсчетъ длинныхъ сжатыхъ стоекъ или колоннъ.** Сопротивленіе сжатію *длинной призмы*, или *стойки*, иначе *колонны* (фиг. 251), имѣющей вертикальную ось, обладающей полной однородностью матеріала и центрально нагруженной, ничѣмъ не должно было бы отличаться отъ сопротивленія сжатію *короткой* призмы (§ 33, *ч. I*). Но эти условія на практикѣ не достижимы, и явленіе сжатія стойки обыкновенно сопровождается искривленіемъ ея оси, т е. явленіемъ сгибанія.

Нагрузивши вертикальную стойку вдоль ея оси, отклонивши слегка ея свободный конецъ въ сторону (фиг. 251) и предоставивши затѣмъ стойку самой себѣ, мы увидимъ, что для нея будетъ существовать нѣкоторое опредѣленное положеніе равновѣсія, если только нагрузка не чрезмѣрно велика

Когда, искривленная воздѣйствіемъ продольной нагрузки, стойка находится въ равновѣсіи, безъ проявленія вредныхъ послѣдствій свободный конецъ стойки можетъ получить и дальнѣйшее небольшое отклоненіе по направленію изгиба отъ дѣйствія добавочной поперечной нагрузки, а по удаленіи ея сопротивленіе стойки беретъ перевѣсъ, и снова возстановляется равновѣсіе между продольною нагрузкою и внутренними силами въ томъ же самомъ положеніи, которое заняла согнутая ось стойки сначала.

Наибольшая величина нагрузки, при которой сопротивленіе согнутой стойки все еще въ состояніи уравновѣшивать собою дѣйствіе нагрузки, называется *ломающей нагрузкой*, такъ какъ малѣйшее увеличеніе ея ведетъ уже къ непрерывному увеличенію стрѣлы прогиба стойки и къ ея перелому, или перегибу, смотря по роду матеріала.

а. **Формула Эйлера (Euler) для сжатыхъ стоекъ.** Расположимъ начало координатъ въ ц. т. A (фиг. 252) свободнаго сѣченія стойки, ось x-овъ направимъ вертикально, а ось y-овъ горизонтально. Возьмемъ произвольное сѣченіе N на разстояніи x отъ свободнаго конца. Сгибающій моментъ въ этомъ сѣченіи будетъ $M = P . y$.

Пользуясь правиломъ знаковъ (см. § 13, ч. II), ур-іе упругой линіи напишемъ слѣдующимъ образомъ (см. ф-лу **26**, ч. II):

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{P . y}{E . I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{162.}$$

Введемъ обозначеніе $P : E . I = n^2$ . . . . **163.**

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2 . y \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{162 a.}$$

Интеграція этого ур-ія даетъ слѣдующее:

$$y = A . Sin\ n . x + B . Cos\ n . x \quad \ldots\ldots \quad \textbf{164,}$$

гдѣ A и B — постоянныя величины. Для нахожденія ихъ отнесемъ ур-іе **164** къ точкѣ A, гдѣ $x = y = 0$; тогда получимъ $B = 0$, а потому

$$y = A . Sin\ n . x \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{165.}$$

Въ практикѣ весьма часто встрѣчается такой случай сопротивленія изгибу длинной стойки, когда оба ея конца должны лежать на одной вертикали (фиг. 253). Тогда при $x = l$ мы снова должны имѣть $y = 0$, т. е.

$$A . Sin\ n . x = 0.$$

Но такъ какъ коэф. A не равенъ нулю, слѣд., надо имѣть:

$$Sin\ n . l = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{166.}$$

Обѣ величины — n и l — не равны o, поэтому ур-іе **166** возможно удовлетворить, только положивши

$$n\ \ l = m . \pi, \text{ или}$$

$$n^2 . l^2 = m^2 . \pi^2 = l^2 . P : E . I, \text{ откуда}$$

$$P = m^2 . \pi^2 . \frac{E . I}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{167.}$$

Это и есть ф-ла *Эйлера* (*Leonhard Euler*).

Сдѣлавши въ ней $m = 1$, получимъ случай стойки, оба конца которой свободны относительно вращенія, но принуждены оставаться на заданномъ направленіи AO:

$$m = 1 \ldots\ldots \quad P_1 = \pi^2 . \frac{E . I}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{168.}$$

При $m = 2$ будемъ имѣть случай стойки, представленный на фиг. 254, гдѣ $y = o$ при значеніяхъ x, равныхъ $\frac{l}{2}$ и l; въ этомъ случаѣ 3 точки оси стойки (A, C и O) принужденно должны оставаться на первоначальномъ направленіи оси AO. Сдѣлавши въ формулѣ **167-й** $m = 2$, или же вставивъ $\frac{l}{2}$ вмѣсто l въ ф-лу **168**, получимъ:

$$m = 2 \ldots\ldots \quad P_2 = (2\pi)^2 . \frac{E . I}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{169.}$$

Представляя себѣ стойку $AHCO$ (фиг. 254) мысленно продолженною такъ, чтобы OK было симметрично съ HC, мы можемъ сказать, что стойка $HCOK$ (фиг. 254) въ состояніи вынести на себѣ ту же величину нагрузки, какъ и стойка $AHCO$, а въ такомъ случаѣ мы дѣлаемъ переходъ къ такой стойкѣ, у которой оба конца ущемлены и принуждены при выгибѣ стойки оставаться на первоначальномъ направленіи (фиг. 255). Слѣд., и въ этомъ случаѣ ломающая нагрузка будетъ опредѣляться по ф-лѣ **169**, т. е. *для стойки съ ущемленными концами ломающая нагрузка въ* **4** *раза болѣе, чѣмъ для стойки съ концами свободными*. Но для этого нужно, чтобы ущемленіе было *совершенное*, т. е. чтобы въ сѣченіяхъ A и O (фиг. 255) ось колонны, дѣйствительно, не могла уклоняться отъ первоначальнаго направленія AO, т. е. вѣтви AF и HO (фиг. 255) искривленной оси должны касаться несогнутой оси AO.

При $m = 3$ мы сдѣлаемъ переходъ къ стойкѣ, у которой согнутая ось имѣетъ 4 точки A, D, E и O (фиг. 256) на первоначальномъ направленіи оси AO:

$$m = 3 \ldots \qquad P_3 = (3\pi)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \ldots \ldots \quad \mathbf{170.}$$

Подобный случай принужденнаго удерживанія нѣсколькихъ точекъ согнутой оси стойки на первоначальномъ прямолинейномъ ея направленіи встрѣчается въ практикѣ въ настоящее время весьма часто, а именно при устройствѣ артезіанскихъ насосовъ, поршневыя штанги которыхъ удерживаются отъ выгиба въ сторону посредствомъ направляющихъ.

Не нужно думать, что, увеличивая m, мы можемъ довести величину нагрузки, ломающей стойку, до безконечности. Очевидно, что максимальнымъ значеніемъ ломающаго груза будетъ величина его для короткой стойки.

Переходя отъ стойки съ обоими свободными концами (фиг. 253) къ такой, у которой свободенъ только одинъ конецъ (фиг. 252), мы должны замѣнить l въ ф-лѣ **168** величиною $2l$, и тогда получимъ величину ломающей нагрузки для этого случая.

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{171.}$$

Приведенныя здѣсь ф-лы **168** — **171** даютъ величину ломающей нагрузки. Пусть Q будетъ безопасная нагрузка, $\mathfrak{F}$—степень надежности, тогда разсчетное ур-іе будетъ:

$$\mathfrak{F} \cdot Q = (m \cdot \pi)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{172,}$$

гдѣ m можетъ быть равно одной изъ слѣд. величинъ:

$m = \frac{1}{2}$ . . . . . фиг. 252	$m = 2$ . . . . фиг. 254 и 255
$m = 1$ . . . . . фиг. 253	$m = 3$ . . . . фиг. 256

Величины $\mathfrak{f}$ берутся такъ: отъ 4 до 5 въ желѣзн.. и стальныхъ колоннахъ, отъ 6 до 7 — въ чугунныхъ колоннахъ и отъ 7 до 10 въ деревянныхъ.

Если обозначимъ

$$r^2 = I \quad F,$$

гдѣ r будетъ радіусъ инерціи сѣченія, тогда разрушающее напряженіе K_0 для стойки со свободными концами (фиг. 253) по ф-лѣ **168** можно написать такъ:

$$K_0 = \frac{P_1}{F} = \pi^2 . E \left(\frac{r}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{172{,}a.}$$

6. **Формула Причарда (Prichard *) для сжатыхъ стоекъ.** Въ недавнее время *Причардъ* далъ болѣе точный выводъ разсчетнаго ур-ія для сжатой стойки, принимая во вниманіе также и сокращеніе длины стойки подъ дѣйствіемъ нагрузки. Если длину стойки до нагруженія ея обозначимъ чрезъ l, послѣ нагруженія — чрезъ l_1 и сокращеніе ея длины — чрезъ λ, тогда:

$$l_1 = l - \lambda = l\left(1 - \frac{P}{E.F}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{173}$$

Пусть имѣемъ стойку (фиг. 252), нижній конецъ которой ущемленъ, а верхній свободенъ. Нагрузивши ее центрально, отклонимъ верхній ея конецъ воздѣйствіемъ небольшой пеперечной силы. Въ изображенномъ на чертежѣ положеніи ANO пусть наступило равновѣсіе нагрузки P съ внутренними силами. Отнесемъ согнутую ось бруса къ осямъ координатъ $x A y$, направивши $Ax \parallel OA_1$. Произвольное сѣченіе N согнутой стойки будетъ имѣть координаты

$$AN_1 = x\,;\; NN_1 = y.$$

Сгибающій моментъ въ сѣченіи N будетъ $M = P.y$.

Элементы сѣченія N будутъ испытывать напряженія отъ сжатія стойки и отъ ея сгибанія. Наибольшее напряженіе сжатыхъ элементовъ сѣченія напишется такъ (подобно ф-лѣ **145**).

$$H = \frac{P}{F} + \frac{P.y.e}{I} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{174,}$$

гдѣ e — разстояніе крайнихъ сжатыхъ элементовъ сѣченія отъ нейтральнаго слоя, который имѣли бы, разсматривая одно явленіе сгибанія.

Опредѣлимъ величину наибольшаго укороченія элементовъ объема стойки съ высотою dx. По ф-лѣ **1** (см. § 2, ч. II) относительное укороченіе *произвольной* линіи, направленной вдоль оси согнутаго бруса и отстоящей отъ нея на разстояніе z, вычисляется такъ:

$\iota = z : r$, если r — радіусъ кривизны даннаго сѣченія.

---

*) *The stresses in framed structures. By A. Jay Du Bois C. E., professor of civil engineering Yale University*, глава IV.

Для крайнихъ наиболѣе сжатыхъ элементовъ сѣченія будемъ имѣть:

$$z = e \ldots\ldots \imath_0 = e : r$$

Укороченіе на длинѣ dx такихъ наиболѣе сжатыхъ элементовъ сѣченія будетъ

$$k = \imath_0 . dx = \frac{e}{r} \cdot dx \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{а.}$$

По ф-лѣ **9** (въ § 3, ч, II) имѣемъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E\,.\,I}\text{. поэтому } k = \frac{M\,.\,e}{E\,.\,I.} \cdot dx \ldots\ldots\ldots \quad \text{б}$$

Укороченіе того же элемента длины, вслѣдствіе воздѣйствія сжимающей силы P, опредѣлится такъ:

$$\lambda = \frac{P}{E\,.\,F} \cdot dx \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{в.}$$

Явленіе укороченія элементовъ длины стойки всего нагляднѣе можетъ быть пояснено чертежемъ. Пусть $abfh$ (фиг. 257) будетъ элементъ объема стойки до ея нагруженія: ab и hf — два поперечныхъ сѣченія, отстоящихъ одно отъ другого на разстояніе $dx = qt$. Послѣ нагруженія стойки сѣченіе ab, вслѣдствіе сжатія, пусть перемѣстится въ положеніе cd, а вслѣдствіе сгибанія стойки пусть это сѣченіе придетъ въ положеніе $c_1 d_1$. Тогда длина qs, равная λ, представитъ намъ укороченіе элемента длиною dx вслѣдствіе сжатія, а длина dd_1, равная k, выразитъ дальнѣйшее укороченіе крайняго сжатаго волокна стойки при ея сгибаніи, такъ что полное наибольшее сжатіе на длинѣ dx будетъ представлено на чертежѣ длиной bd_1. Новая длина элемента, измѣряемая по оси стойки, будетъ:

$$st = dx_1 = dx - \lambda = dx\left(1 - \frac{P}{E.F}\right) \ldots\ldots\ldots \quad \text{г.}$$

Сравненіе ф-лъ **173** и **г** этого § показываетъ, что

$$\frac{dx}{dx_1} = \frac{l}{l_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{д.}$$

Изъ подобія треугольниковъ dsd_1 и smt имѣемъ.

$$\frac{mt}{st} = \frac{ds}{dd_1}, \quad \text{или} \quad \frac{r_1}{dx_1} = \frac{e}{k}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{k}{e} \cdot \frac{1}{dx_1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dx}{dx_1} = \frac{M}{E.I} \cdot \frac{l}{l_1} \ldots\ldots\ldots \quad \text{ж.}$$

Выражая радіусъ кривизны r_1 чрезъ 2-ю производную отъ y по x_1 и принимая во вниманіе правило разстановки знаковъ (§ 13, ч. II) въ дифференціальномъ ур-ніи упругой линіи, мы должны получить его въ слѣд. видѣ:

$$-\frac{d^2y}{dx_1{}^2} = + \frac{l}{l_1} \cdot \frac{P}{E\,I}\; y \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{175.}$$

Введемъ обозначеніе . . . . $n_1^2 = \frac{l}{l_1} \cdot \frac{P}{E.I}$ . . . . . **176.**

Тогда $\frac{d^2y}{dx_1^2} = -n_1^2 . y$ . . . . . . **175,a.**

Сравнивая между собою ф-лы **162 a** и **175 a**, мы видимъ, что онѣ по существу тождественны, и что

$$n_1^2 : n^2 = l : l_1,$$

а потому и въ результатѣ интегрированія должна получиться ф-ла, отличающаяся отъ ф-лы *Эйлера* только существованіемъ коэф. $l : l_1$ во 2-й части равенства. Произведемъ самую интеграцію ур-ія *175 a*. Для этого замѣтимъ, что

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2 = 2 . \frac{dy}{dx_1} . \frac{d^2y}{dx_1^2} . \frac{dx_1}{dy},$$

поэтому, умножая обѣ части ур-ія *175 a* на *2.dy* и производя интегрированіе ур-ія, получимъ:

$$\left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2 = -n_1^2 . y^2 + c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{з.}$$

Для опредѣленія произвольнаго постояннаго c отнесемъ ур-іе **з** къ ущемленному сѣченію O (фиг 252) стойки, гдѣ

$$x_1 = l_1 \; \ldots\ldots \; y = AA_1 = f \ldots\ldots \frac{dy}{dx_1} = 0, \text{ слѣд.}$$

$$0 = -n_1^2 . f^2 + c, \text{ или } c = n_1^2 . f^2.$$

Послѣ этого ур-іе **з** можно написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{dy}{dx_1} = n_1 . \sqrt{f^2 - y^2}, \text{ или}$$

$$n_1 . dx_1 = \frac{dy}{\sqrt{f^2 - y^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{и.}$$

Интегрируя это ур-іе, получимъ:

$$n_1 . x_1 = arc\ Sin \frac{y}{f} + c_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{к.}$$

Для нахожденія произвольнаго постояннаго c_1 отнесемъ ур-іе *к* къ сѣченію A (фиг. 253), гдѣ

$$\text{при } x_1 = 0 \ldots\ldots y = 0, \text{ слѣд. } c_1 = 0.$$

Искомое ур-іе упругой линіи будетъ:

$$\frac{y}{f} = Sin\, n_1 . x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{177.}$$

Относя это ур-іе къ ущемленному сѣченію O стойки (фиг. 252) получимъ:

$$\text{при } x_1 = l_1 \ldots\ldots y = OO_1 = AA_1 = f, \text{ т. е.}$$

$$1 = Sin\, n_1 . l_1, \text{ или } n_1 . l_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$n_1^2 . l_1^2 = \frac{\pi^2}{4} = \frac{l}{l_1} . \frac{P}{E . I} . l_1^2, \text{ откуда}$$

$$P = \frac{\pi^2}{4} . \frac{E . I}{l . l_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{178.}$$

Это и есть ф-ла *Причарда* для случая стойки съ однимъ концомъ ущемленнымъ, а другимъ свободнымъ (фиг 252). Для этого случая ф-лу *Эйлера* мы имѣли въ видѣ ф-лы **171**. Если не дѣлать различiя между l и l_1, т. е. пренебрегать сокращенiемъ колонны въ длину, тогда обѣ эти ф-лы и будутъ тождественны.

Замѣняя въ ф-лѣ **178** величину l_1 ея значенiемъ, изъ ф-лы **173** получимъ:

$$P . l^2 \left(1 - \frac{P}{E.F}\right) = \frac{\pi^2}{4} . E . I, \text{ откуда}$$

$$P = \frac{P^2}{E.F} + \frac{\pi^2}{4} . \frac{E . I}{l^2} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{178,a.}$$

По **173** . . . . . $\frac{P}{E.F} = \frac{l - l_1}{l}$

Так. обр. видно, что разрушающая пагрузка, вычисляемая по ф-лѣ *Причарда*, принимая во вниманiе укороченiе нагруженной колонны, получится всегда нѣсколько болѣе того, что даетъ ф-ла *Эйлера*, но т. к. это отступленiе идетъ въ пользу прочности разсчитываемой стойки и т. к ф-ла *Эйлера* проще ф-лы *Причарда*, поэтому ф-лѣ *Эйлера* слѣдуетъ отдать предпочтенiе при разсчетахъ — тѣмъ болѣе, что справедливость ея съ достаточной точностью подтверждена опытами, произведенными въ недавнее время *Баушингеромъ* и *Тетмайеромъ*.

в. **Формулы Навье и Шварцъ-Ранкина для сжатыхъ стоекъ** У сжатой стойки съ обоими свободными концами (фиг. 253) напряженiе матерiала въ сѣченiи N м. б. выражено формулой **174**

$$H = \frac{P}{F} + \frac{P . y . e}{I}.$$

Очевидно, что *max* этого напряженiя будетъ въ томъ поперечномъ сѣченiи, гдѣ $y = f$, или стрѣлѣ прогиба. Но какъ мы видѣли, при всякомъ способѣ пагруженiя согнутой балки стрѣла прогиба м. б. представлена такою ф-лой (см. ф-лу **35** въ § *15 в*, ф-лу **41** въ § *16 в*, ф-лу **47** въ § *17 б*, ф-лу **62** въ § *19 в* и т. д.):

$$f = c . \frac{B . l^2}{E . e},$$

гдѣ c — коэф , зависящiй отъ способа нагруженiя согнутой балки. Вводя обозначенiя:

$$c . B : E = \beta ; \; I : F = r^2,$$

гдѣ β — коэф., зависящій отъ рода матеріала, а r — радіусъ инерціи сѣченія, и замѣняя въ ф-лѣ **174** величину H допускаемымъ напряженіемъ D при сжатіи короткой призмы, получимъ разсчетное ур-іе для стойки въ слѣдующемъ видѣ:

$$P = F.\frac{D}{1 + \beta.\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{179.}$$

Въ 1-й четверти текущаго столѣтія эта ф-ла была выведена французскимъ академикомъ *Навье* (*Navier*). Сношенія въ ученой средѣ въ то время были еще весьма мало развиты, и случилось поэтому такъ, что въ 1854 г самостоятельный выводъ той же формулы былъ сдѣланъ въ Германіи *Шварцемъ* (*Schwarz*), профессоромъ политехникума въ Ганноверѣ, а въ 1862 г въ Англіи то же самое дѣлаетъ инж. *Ранкинъ* (*Rankine*); поэтому ф-лу **179** въ литературѣ часто называютъ ф-лой *Шварцъ-Ранкина*. Если ввести обозначеніе.

$$\varphi = 1 \cdot \left[1 + \beta \cdot \frac{l^2}{r^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{180,}$$

тогда ф-ла **179** м. б написана въ слѣд. видѣ:

$$P = F.(D.\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{181,}$$

т. е. *разсчетъ сжатой длинной стойки можно вести по обычной ф-лѣ на сжатіе короткой призмы, если только за допускаемое напряженіе считать величину* $\varphi.D$, т е. произведеніе обычно допускаемаго напряженія на поправочный коэф φ, зависящій отъ величины отношенія длины стойки къ радіусу инерціи ея сѣченія.

Эта ф-ла содержитъ въ себѣ два опытныхъ коэф. — φ и D, поэтому многіе авторы и строители инженерныхъ сооруженій долгое время предпочитали ее ф-лѣ *Эйлера*, содержащей въ себѣ только одинъ коэф. упругости E, величина котораго къ тому же далеко не постоянна для отдѣльныхъ полосъ какой-либо партіи матеріала.

Довольно долгое время было распространено мнѣніе, что ф-ла *Эйлера* не подтверждается опытомъ. пока болѣе точными опытами новѣйшаго времени не была разсѣяна невѣрность такого заключенія, основаннаго на результатахъ старыхъ, весьма грубо обставлявшихся опытовъ.

г. **Результаты опытовъ надъ провѣркою ф-лъ для разсчета сжатыхъ стоекъ** Наиболѣе обширные и точные опыты съ этою цѣлію были продѣланы въ послѣднее время въ Германіи профессоромъ *Баушингеромъ*, а въ Швейцаріи проф. *Тетмайеромъ* *).

А. Результаты опытовъ съ деревянными стойками. При центральной нагрузкѣ и отношеніи $l : r$ (длины стойки къ рад. инерціи ея

*) *Prof. L Tetmajer. Die Gesetze der Knikungsfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe Zürich*, 1896.

сѣченія), большемъ *100*, деревянныя стойки проявляли всѣ свойства упругаго прогиба, т. е. по удаленіи нагрузки происходило возстановленіе первоначальной формы, тогда какъ при стойкахъ съ отношеніемъ $l:r$ менѣе *100* по удаленіи нагрузки, величина которой была близка къ разрушающей, получались всегда остающіяся деформаціи.

Сопротивляемость деревянныхъ стоекъ зависитъ отъ большей или меньшей сухости дерева, а также отъ числа и распредѣленія на стволѣ вѣтвей (сучковъ). Въ дальнѣйшемъ приведены результаты опытовъ *Тетмайера* надъ деревянными стойками хвойныхъ породъ, высушенными на воздухѣ, причемъ напряженіе выражено въ *tn* на кв. *см.*, а площадь въ кв. *см.*

При $l:r$ болѣе *100* ф-ла *Эйлера* подтвердилась вполнѣ, и примѣнительно къ ф-лѣ **172 a** ее можно было написать такъ:

$$K_0=\frac{P_1}{F}=987.\frac{r^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{182.}$$

При значеніяхъ же $l:r$ отъ 1,8 до 100 разрушающая нагрузка могла быть выражена ф-лою

$$P_1=K_0.F=\left(0{,}293-0{,}00194.\frac{l}{r}\right).F \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{183.}$$

Приводя эти ф-лы въ согласованіе съ ф-лой **179**-й *Шварцъ-Ранкина* въ предположеніи, что разрушающее напряженіе $D_0=0{,}293$ *tn* на кв. *см.*, величины коэф. β получимъ слѣдующими (табл. 44):

Таблица 44-я.

$l:r$	Коэфиц. β	$l:r$	Коэфиц β	$l:r$	Коэфиц. β
10	0,000693	60	0,000182	120	0,000225
20	385	70	177	140	248
30	274	80	176	160	254
40	224	90	183	180	261
50	194	100	196	200	268

Слѣд., величина коэф. β не постоянна и не представляетъ собою какой-либо опредѣленной функціи отношенія $l:r$.

Б. Результаты опытовъ съ чугунными стойками. При отношеніи $l:r$ болѣе *80* ф-ла *Эйлера* подтверждается для чугуна вполнѣ; выражая нагрузки въ *tn*, а площади въ *см.*, получимъ въ этомъ случаѣ:

$$K_0=\frac{P_1}{F}=9870.\frac{r^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{184.}$$

При отношеніяхъ же $l:r$ отъ *5* до *80* разрушающая нагрузка могла быть выражена слѣд. ф-лой:

$$P_1 = F \cdot \left[7{,}76 - 0{,}12 \cdot \frac{l}{r} + 0{,}00053 \cdot \frac{l^2}{r^2}\right] \quad . \; . \; . \quad \mathbf{185.}$$

Приводя эти ф-лы въ согласованіе съ ф-лой **179**-й *Шварцъ-Ранкина* въ предположеніи, что разрушающее напряженіе $D_0 = 7{,}76$ *tn.* на кв. *см.*, величины коэф. β получимъ слѣдующими (табл. 45):

Таблица 45-я.

$l:r$	Коэфиц. β	$l:r$	Коэфиц. β	$l.r$	Коэфиц. β.
10	0,00175	60	0,00060	110	70
20	98	70	60	120	71
30	75	80	63	130	73
40	6,5	90	66	140	74
50	61	100	68	150	74

Так. обр. и здѣсь величина коэф. β непостоянна и не выражается какою-либо опредѣленною функціею отношенія $l:r$.

Въ разсчетныхъ таблицахъ, составленныхъ инженеромъ *Шаровскимъ* (*Scharowsky, Musterbuch fur Eisenconstructionen*), для чугунныхъ колоннъ приняты за основаніе разсчета слѣд. данныя:

$Z =$ или менѣе 250 *кг.* на кв. см.

$D =$ „ „ 500 „ „

Коэф. $\beta = 0{,}0002$.

В. Результаты опытовъ съ желѣзными стойками изъ сварочнаго и литого желѣза. Разстояніе между центрами заклепокъ дѣлалось въ 70 разъ болѣе толщины склепываемыхъ полосъ; ослабленіе сѣченія полосы заклепками дѣлалось не болѣе $12^0/_0$; наблюдалось при склепкѣ за возможно болѣе тщательнымъ заполненіемъ заклепочныхъ дыръ металломъ заклепокъ. Выражая нагрузку въ *tn* и площади въ кв. *см*, *Тетмайеръ* получалъ:

a) для сварочнаго желѣза при $l:r$ болѣе *112*

$$K_0 = \frac{P_1}{F} = 19740 \cdot \frac{r^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{186,}$$

причемъ постоянный коэф. въ этой ф-лѣ соотвѣтствуетъ величинѣ $E = 20000$ *кг.* на кв. *мм.*; а при $l:r$ отъ *10* до *112*

$$P_1 = F \cdot \left[3{,}03 - 0{,}0129 \cdot \frac{l}{r}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{187,}$$

б) для мягкаго сварочнаго желѣза съ коэф. упругости $E = 21500$ *кг.* на кв. *мм.* и коэф. крѣпости Z_0 до 40 *кг.* на кв. *мм.* при $l:r$ болѣе *105*

$$K_0 = 21220 \cdot \frac{r^2}{l^2} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{188,}$$

а при $l:r$ отъ *10* до *105*

$$P_1 = F \cdot \left[3{,}1 - 0{,}0114 \cdot \frac{l}{r}\right] \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{189,}$$

в) для болѣе жесткаго литого желѣза, у котораго коэф. крѣпости Z_0 болѣе 40, а коэф. упругости $E = 22400$, при $l:r$ болѣе *105*

$$K_0 = \frac{P_1}{F} = 22200 \cdot \frac{r^2}{l^2} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{190,}$$

а при $l:r$ отъ *10* до *105*

$$P_1 = F \cdot \left[3{,}21 - 0{,}0116 \cdot \frac{l}{r}\right] \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{191.}$$

Согласуя ф-лы **186—189** съ ф-лой **179** *Шварцъ-Ранкина* въ предположеніи, что для сварочнаго желѣза $D_0 = 3{,}03$, а для литого желѣза $D_0 = 3{,}10$ *tn* на кв. *см.*, величины коэф. β получимъ слѣдующими (табл. 46):

Таблица 46-я.

$l:r$	Коэфиц. β ж. свароч.	ж. литое	$l:r$	Коэфиц β ж. свароч	ж. литое	$l:r$	Коэфиц. β ж. свар.	ж. литое
10	0,000448;	0,000370	80	0,000082;	0,000065	160	0,000115;	0,000107
20	235	200	90	78	61	180	122	116
30	164	133	100	75	58	200	130	122
40	129	109	110	74	64	220	132	125
50	109	88	120	84	77	240	134	128
60	96	78	130	94	86	250	136	130
70	88	71	140	102	95		—	—

Въ разсчетныхъ таблицахъ инж. *Шаровскаго* для желѣзныхъ колоннъ за основаніе разсчета приняты слѣд. данныя:

$Z =$ или менѣе 10 *кг.* на кв. *мм.*

$D =$ „ „ 10 „ „ „

Коэф. $\beta = 0{,}0001$.

д. **Чугунныя и желѣзныя колонны**. Выведенныя ф-лы крѣпости стоекъ показываютъ, что чѣмъ болѣе будетъ моментъ инерціи у поперечнаго сѣченія стойки, тѣмъ выше будетъ и сопротивленіе ея сжатію.

Если моментъ инерцiи сѣченiя относительно различныхъ его осей неодинаковъ, въ разсчетныя формулы вносится наименьшiй изъ нихъ. Отсюда слѣдуетъ, что наивыгоднѣйшими формами поперечныхъ сѣченiй у колоннъ будутъ такiя, у которыхъ величина момента инерцiи будетъ одинакова для двухъ взаимно ⊥-ныхъ осей. Если, кромѣ центральной давящей нагрузки, будетъ еще существовать боковая, сгибающая колонну, нагрузка, тогда наивыгоднѣйшая форма сѣченiя должна отвѣчать условiямъ крѣпости и на сжатiе и на сгибанiе.

Чугунныя колонны выполняются или пустотѣлыми (полыми) или ребристыми; пустотѣлыя могутъ имѣть форму или круглую (фиг. 258), или квадратную (фиг. 259—260), а также прямоугольную; ребристыя колонны имѣютъ сѣченiе двутавровое (фиг. 261—262).

Минимальная толщина стѣнокъ δ въ зависимости отъ внѣшняго дiаметра колонны d м. б. такова:

$\delta=$	10	12	14	16	20 *мм.*
$d=$	80—140;	160—190;	200—290;	300—400,	420—500 *мм.*

Максимальная встрѣчающаяся толщина стѣнокъ δ_1 въ зависимости отъ дiам. d бываетъ такою:

$\delta_1=$	14	16	18	20	24	30	34	40	48	60 *мм.*
$d=$	80	90	100	120	150	200	250	300	360	450 „

Толщина стѣнокъ въ зависимости отъ длины колонны l регулируется такими данными

$l=$	2 — 3	3 — 5	болѣе 5 *мт.*
$\delta=$	12 —15	15 —20	„ 20 *мм.*

Въ квадратныхъ чугунныхъ колоннахъ толщина стѣнокъ дѣлается такою же, какъ и въ круглыхъ, а чаще—нѣсколько болѣе. Если сѣченiе—въ видѣ полаго прямоугольника, тогда толщина стѣнокъ обыкновенно ставится въ соотвѣтствiе съ размѣрами большей изъ сторонъ прямоугольника.

Въ чугунныхъ колоннахъ двутавроваго сѣченiя толщина стѣнки и полокъ дѣлается одинаковою, и полки съ внутренней стороны могутъ не получать столь значительныхъ уклоновъ, какъ въ желѣзныхъ двутавровыхъ балкахъ. Размѣры такихъ колоннъ бываютъ отъ 80×40×10×10 до 800×400×70×70.

Желѣзныя колонны могутъ получать самыя разнообразныя формы поперечныхъ сѣченiй, скомбинированныя изъ полосъ балочнаго желѣза, углового, тавроваго, двутавроваго, коробчатаго, зетовъ и т. д.

Въ Германiи, гдѣ желѣзо дешево, нерѣдко можно встрѣтить въ употребленiи весьма нерацiональную форму сѣченiя коллонъ—въ видѣ креста, образованнаго изъ 4-хъ уголковъ при помощи 4-хъ рядовъ заклепокъ.

Легкія стойки въ зданіяхъ инж. *Шуховъ* дѣлаетъ крестообразнаго сѣченія, образуя изъ полосы балочнаго желѣза и двухъ неравнобокихъ уголковъ, причемъ склепываніе всѣхъ трехъ полосъ дѣлается *однимъ* рядомъ заклепокъ (фиг. 264).

Для передачи нагрузки отъ вѣса парового котла на фундаментъ часто употребляются стойки изъ прокатныхъ двутавровыхъ полосъ (фиг. 265). Въ зданіяхъ колонны выполняются часто съ двутавровымъ сѣченіемъ, представленнымъ на фиг. 266 и 267. Различныя комбинаціи желѣзныхъ полосъ коробчатыхъ, угловыхъ, двутавровыхъ, зетовъ и т. п. представлены на фиг. 268—275. Сѣченія стоекъ изъ спеціальнаго *колоннаго или квадрантнаго* желѣза—одного и въ комбинаціи съ балочнымъ и тавровымъ желѣзомъ—даны на фиг. 276—278.

Для *предварительныхъ* разсчетовъ желѣзныхъ стоекъ и колоннъ, когда еще только подбираются размѣры сѣченія, величину поправочнаго коэф. φ въ ф-лу **181** можно вносить по даннымъ *Lowe*, изъ табл. 47-й, приводимой ниже. Въ этой таблицѣ l обозначаетъ длину колонны, а d—*наименьшій размѣръ* средняго поперечнаго сѣченія колонны, т. е. длину меньшей изъ сторонъ прямоугольника, описаннаго вокругъ сѣченія колонны или стойки.

Таблица 47-я.

Величины поправочныхъ коэф. $100\times\varphi$ въ ф-лѣ **181**.

$l:d$	$100\times\varphi$	$l:d$	$100\times\varphi$	$l:d$	$100\times\varphi$	$l:d$	$100\times\varphi$
5	95	17	65	29	50	46	38
6	92	18	63	30—31	49	47—48	37
7	88	19	62	32—33	48	49—50	36
8	85	20	61	34	47	51	35
9	83	21	59	35	46	52—53	34
10	80	22	57	36—37	45	54—55	33
11	77	23	56	38—39	44	56—58	31
12	75	24	55	40	43	59—60	30
13	73	25	54	41	42	61—62	29
14	71	26	53	42	41	63—65	28
15	69	27	52	43	40	66—67	27
16	67	28	51	44—45	39	68—70	25

Данныя для разсчета полосъ тавровыхъ, двутавровыхъ, угловыхъ, зетовъ и коробчатыхъ даны выше (§§ 51—57).

Данныя для разсчета колоннъ изъ квадрантнаго желѣза приведены въ табл. 48-й (R—средній радіусъ цилиндрической части):

Таблица 48-я.

Нормальные нѣмецкіе профили квадрантнаго желѣза (фиг. 276).

Размѣры въ *мм.* $R \times b \times \delta \times t$	Площадь сѣченія колонны кв. *см.*	Вѣсъ погоннаго мт. колон. въ *кг.*	Мом. инерціи I_y сѣченія колонны въ *см.*^{4}	Модуль W_y сѣченія колонны въ *см.*^{3}
50×35× 4× 6	29,8	23,4	573	66
„ „ × 8× 8	48	37,5	901	101
75×40× 6× 8	54,9	42,9	2046	173
„ „ ×10×10	80,2	62,8	2957	246
100×45× 8×10	88,1	68,9	5434	365
„ „ ×12×12	120,4	94	7395	490
125×50×10×12	129,3	101	11970	665
„ „ ×14×14	168,8	131,6	15591	857
150×55×12×14	178,9	139,6	23206	1100
„ „ ×18×17	248,6	194	32283	1509

Брянскій заводъ выкатываетъ колонные профили слѣд. размѣровъ $R \times b \times \delta \times t$:

41 × 29 × 6 × 7 ; 66,5 × 52 × 8 × 8

98×52 × 13 × 13 ; 138 × 90 × 11 × 11

При передачѣ нагрузки отъ одной и той же системы (балки, рамы машины и т. п.) сразу на нѣсколько колоннъ не слѣдуетъ комбинировать чугунныя колонны съ желѣзными, какъ въ виду различнаго сокращенія ихъ въ длину подъ дѣйствіемъ нагрузки, такъ отчасти и въ виду неодинаковаго коэф. линейнаго расширенія отъ теплоты для обоихъ металловъ.

Во всѣхъ случаяхъ, когда нагрузка передается сразу на нѣсколько колоннъ, обращается вниманіе на правильное распредѣленіе между ними давленія, на сокращеніе ихъ въ длину отъ дѣйствія нагрузки и на передачу давленія отъ колонны нижняго этажа на фундаментъ.

СБОРНИКЪ ЗАДАЧЪ

на приложенія теоріи растяженія и сжатія тѣлъ.

Составили инженеръ-механики

В. Г. Шуховъ и **П. К. Худяковъ.**

(выпуска 1876 г.). (выпуска 1877 г.)

№ 1. Желѣзный цилиндръ B (фиг. 279) и чугунный полый цилиндръ A имѣютъ одинаковую площадь поперечнаго сѣченія и одинаковую высоту. Отъ дѣйствія сжимающей нагрузки P оба ц-ра получаютъ одно и то же укороченіе образующихъ. Найти отношеніе между напряженіями матеріала обоихъ цилиндровъ и разсчетное ур-іе для нихъ подъ тѣмъ условіемъ, чтобы степень надежности системы была не менѣе 5.

Отв. Желѣзный ц-ръ будетъ напряженъ *вдвое* болѣе чугуннаго, если величины E принять соотвѣтственно въ 20000 и 10000 *кг.* на кв. *мм.* Взявъ допускаемыя величины напряженій D для желѣза $40:5=8$, а для чугуна $60:5=12$, видимъ, что чугунный ц-ръ долженъ будетъ работать съ напряженіемъ только въ 4 *кг.*, а разсчетное ур-іе будетъ:

$$P=F.(8+4)=F\times 12,$$

т. е. ту же самую нагрузку могъ бы вынести на себѣ и одинъ чугунный ц-ръ съ площадью F.

№ 2. Какъ нужно было бы писать въ предыдущей задачѣ разсчетное ур-іе, если бы оба ц-ра вытягивались заданной нагрузкой?

Отв. Если допускаемое напряженіе для желѣза $Z_1=35:5=7$, а для чугуна $Z_2=13:5=2{,}6$, тогда желѣзный ц-ръ можно заставить работать съ напряженіемъ $2\times 2{,}6=5{,}2$ *кг.*, и разсчетное ур-іе будетъ:

$$P=F.(5{,}2+2{,}6)=7{,}8\times F,$$

т. е. здѣсь наоборотъ чугунный ц-ръ почти не помогаетъ общему сопротивленію.

№ 3. Двѣ желѣзныхъ полосы A и B (фиг. 280) съ одинаковой площадью и длиной вытягиваются нагрузкой P на одну и ту же длину, но имѣютъ разные коэф. упругости E_1 и E_2. Въ какомъ отношени должны были бы находиться ихъ коэф. крѣпости Z_1 и Z_2, чтобы обѣ полосы работали съ одинаковой надежностью.

Отв. $Z_1 : Z_2 = E_1 \cdot E_2$.

№ 4. Между двумя неподвижными опорами C и D (фиг. 281) расположены двѣ балки A и B одинаковой длины, но изъ нихъ A — желѣзная, B — чугунная. Предполагая опоры неподатливыми, найти напряженія матеріала, которыя получатся при расширени балокъ, если измѣненіе t-ры въ средѣ, окружающей балки, происходитъ отъ (-40) до $+100^0$. *Ц.*

Отв. Принимая коэф. линейнаго расширенія на 100^0 *Ц.* для желѣза $= 1 : 812$, а для чугуна $1 : 930$, получимъ напряженія сжатія въ желѣзной балкѣ 34,5, а въ чугунной 15,1

№ 5. Между неподвижными точками A и B (фиг. 282), находящимся одна отъ другой на разстояніи $2l$ свободно протянута проволока, у которой $F = 1$ кв. *мм*. Какое усиліе P надо приложить въ срединѣ длины проволоки, чтобы вызвать въ ней заданное напряженіе H, если пренебрегать вѣсомъ самой проволоки?

Рѣшеніе. Проволока получитъ вытяжку $\imath = H \cdot E$;

$$l_1 = AC = BC = l(1 + \imath);\ CD = h = l . \sqrt{2\imath + \imath^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

$$H : \frac{P}{2} = l_1 : h;\ P = 2H . \frac{h}{l_1} = 2H . \frac{\sqrt{2i + i^2}}{1 + \imath}$$

Съ точностію, достаточною для цѣлей практики, эту послѣднюю ф-лу можно писать такъ:

$$P = 2H . \sqrt{2\imath} = 2H . \sqrt{2H : E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2.$$

№ 6. Прежде чѣмъ быть оборванною проволока даетъ удлиненіе въ 25% отъ первоначальной длины. Найти разрывающую нагрузку P, если она приложена къ проволокѣ тѣмъ способомъ, который указанъ въ предыдущей задачѣ.

Отв. $h : l . l_1 = 3 : 4 : 5$; $P = 1{,}2 . H$,

т. е. ***разорвать такую проволоку будетъ труднѣе, чѣмъ непосредственнымъ навѣшиваніемъ разрывающаго груза H на проволоку, протянутую вертикально.***

№ 7. При какихъ условіяхъ для обрыва проволоки потребуется одиниковая нагрузка въ случаѣ непосредственнаго навѣшиванія груза на вертикально висящую проволоку и въ случаѣ воздѣйствія нагрузки тѣмъ способомъ, который указанъ въ зад. № 5 (фиг. 282).

Отв. Для этого надо имѣть (фиг. 282):

$$Sin\ \beta = \frac{1}{2}; Cos\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

$$\frac{l_1}{l} = 1 + i = 1 : 0{,}866 = 1{,}1547; i = 0{,}1547,$$

т. е. вытяжка у проволоки до разрыва ея д. б. въ **15,5%**.

№ 8. При 0° Ц. желѣзная проволока, у которой $F = 1$ кв. *мм.*, свободно протянута между неподвижными точками A и B (фиг. 282) и не испытываетъ никакого напряженія. Допускаемая величина напряженія дана — $H = 20$ *кг.* на кв. *мм.* Нагрузка навѣшивается на проволоку въ срединѣ ея длины $2l$. Какова будетъ величина безопасной нагрузки при 0°, при (—50°) и при +50° Ц?

Рѣш. При 0° величина нагрузки опредѣляется непосредственно по ф-лѣ **2** (см. зад. № 5):

$$P = 2 \,.\, 20 \,.\, \sqrt{\frac{2 \,.\, 20}{20000}} = 1{,}7888, \text{ или около } 1{,}8 \text{ кг.}$$

Если коэф. линейнаго расширенія проволоки при измѣненіи температуры на 100° примемъ = 1 : 812,5, то вытяжка проволоки при повышеніи t-ры на 50° будетъ

$$\imath_1 = \frac{0{,}5}{812{,}5} = \frac{1}{1625}$$

Когда въ проволокѣ будетъ вызвано допускаемое напряженіе въ 20 *кг.*, она дастъ еще добавочную вытяжку

$$i = \frac{H}{E} = \frac{20}{20000} = \frac{1}{1000}$$

$$I = i + \imath_1 = \frac{1}{1625} + \frac{1}{1000} = \frac{21}{13000}$$

По ф-лѣ **1** (см. предыдущую зад. № 5) соотвѣтственная этому значенію I величина угла β опредѣлится изъ р-ва:

$$tg\ \beta = \frac{h}{l} = \sqrt{2\,I + I^2} = 0{,}0579; \beta = 3^0 19'$$

При такомъ значеніи β величины tg и Sn можно считать одинаковыми. Поэтому

$$P_1 = 2\,H \,.\, Sin\ \beta = 2.20.0{,}0579 = 2{,}32 \text{ кг.}$$

Напряженіе, которое будетъ вызвано въ проволокѣ паденіемъ температуры съ 0° на (— 50°), будетъ

$$H_2 = \frac{0{,}5}{812{,}5} \,.\, 20000 = 12{,}31 \text{ кг. на кв. мм.}$$

Слѣд., въ этомъ случаѣ добавочное до 20 *кг.* напряженіе матеріала будетъ $= 7{,}69$ *кг.* Его вызоветъ нагрузка

$$P_2 = 2.7{,}69\sqrt{\frac{2\ 7{,}69}{20000}} = 0{,}43 \text{ кг.}$$

Так. обр. отношеніе полученныхъ нагрузокъ будетъ $=$

$$0,\ 43 : 1{,}8 : 2{,}32, \text{ или } 0{,}24 : 1 : 1{,}29.$$

№ **9**. Треугольная ферма *ABC* (фиг. 283), состоящая изъ двухъ тягъ *AC* и *BC* и распорнаго бруса *AB*, принимаетъ на себя нагрузку *P* въ узлѣ *C*. Длина бруса $AB = 2l$, высота $CD = h$. Предполагая, что сочлененія въ узлахъ A, B, C шарнирныя и что нагрузка *P* вызываетъ одинаковое напряженіе матеріала какъ въ сжатой части *AB*, такъ и въ растянутыхъ *AC* и *BC*, опредѣлить пониженіе точки подвѣса *C*, происходящее вслѣдствіе упругихъ деформацій частей фермы.

Рѣш. $S = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{h}$; $Q = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{h}$

Послѣ нагруженія фермы длины *BA*, *BC* и *CA* примутъ размѣръ:

длина $AB \ldots\ldots 2l.(1 - \imath)$

длины *AC* и $CB \ldots\ldots (1 + \imath).\sqrt{h^2 + l^2}$

Новая высота фермы $DC_1 = h_1$. Она опредѣлится такъ:

$$h_1 = \sqrt{(h^2 + l^2).(1 + \imath)^2 - l^2.(1 - \imath)^2} = \sqrt{4\imath.l^2 + h^2\ (1 + i)^2}$$

Пусть $h = \frac{l}{10}$, разсчетное напряженіе $Z = D = 10$ *кг.* на кв. *мм.*,

$$E = 20000,\ \imath = \frac{Z}{E} = \frac{1}{2000};\ (1 + \imath)^2 = \text{около } 1 + \frac{1}{1000}$$

$$h_1 = l.\sqrt{\frac{1}{500} + \frac{1}{100}\ .\ 1{,}001} = 0{,}1096\ .\ l$$

Прогибъ $h_1 - h = (0{,}1096 - 0{,}1).l = 0{,}0096.l$

Если бы треугольная ферма была замѣнена призматической балкой съ высотой *h* и длиной $2l$, тогда ея стрѣла прогиба опредѣлялась бы по ф-лѣ **62** (см. § 19, ч. II), которую въ примѣненіи къ нашему случаю надо было бы писать такъ:

$$f = \frac{1}{12} \cdot \frac{B.(2l)^2}{E.e} = \frac{2}{3} \cdot \frac{B.l^2}{E.h}.$$

При вышеуказанныхъ числовыхъ данныхъ получимъ:

$$f = \frac{2}{3} \cdot \frac{10.10.l}{20000} = \frac{l}{300} = 0{,}0033.l,$$

т. е. *призматическая балка, имѣющая высоту сѣченія, равную высотѣ треугольной фермы, при одинаковой крѣпости съ нею подъ дѣй-*

ствіемъ одной и той же нагрузки, приложенной въ срединѣ, даетъ прогибъ приблизительно въ **3** *раза меньшій, чѣмъ треугольная ферма.*

№ 10. Треугольная ферма ABC (фиг. 284), состоящая изъ двухъ подкосовъ AC, BC и затяжки AB, въ узлѣ C принимаетъ на себя нагрузку P. Длина $AB=2l$; $CD=h$. Предполагая, что всѣ сочлененія въ узлахъ фермы шарнирныя и что нагрузка P вызываетъ одинаковое напряженіе матеріала и въ сжатыхъ и въ растянутой части фермы, опредѣлить пониженіе узла C, происходящее вслѣдствіе упругихъ деформацій частей фермы.

Рѣш. $$Q=\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{h};\quad S=\frac{P}{2}\cdot\frac{\sqrt{h^2+l^2}}{h}.$$

Послѣ нагруженія всѣ части фермы примутъ слѣд. размѣры:

$$AB\ \ldots\ldots\ 2l.(1+i);\quad AC \text{ и } BC\ \ldots\ (1-i).\sqrt{h^2+l^2}.$$

Новая высота фермы $C_1D=h_1$. Она будетъ опредѣляться равенствомъ:

$$h_1=\sqrt{(h^2+l^2).(1-i)^2-l^2.(1+i)^2}=\sqrt{h^2.(1-i)^2-4i.l^2}.$$

Прогибъ фермы $f=h-h_1=h-\sqrt{h^2(1-i)^2-4i.l^2}$.

C_1D, равное h_1, получится $=0$ тогда, когда

$$h=2l.\frac{\sqrt{i}}{1-i}.$$

Принимая $i=1:1000$ . . . . $h=\frac{1}{31}.2l$.

Пусть сѣченіе частей фермы равно F кв. *мм.*; допускаемая нагрузка на подкосы будетъ:

$$Q=F.E.i=F.\frac{20000}{1000}=20.F.$$

$$P=\frac{2Q.h}{l}=\frac{2.20.F.2}{31}=2{,}58.F,$$

т. е. при очень малыхъ подъемахъ фермы достаточно приложить незначительное усиліе къ вершинѣ фермы, чтобы ее разрушить.

№ 11. Рѣшить задачу № 9 въ предположеніи, что въ растянутыхъ частяхъ допускается напряженіе Z, а въ сжатой — D, не равное Z.

Отв. $$i=\frac{Z}{E};\quad i_1=\frac{D}{E}$$

$$f=h_1-h=\sqrt{h^2\left(1+\frac{Z}{E}\right)^2+2l^2.\frac{Z+D}{E}}-h.$$

№ 12. Рѣшить задачу № 10 въ предположеніи, что въ растянутой части допускается напряженіе Z, а въ сжатой — D.

Отв. $i = Z : E$; $\imath_1 = D : E$

$$f = h - h_1 = h - \sqrt{h^2 . \left(1 - \frac{D}{E}\right)^2 - 2l^2 . \frac{Z + D}{E}}.$$

№ 13. Въ треугольной фермѣ ABC (фиг. 285) съ наклоннымъ подкосомъ найти пониженіе точки подвѣса нагрузки вслѣдствіе существованія упругихъ деформацій въ частяхъ фермы, предполагая, что части фермы разсчитаны съ одинаковымъ напряженіемъ, и матеріалъ ихъ имѣетъ одинаковую величину коэф. упругости.

Рѣш. $\overline{DE}^2 = l^2 . (1 + \imath)^2 - f^2 = (l^2 + h^2) . (1 - \imath)^2 - (h - f)^2$

$$f = \imath . l . \left(2 . \frac{l}{h} + \frac{h}{l} - \frac{\imath . h}{2l}\right).$$

Съ достаточною для практики точностію можно принимать

$$f = i . l . \left(2 \frac{l}{h} + \frac{h}{l}\right). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3.$$

Если бы эту треугольную ферму замѣнить равнокрѣпкой съ ней *балкой равнаго сопротивленія*, у которой ширина прямоугольнаго сѣченія постоянна на всей ея длинѣ, а высота въ ущемленномъ мѣстѣ $= h$ (см. § *40*, *В*, *б*; зад. № 78), ея стрѣла прогиба въ точкѣ приложенія нагрузки была бы:

$$f_1 = \frac{2}{3} . \frac{P . l^3}{E . I} = \frac{2}{3} \frac{B . l^2}{E . e} = \frac{4}{3} . \imath . \frac{l^2}{h},$$

т. е. *треугольная ферма дастъ всегда большій провѣсъ, чѣмъ равнокрѣпкая съ нею балка равнаго сопротивленія, имѣющая ширину прямоугольнаго поперечнаго сѣченія постоянную, а высоту въ ущемленномъ мѣстѣ одинаковую съ высотою фермы.*

№ 14. Въ треугольной фермѣ ABC (фиг. 286) съ наклонной тягой найти пониженіе точки подвѣса нагрузки вслѣдствіе существованія упругихъ деформацій въ частяхъ фермы, предполагая, что части фермы разсчитаны съ одинаковымъ напряженіемъ, и что матеріалъ ихъ имѣетъ одинаковую величину коэф. упругости.

Отв. Точное выраженіе вертикальнаго перемѣщенія точки подвѣса

$$f = i . l . \left(2 \frac{l}{h} + \frac{h}{l} + \frac{\imath . h}{2l}\right),$$

а приближенно, съ достаточною для практики степенью точности, это выраженіе можно принимать одинаковымъ съ ф-лой **3** задачи № 13.

№ 15. Въ фермахъ ABC (фиг. 285 и 286) при заданной величинѣ *вылета* фермы, т. е. разстоянія $AB = l$, найти высоту фермы

подъ условіемъ. чтобы пониженіе точки подвѣса груза въ фермѣ послѣ ея нагруженія было *min*.

Рѣш. Для этого отъ выраженія **3** (см. предыдущую зад. № 13), представляющаго собою пониженіе точки подвѣса f, надо взять производную по h и приравнять ее нулю. Получимъ

$$h = l \cdot \sqrt{2},$$

т. е. *высота фермы д. б діагональю квадрата, построеннаго на длинѣ вылета, какъ на сторонѣ.*

№ 16. Въ фермѣ ABC (фиг. 285) съ наклоннымъ подкосомъ при данномъ вылетѣ ея l опредѣлить высоту h подъ условіемъ, чтобы вѣсъ частей фермы былъ *min*, если въ растянутой части фермы допускается напряженіе Z, а въ сжатой D.

Рѣш. $S = P \cdot \frac{l}{h}$; $Q = P \cdot \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{h}$

Если вѣсъ куб. *мм.* матеріала будетъ γ, тогда вѣсъ частей фермы будетъ: части AB . . . . . . $\frac{\gamma \cdot P}{Z} \cdot \frac{l^2}{h}$

" BC . . . . . . $\frac{\gamma \; P}{D} \cdot \frac{l^2 + h^2}{h}$

Послѣ этого вѣсъ фермы получимъ такимъ

$$R = \gamma \; P \cdot \left[\frac{l^2}{h} \cdot \frac{D + Z}{D \cdot Z} + \frac{h}{D}\right]$$

Отыскивая *min* этого выраженія, найдемъ

$$h = l \sqrt{\frac{D + Z}{Z}}$$

При $D = Z \ldots h = l \cdot \sqrt{2}$ (см. предыдущую зад.),

т. е. *наивыгоднѣйшее отношеніе высоты фермы къ ея вылету въ смыслѣ наименьшей затраты матеріала на ея изготовленіе соотвѣтствуетъ тѣмъ размѣрамъ фермы, при которыхъ она даетъ наименьшій прогибъ.* При этомъ для всякаго отношенія Z къ D имѣемъ:

$$\min R = \frac{P \cdot \gamma}{D} \cdot 2h$$

№ 17 Въ фермѣ ABC (фиг. 286) съ наклонной тягой опредѣлить отношеніе высоты фермы къ заданному вылету ея подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всей фермы былъ *min*, если въ растянутой части допускается напряженіе Z, а въ сжатой — D.

Отв. Вѣсъ фермы выразится такъ:

$$R = P \cdot \gamma \cdot \left[\frac{l^2}{h} \cdot \frac{Z + D}{Z \cdot D} + \frac{h}{Z}\right]$$

Min R при данномъ l получится, когда

$$h = l \,.\, \sqrt{\frac{Z+D}{D}}\,;\ \text{при}\ D = Z \ldots h = l \,.\, \sqrt{2}.$$

Независимо отъ величины отношенія Z къ D имѣемъ всегда

$$min\ R = \frac{P\,.\,\gamma}{Z}\,.\,2h$$

№ 18. Для выполненія сжатой части фермы ABC (фиг. 286) предыдущей задачи имѣется уже готовая полоса подходящей длины и размѣровъ сѣченія Найти высоту фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ тяги былъ *min*.

Отв. Вѣсъ *тяги* будетъ .... $\frac{P\,.\,\gamma}{Z}\,.\,\frac{l^2+h^2}{h}$. Его *min* получимъ при

$$h = l\ ;\ \text{онѣ будетъ}\ \frac{P\,.\,\gamma}{Z}\,.\,2h$$

№ 19. Желѣзная фабричная дымовая труба AB (фиг. 28)7 передаетъ воспринимаемую ею равномѣрную нагрузку (отъ вѣтра) тягѣ CD. Найти точку прикрѣпленія тяги къ трубѣ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ тяги былъ *min*.

Отв. Положеніе точки C м. б. выбрано произвольно, а уголъ β долженъ быть въ 45^0. Если нужно, чтобы также и вѣсъ трубы при этомъ былъ *min*, указанія на это рѣшеніе имѣются въ задачѣ 57-й курса (§ 27).

№ 20. Посредствомъ четырехъ стержней AB, BC, CD и DB (фиг. 288) нагрузка $2P$ передается въ неподвижный узелъ A. Въ растянутыхъ частяхъ допускается напряженіе Z, въ сжатыхъ — D. Найти положеніе узловой точки B подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всей системы былъ *min* при данныхъ ея размѣрахъ $2a$ и $l = b + c$.

Отв. Вѣсъ всей системы будетъ

$$R = 2P\,.\,\gamma\,\left[\frac{a^2}{b}\,.\,\frac{D+Z}{D.Z} + \frac{l}{Z}\right]$$

Min R при данныхъ l и a получится тогда, когда b будетъ *max*, т. е. когда $c = o$, и тяги изъ точекъ C и D будутъ проведены прямо въ A.

№ 21. Посредствомъ трехъ стержней AC, CD и DA (фиг. 289) нагрузка $2P$ передается въ угловую точку A. Напряженіе въ растянутыхъ частяхъ — Z, въ сжатой — D. При данной длинѣ основанія треугольника CD найти его высоту подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всей системы былъ *min*.

Отв. Вѣсъ всей системы будетъ:

$$R = \frac{2P.\gamma}{Z}.\left[\frac{a^2}{b}.\frac{Z+D}{D}+b\right].$$

Min R получится, когда $b = a.\sqrt{\frac{Z+D}{D}}$; при $Z = D$......$b = a.\sqrt{2}$.

Независимо отъ величины отношенія Z къ D имѣемъ всегда:

$$min\, R = \frac{2P.\gamma}{Z}.2b.$$

№ 22. Треугольная ферма ABC (фиг. 290), нагруженная грузомъ P, удерживается въ равновѣсіи въ положеніи, показанномъ на чертежѣ, силою S_1. При данномъ вылетѣ фермы $l = AC$ найти высоту ея h подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всѣхъ частей былъ *min*. Въ тягѣ допускается напряженіе Z, а въ подкосахъ AC и CB напряженіе D.

Отв. Вѣсъ фермы выражается такъ:

$$R = P.\gamma.\frac{Z+D}{Z.D}.\left[\frac{l^2}{h}+h\right].$$

Независимо отъ величинъ Z и D получается *min R* при $h = l$; причемъ въ случаѣ, когда $Z = D$, имѣемъ:

$$min\, R = \frac{P.\gamma}{Z}.4h.$$

№ 23. Сдѣлать предположеніе въ предыдущей задачѣ, что ферма удерживается въ равновѣсіи наклонною силою T (фиг. 290), которая дѣлаетъ съ вертикалью данный уголъ β, и найти наивыгоднѣйшее соотношеніе между l и h.

Отв. $$W = P.\left(1+\frac{l}{h.tg\beta}\right);\quad T = P.\frac{l}{h.Sin\beta}.$$

$$R = \frac{P.\gamma}{D}.\left[\frac{Z+D}{Z}\left(\frac{l^2}{h}+h\right)+\frac{l}{tg\beta}\right].$$

Min R и здѣсь получится, когда $h = l$, т. е. *длина подкосовъ д. б. одинакова*, и это соотношеніе не зависитъ отъ заданныхъ величинъ Z и D.

№ 24. Треугольная ферма ABC (фиг. 291) съ однимъ подкосомъ и двумя тягами подвѣшена за узелъ A и удерживается въ изображенномъ положеніи тягою S. Найти соотношеніе между ея размѣрами подъ условіемъ *min* ея вѣса.

Отв. $R = \frac{P.\gamma}{Z}.\frac{Z+D}{D}.\left[\frac{l^2}{h}+h\right]$. При $h = l$ получимъ *min R*. Выраженіе вѣса вообще и его *min* одинаковы съ тѣмъ, которое имѣли въ зад. № 22; *въ разсмотрѣнныхъ фермахъ наивыгоднѣйшіе размѣры*

нихъ получаются тогда, когда парныя одноименныя части ихъ (подкосы или тяги) *имѣютъ одинаковую длину*. При $Z=D$ обѣ фермы (фиг. 290, 291), оказывается, обладаютъ еще другимъ свойствомъ: *вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей будетъ у нихъ одинаковъ.*

Когда тяга S (фиг. 291) будетъ наклонна, измѣнится только вѣсъ фермы, но соотношеніе $h=l$ должно имѣть мѣсто также и въ этомъ случаѣ.

№ 25. Нагрузка P передается на опору A (фиг. 292) посредствомъ 4 тягъ равной длины и одного подкоса. При данномъ a найти отношеніе $b:a$ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всей системы былъ *min.*

Отв. $R=\frac{2P.\gamma}{Z}\left[\frac{a^2}{b}.\frac{Z+D}{D}+b\right]$. *Min* R получится, когда

$$b=a.\sqrt{1+\frac{Z}{D}};\ \text{при}\ Z=D.\ ....b=a.\sqrt{2}.$$

Каковы бы ни были величины Z и D...... $min\,R=\frac{P.\gamma}{Z}.2.(2b)$.

№ 25,a. Видъ системы тотъ же самый, что и въ предыдущей задачѣ, но нагрузка привѣшена въ узлахъ B и D (фиг. 293). Найти наивыгоднѣйшіе размѣры въ этомъ случаѣ.

Отв. Тяга AC растягивается усиліемъ $\frac{1}{2}.P$ Вѣсъ всей системы

$$R=\frac{P.\gamma}{Z}.\left[\frac{b^2+a^2}{2b}\ \frac{Z+D}{D}+b\right].$$

При $b^2=\frac{Z+D}{Z+3D}.a^2$ . . . . . $min\,R=\frac{P.\gamma}{Z}.\frac{Z+D}{D}.\frac{a^2}{b}$.

Если $Z=D$ . . . . . $a=b\,.\sqrt{2}$. . . . . . $min\,R=\frac{P.\gamma}{Z}.2.(2b)$.

№ 26. Между данными точками A, B, C (фиг. 294) должна быть расположена узловая точка D, соединенная съ заданными точками посредствомъ трубопровода, вѣсъ погонной единицы котораго по всѣмъ тремъ направленіямъ AD, CD, BD одинаковъ. Положеніе точки D найти подъ условіемъ, чтобы вѣсъ у всего трубопровода былъ *min.*

Рѣшеніе Разстоянія a, b, c даны. Вѣсъ трубопровода будетъ пропорціоналенъ $U=r+s+t$, гдѣ

$$s=\sqrt{r^2+c^2-2\,.\,r\,.\,c\,.\,Cos\,\varphi};\ t=\sqrt{r^2+b^2-2r\,.\,b\,.\,Cos(\theta-\varphi)}$$

$$\frac{dU}{d\varphi}=\frac{ds}{d\varphi}+\frac{dt}{d\varphi}=\frac{1}{2\,.\,s}.2\,.\,r\,.\,c\,Sin\varphi-\frac{1}{2\,.\,t}.2\,.\,r\,.\,b\,.\,Sin\,(\theta-\varphi)=0,$$

$$\frac{c\,.\,Sin\,\varphi}{s}=\frac{b\,.\,Sin\,(\theta-\varphi)}{t},\ \text{или}$$

$$Sin\,\beta=Sin\,\gamma,\ \text{т. е.}\ \alpha=\beta=\gamma.$$

№ 27. Въ треугольной фермѣ ACB (фиг. 295) данъ вылетъ $CD = l$ и длина подкоса $BC = d$. Найти высоту фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ частей былъ *min*. Напряженіе въ растянутой части — Z, въ сжатой — D.

Отв. Вѣсъ фермы выразится такъ:

$$R = \frac{P \, . \, \gamma}{a + b} \cdot \left(\frac{b^3 + l^2}{Z} + \frac{d^2}{D} \right)$$

Min R получится тогда, когда $a + b = m = d \, . \sqrt{\frac{Z + D}{D}}$

Если $Z = D \ldots . m = d \sqrt{2}$; при $a = l \ldots . d = a \sqrt{2} \ldots . a = b$

№ 28. Въ треугольной фермѣ ACB (фиг. 295) дана высота ея $AB = m$ и вылетъ $CD = l$. Найти положеніе узловой точки C подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*. Напряженіе въ растянутой части — Z, въ сжатой — D.

Отв Вѣсъ фермы будетъ

$$R = \frac{P \;\gamma}{m} \cdot \left[\frac{Z + D}{Z . D} \, . \, l^2 + \frac{b^2 \, . \, D + a^2 \, . \, Z}{Z \, . \, D} \right]$$

Min R получится. когда $b : a = Z : D$ независимо отъ величины вылета. Если $Z = D \ldots . b = a$.

№ 29. Въ треугольной фермѣ ABC (фиг. 296) данъ вылетъ $BD = l$ и длина подкоса d. Найти разстояніе между узлами A и C фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ частей былъ *min*. Напряженіе въ растянутой части Z, въ сжатой — D.

Отв. Вѣсъ фермы будетъ въ этомъ случаѣ

$$R = \frac{P \;\gamma}{Z} \cdot \left[\frac{Z + D}{D} \cdot \frac{a^2 + l^2}{h} + h - 2a \right]$$

Min. R получится тогда, когда *назависимо отъ вылета* будемъ имѣть:

$$h = \sqrt{\frac{D + Z}{D} \, . \, (a^2 + l^2)} = d \, . \sqrt{\frac{Z + D}{D}}$$

№ 30. Въ треугольной фермѣ ABC (фиг. 297) данъ вылетъ $CD = l$ и длина подкоса $BC = d$. Найти разстояніе между узлами A и C фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ частей былъ *min*. Напряженіе въ растянутой части Z, въ сжатой — D.

Рѣшеніе. $\quad Q : P = k : m \, ; \, S : P = d : m$

$$k = n \, . \, \frac{l}{a + l} \, ; \; m = a \, . \, \frac{h}{a + l}$$

$$Q = P \cdot \frac{n \, . \, l}{a \, . \, h} \, ; \; S = P \, . \, \frac{a + l}{a} \cdot \frac{d}{h}$$

Вѣсъ фермы будетъ

$$R = P \cdot \gamma \cdot \left[\frac{l \cdot n^2}{a \cdot h \quad Z} + \frac{a+l}{a} \cdot \frac{d^2}{h \cdot D}\right]$$

Принимая въ этомъ выраженіи h и d за постоянныя, беремъ 1-ю производную по перемѣнному a отъ выраженія

$$T = \frac{D \cdot l \cdot n^2 + Z\,(a+l) \cdot d^2}{a},$$

въ которомъ.... $n^2 = h^2 + (a+l)^2$. Искомое значеніе a *независимо отъ вылета фермы* будетъ:

$$a = d \cdot \sqrt{\frac{Z+D}{D}}; \text{ при } Z = D \ldots a = d \cdot \sqrt{2}$$

№ 31. Ферма ABC (фиг. 298) въ видѣ равнобедреннаго треугольника играетъ роль трехплечнаго коромысла, которое совершаетъ свои качанія около оси D, дѣлящей основаніе треугольника BC на двѣ равныя части. Въ вершину A передается усиліе $2P$, поперемѣнно дѣйствующее то въ одну сторону, то въ другую; преодолѣваемыя коромысломъ сопротивленія T приложены къ вершинамъ B и C и будутъ, слѣд., направлены также поперемѣнно то въ одну сторону, то въ другую. Высота фермы дана, нужно найти длину основанія ея подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всѣхъ частей былъ *min*.

Рѣшеніе. $Q = S = P\,\frac{c}{a}$; $T = S \cdot \frac{b}{c} = P \cdot \frac{b}{a}$; $U = P$.

Части BD и CD всегда сжимаются усиліемъ U, тогда какъ части AB и AC поочередно то растягиваются, то сжимаются. Пусть допускаемое напряженіе матеріала при разсчетѣ частей BD и CD будетъ D_1, а для частей AC и AB — D_2, тогда вѣсъ фермы выразится такъ:

$$R = 2P \cdot \gamma \cdot \left[\frac{c^2}{a \cdot D_2} + \frac{a}{D_1}\right]$$

Min этого выраженія получится тогда, когда $a = b \cdot \sqrt{\frac{D_1 \cdot D_2}{D_1 + D_2}}$

Если будетъ допущено $D_1 = D_2$ . . . . $a = b : \sqrt{2}$.

№ 32. Треугольная ферма ABC (фиг. 299) въ узлахъ A и B воспринимаетъ одинаковую нагрузку P и передаетъ ее на опору C. При заданной длинѣ фермы $AB = 2b$ найти высоту ея подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*. Напряженіе въ растянутой части—Z, а въ сжатой — D.

Отв. Вѣсъ фермы будетъ $R_1 = 2P \cdot \gamma \cdot \left[\frac{b^2}{a} \cdot \frac{Z+D}{Z \cdot D} + \frac{a}{D}\right]$.

При $a = b \cdot \sqrt{\frac{Z+D}{Z}}$ . . . . . . $\min R_1 = \frac{2P \cdot \gamma}{D} \cdot 2a$.

№ 33. Та же ферма, что и въ предыдущемъ случаѣ, работаетъ съ 2 тягами и подкосомъ (фиг. 300). Найти ея наивыгоднѣйшіе размѣры и вѣсъ.

Отв. $$R = \frac{2P.\gamma}{Z}\cdot\left[\frac{Z+D}{D}\cdot\frac{b^2}{a}+a\right].$$

$$a = b.\sqrt{\frac{Z+D}{D}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad min\, R = \frac{2P.\gamma}{Z}.2\,a,$$

т. е. общее выраженіе $min\ R$ нашли то же, что и въ предыдущей задачѣ, но a здѣсь другая величина. Если $Z = D$ ... .. $min\ R$ для фермъ 299 300 будетъ совершенно одинаковъ, и въ то же время въ обѣихъ фермахъ будетъ одинаковъ вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей.

№ 34. Въ замѣну фермы фиг. 299 поставлена другая — въ видѣ комбинаціи двухъ равнобедренныхъ треугольныхъ фермъ ACD и BCD (фиг. 301). При заданной длинѣ фермы найти высоту ея CD подъ условіемъ, чтобы вѣсъ этой фермы былъ min.

Отв. $Q = P.\frac{c}{2a} = S$. Давленіе, воспринимаемое узломъ C, равно $2P$: одна половина его передается подкосомъ CD, а другая — подкосами BC и AC. Вѣсъ фермы будетъ

$$R_2 = P.\gamma.\left[\frac{c^2}{a}\quad\frac{Z+D}{Z.D}+\frac{2a}{D}\right],\ \text{гдѣ}\ c^2 = a^2 + b^2.$$

$Min\ R_2$ получится, когда $a = b.\sqrt{\frac{Z+D}{3Z+D}}$.

$$min\ R_2 = \frac{2P.\gamma}{D}.\frac{Z+D}{Z}.\frac{b^2}{a}.$$

№ 35. Рѣшить предыдущую задачу въ предположеніи, что даны и длина фермы $AB = 2b$ и высота ея $CD = h$; при этомъ требуется найти длину наклонныхъ подкосовъ и тягъ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ min (фиг. 302).

Рѣшеніе. $DE = m$; $CE = n$; $m + n = h$.

Нагрузка на тяги . . . . $Q = P.\frac{d}{h}$.

" наклонныхъ подкосовъ . . . . $S = P.\frac{c}{h}$.

" вертикальной стойки . . . . . $T = 2P.\frac{m}{h}$.

Вѣсъ всей фермы будетъ:

$$R = 2P.\gamma.\left[\frac{d^2}{h.Z}+\frac{c^2}{h.D}+\frac{m}{D}\right]$$

$$d^2 = b^2 + m^2;\ c^2 = b^2 + n^2;\ n = h - m.$$

Разсматривая отрѣзокъ m, какъ перемѣнную величину, найдемъ, что $min\ R$ получится, когда

$$m = \frac{h}{2} \cdot \frac{Z}{Z+D};\ \text{при этомъ}$$

$$m : n = Z : (Z + 2D).$$

№ 36. На опоры A и B (фиг. 303), находящіяся на разстояніи $2a$ одна отъ другой, нагрузка передается двумя тягами AC и BC *одинаковой* длины. Опредѣлить длину тягъ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ ихъ былъ *min*.

Отв. Вѣсъ тягъ будетъ . . . . $R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a}$.

Его *min* получится при $a = b$, т. е. когда всѣ 3 узла A, B и C будутъ находиться на окружности, описанной на AB, какъ на діаметрѣ.

$$min\ R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot 2a.$$

№ 37. На опоры A и B (фиг. 304), находящіяся на разстояніи l одна отъ другой, нагрузка передается двумя тягами AC и BC *разной* длины. При заданномъ произвольномъ горизонтальномъ разстояніи a точки подвѣса груза отъ одной изъ опоръ, найти вертикальное разстояніе h точки подвѣса отъ линіи опоръ подъ тѣмъ условіемъ, чтобы вѣсъ обѣихъ тягъ былъ *min*.

Рѣшеніе. Давленія на опоры опредѣлятся такъ:

$$X_1 = P \cdot \frac{b}{l};\ X_2 = \frac{P \cdot a}{l};\ X_1 + X_2 = P.$$

По чертежу (фиг. 304) имѣемъ далѣе, что

$$\frac{X_1}{Q} = \frac{h}{c};\ \frac{X_2}{S} = \frac{h}{d},\ \text{откуда}$$

$$Q = P \cdot \frac{c}{h} \cdot \frac{b}{l};\ S = \frac{d}{h} \cdot \frac{a}{l} \cdot P.$$

Вѣсъ обѣихъ тягъ можно выразить теперь такъ:

$$R = \frac{\gamma}{Z} \cdot (Q \cdot c + S \cdot d) = \frac{P \cdot \gamma}{Z.h.l} \cdot (b \cdot c^2 + a \cdot d^2)$$

$$c^2 = a^2 + h^2;\ d^2 = h^2 + b^2.$$

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{Z.h.l} \cdot \left[(l - a) \cdot (a^2 + h^2) + a \cdot (b^2 + h^2)\right] =$$

$$= \frac{P\ \gamma}{Z.h.l} \cdot \left[(l - a) \cdot a^2 + l \cdot h^2 + a \cdot b^2\right] = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left(h + \frac{a.b}{h}\right) \ldots \mathbf{4}.$$

Min R получится тогда, когда $h^2 = a\ b$. А это указываетъ на то, что *при всякой длинѣ плеча* **a** *точка подвѣса груза должна лежать*

на окружности, описанной на длинѣ AB, какъ на діаметрѣ. Сдѣлавши $h^2 = a \ b$, получимъ

$$min\ R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot 2h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5.$$

Если $a = b$, тогда $h = a$, и вѣсъ тягъ будетъ

$$min\ R_1 = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot 2a$$

Слѣд., изъ всѣхъ случаевъ передачи нагрузки на опоры посредствомъ двухъ тягъ самымъ невыгоднымъ будетъ случай, разсмотрѣнный въ предыдущей задачѣ, когда $max\ h = a$.

№ 38. На струны въ узлахъ A и B (фиг. 305) нагрузка P передается посредствомъ треугольной фермы ABC (съ двумя тягами и однимъ раскосомъ), у которой тяги имѣютъ неодинаковую длину При заданныхъ плечахъ a и b нагрузки относительно опоръ, найти высоту фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min* при условіи $Z = D$.

Рѣш. Опредѣленіе усилій на тяги AC и BC и раскосъ AB здѣсь надо сдѣлать такъ же, какъ и въ зад. № 37. Удерживая тѣ же самыя обозначенія, что и тамъ, мы получимъ, что усиліе, сжимающее раскосъ (см. фиг. 304), будетъ:

$$Y_1 = Y_2 = Q \cdot \frac{a}{c} = S \cdot \frac{b}{d} = P \cdot \frac{a \cdot b}{h \cdot l}$$

Вѣсъ раскоса AB (фиг. 305) будетъ . . . . $\frac{P\ \gamma}{Z}\ \frac{a \cdot b}{h}$

Добавляя эту величину къ вѣсу тягъ, выражаемому ф-лой **4** (см. зад. № 37), получимъ вѣсъ нашей фермы въ такомъ видѣ:

$$R = \frac{P\ \gamma}{Z} \cdot \left(h + \frac{2 \cdot a \cdot b}{h}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Min этой величины получится при $h^2 = 2 \cdot a \cdot b$. Построеніе этого рѣшенія показано на фиг. 305, гдѣ

$$DE = EF = FH = HD = \sqrt{a \cdot b}\ ;\ CD = DF.$$

$$min\ R = \frac{P\ \gamma}{Z} \cdot 2h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7.$$

Изъ сравненія ф-лъ **7** и **5** (см. зад. № 37) видимъ, что передача давленія на опоры A и B безъ употребленія раскоса требуетъ меньшаго вѣса матеріала, чѣмъ при существованіи раскоса. Выполняя самую передачу въ обоихъ случаяхъ наивыгоднѣйшимъ образомъ, при раскосѣ получимъ увеличеніе вѣса фермы въ отношеніи $\sqrt{2} : 1$.

№ 39. Условія предыдущей задачи измѣнены т. о., что въ ферму введенъ еще 2-й подкосъ CD (фиг. 306), и нагрузка передается на

шарнирный узелъ D. Найти высоту подкоса $CD = h$ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min.*

Рѣш. Въ ф-лѣ **6** предыдущей задачи надо добавить еще вѣсъ подкоса CD, тогда вѣсъ фермы (фиг. 306) будетъ:

$$R = \frac{P.\gamma}{Z} \cdot \left(2h + \frac{2.a.b}{h}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{8}$$

Min его получимъ, когда $h^2 = a.b$, т. е. рѣшеніе одинаково съ зад. № 37, при этомъ

$$min\ R = \frac{P.\gamma}{Z} \cdot 4h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{9},$$

т е. отношеніе наивыгоднѣйшихъ вѣсовъ трехъ фермъ, изображенныхъ на фигурахъ 304, 305, 306, будетъ равно $1 : \sqrt{2} : 2$. Изъ сравненія ф-лъ **5** и **9** видно, что *вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей этой фермы* (фиг. 306) *одинаковъ.*

№ 40. Въ зад. № 38 (фиг. 305) предположить, что растянутыя части разсчитываются съ напряженіемъ Z, а сжатая — съ напр. D.

Отв. $$h^2 = a \cdot b \ \frac{Z + D}{D}\ ; \ min\ R = \frac{P.\gamma}{Z} \cdot 2h \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{10}$$

№ 41. Въ зад. № 39 (фиг. 306) предположить, что Z — напряженіе для тягъ, а D — напряженіе для раскосовъ.

Отв. $$h^2 = a.b;\ min\ R = \frac{P.\gamma}{Z} \cdot \frac{Z + D}{D} \cdot 2h \quad . \quad . \quad \mathbf{11}$$

№ 42. На неподвижныя опоры A и D (фиг. 307) нагрузка передается посредствомъ трехъ тягъ AB, BC, CD. Плечи нагрузокъ относительно опоръ одинаковы. Найти высоту точекъ подвѣса грузовъ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ тягъ былъ *min.*

Отв. Вѣсъ тягъ выражается здѣсь такъ:

$$R = \frac{P.\gamma}{Z} \cdot \left(2h + \frac{a\,.\,l}{h}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{12}$$

Min этой величины получается, когда $2h^2 = a\,.\,l$. Построеніе этого рѣшенія показано на фиг. 307, гдѣ

$$AE = AF;\ OF = a + \frac{l}{2};\ HA = BE = h.$$

$$min.\ R = \frac{2P.\gamma}{Z} \cdot 2h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{13}$$

При $a = \frac{l}{2}$ мы получаемъ условія задачи № 36 (фиг. 303) и полное согласіе результатовъ.

Ф-ла $2h^2 = a.l$ показываетъ, что при измѣненiи плеча a высоты h будутъ измѣняться, какъ ординаты параболы.

№ 43. На вертикальныя струны въ точкахъ A и D (фиг. 308) нагрузка передается посредствомъ симметричной трапецевидной фермы $ABCD$. Найти высоту фермы подъ условiемъ, чтобы вѣсъ ея былъ *min*, въ предположенiи, что $Z = D$.

Рѣш. Усилiе, сжимающее часть AD будетъ $P \cdot \frac{a}{h}$; вѣсъ этой фермы получится изъ ф-лы **12** (зад. № 42) добавленiемъ вѣса части AD, и онъ будетъ:

$$R = \frac{2P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left(h + \frac{a \cdot l}{h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{14.}$$

Min его получится когда $h^2 = a \cdot l$, т. е. высота фермы здѣсь будетъ $\sqrt{2}$ разъ болѣе, чѣмъ въ предудыщемъ случаѣ. Построенiе рѣшенiя представлено на фиг. 308.

$$min\ R = \frac{2P \cdot \gamma}{Z} \cdot \mathbf{2h}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{15.}$$

При $a = \frac{l}{2}$ мы получимъ здѣсь условiя, одинаковыя съ зад. № 21, и полное согласiе результатовъ.

№ 44. Въ предыдущей задачѣ добавлены подкосы EB и KC (фиг. 309), и нагрузка передается на узлы E и K. Найти высоту фермы подъ условiемъ, чтобы вѣсъ ея былъ *min*, въ предположенiи $Z = D$.

Рѣш. Къ выраженiю **14** (зад. № 43) надо добавить вѣсъ двухъ подкосовъ длиною h каждый, нагруженныхъ силою P.

$$R = \frac{2P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left(2h + \frac{a \cdot l}{h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{16.}$$

Сравненiе вѣса фермъ, изображенныхъ на фиг. 307 и 309, показываетъ, что послѣдняя будетъ вдвое тяжелѣе 1-й, а *min* вѣса получается въ обоихъ случаяхъ при одной и той же высотѣ фермы, опредѣляемой изъ р-ва $2h^2 = a . l$. Построенiе этого рѣшенiя дано на фиг. 307.

$$min\ R = \frac{2P \cdot \gamma}{Z} \cdot \mathbf{4h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{17.}$$

Сравненiе минимальнаго вѣса фермъ, изображенныхъ на фиг. 307, 308, 309, даетъ то же самое отношенiе $1 : \sqrt{2} : 2$, которое имѣли при сравненiи фермъ, показанныхъ на фиг. 304, 305, 306. Кромѣ того, обнаруживается, что въ случаѣ минимальнаго вѣса у фермъ фиг. 306 и 309 отношенiе вѣса растянутыхъ частей къ вѣсу сжатыхъ $= 1$.

При $a = \frac{l}{2}$ ферма фиг. 309 обращается въ ферму фиг. 306, и при этомъ получается полное согласiе результатовъ въ обоихъ случаяхъ.

№ 45. Рѣшить задачу № 43 (фиг. 308) въ предположеніи, что Z не равно D.

Отв. $$R = \frac{P.\gamma}{Z}\left(2h + \frac{a.l}{h} \cdot \frac{Z+D}{D}\right) \quad \text{. . . . . 18.}$$

При $$h^2 = \frac{a.l}{2} \cdot \frac{Z+D}{D} \ldots\ldots min\,R = \frac{2P.\gamma}{Z}.2h \quad \text{. . . . . 19.}$$

Выраженіе *min* вѣса остается то же самое, что и прежде (см. ф-лу **15**), но абсолютная величина его будетъ другая.

№ 46. Рѣшить задачу № 44 (фиг. 309) въ предположеніи, что Z не равно D.

Отв. $$R = \frac{P.\gamma}{Z} \cdot \frac{Z+D}{D} \cdot \left(2h + \frac{a.l}{h}\right) \quad \text{. . . . . 20.}$$

При какомъ угодно отношеніи Z къ D, когда $a.l = 2.h^2$, получается

$$min\,R = \frac{2P.\gamma}{Z} \cdot \frac{Z+D}{D}.2h \quad \text{. . . . . 21.}$$

Наивыгоднѣйшая высота фермы остается та же, что и въ зад. № 44, т. к. она не зависитъ отъ величинъ Z и D.

№ 47. Сравнить между собою вѣса фермъ съ однимъ вертикальнымъ подкосомъ (фиг. 310), съ двумя (фиг. 311) и съ безконечно большимъ числомъ подкосовъ, предполагая, что каждая изъ фермъ выполнена съ *min* ея вѣса.

Рѣшеніе. Величина нагрузки надъ фермой $= P$, длина ея $AC = l$.

а. Случай одного подкоса (фиг. 310). Вѣсъ фермы R_1; для опредѣленія его въ ф-лу **9** (зад. № 39) надо внести

$$\frac{P}{2} \text{ вмѣсто } P; \ \frac{l}{2} \text{ вмѣсто } h; \text{ тогда}$$

$$R_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\gamma}{Z}.4.\frac{l}{2} = \frac{P}{Z}.l.\gamma;$$

т. е. *вѣсъ такой фермы будетъ одинаковъ съ призматическимъ стержнемъ, имѣющимъ длину данной фермы и разсчитаннымъ на растяженіе по всей величинѣ нагрузки, расположенной на данномъ пролетѣ фермы.*

б. Случай двухъ подкосовъ (фиг. 311). Вѣсъ фермы R_2; дл опредѣленія его въ удвоенную ф-лу **9** надо внести

$$\frac{P}{3} \text{ вмѣсто } P; \ \frac{l}{3} \cdot \sqrt{2} \text{ вмѣсто } h, \text{ т. к. } h^2 = \frac{l}{3} \cdot \frac{2l}{3}.$$

$$R_2 = 2.\frac{P}{3} \cdot \frac{\gamma}{Z}.4.\frac{l}{3}\sqrt{2} = \frac{P}{Z}.\gamma.\frac{8}{9}.\sqrt{2} = 1{,}257.\frac{P}{Z}.l.\gamma.$$

в. Случай безконечно большого числа подкосовъ. Вѣсъ фермы R_3; для опредѣленія его по данной нагрузкѣ $P = p.l$ надо внести въ ф-лу **9**:

$$p.da \text{ вмѣсто } P;\ \sqrt{a.(l-a)} \text{ вмѣсто } h$$

$$R_3 = \frac{4p.\gamma}{Z}.\int_0^l \sqrt{a.(l-a)}.da. \quad \dots \quad \mathbf{22.}$$

Введемъ обозначенія

$$l = 2c;\quad c - a = x;\ \text{тогда}$$

$$a = c - x;\ l - a = c + x;\ da = -dx.$$

Когда $a = c \dots x = o$; при $a = o \dots x = c$.

$$R_3 = \frac{8p.\gamma}{Z}.\int_0^c \sqrt{a.(l-a)}.da = \frac{8p.\gamma.}{Z}.\int_0^c \sqrt{c^2 - x^2}.dx \dots \ \mathbf{23.}$$

Введемъ новое перемѣнное:

$$x = c.Sin\,\beta;\ \sqrt{c^2 - x^2} = c.Cos\,\beta;\ dx = c.Cos\,\beta.d\beta.$$

$$\int \sqrt{c^2 - x^2}.dx = c^2.\int \frac{1 + Cos\,2\beta}{2}.d\beta = c^2.\frac{\beta + Sin\,\beta.Cos\,\beta}{2}$$

$$R_3 = \frac{4p.\gamma}{Z}.c^2.\left[arc\ Sin\frac{x}{c} + \frac{x.\sqrt{c^2 - x^2}}{c^2}\right]_0^c$$

$$R_3 = \frac{4p\gamma}{Z}.c^2.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.\frac{p.\gamma}{Z}\,l^2 = 1{,}5717.\frac{P}{Z}.l.\gamma \ \dots \ \mathbf{24}$$

$$R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 1{,}257 : 1{,}5717.$$

№ **48**. Нагрузка P поддерживается на пролетѣ l одинъ разъ одинарною фермою типа фиг. 309, а другой разъ безконечно большимъ числомъ подобныхъ фермъ. Въ 1-мъ случаѣ подкосы дѣлятъ длину пролета на 3 равныя части, и въ обоихъ случаяхъ высота фермъ наивыгоднѣйшая. Сравнить между собою вѣса этихъ фермъ.

Рѣш. Случай двухъ подкосовъ (фиг. 309)....$a = \frac{l}{3}$; $h = l:\sqrt{6}$

При опредѣленіи вѣса фермы по ф-лѣ **17** (см. зад. № 44) вмѣсто P надо внести здѣсь $\frac{P}{3}$, тогда

$$R_1 = 2.\frac{P}{3}.\frac{\gamma}{Z}.4.\frac{l}{\sqrt{6}} = \frac{8}{3\sqrt{6}}.\frac{P}{Z}.l.\gamma \ \dots \ \mathbf{25.}$$

Случай безконечно большого числа подкосовъ **типа фиг. 309. При опредѣленіи вѣса фермы по ф-лѣ 17, въ этомъ случаѣ надо вносить въ нее**

$$p \,.\, da \text{ вмѣсто } P\,;\ \sqrt{a \,.\, \frac{l}{2}} \text{ вмѣсто } h.$$

Пусть $l = 2c$, тогда мы получимъ вѣсъ одной изъ фермъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{2\gamma}{Z} \,.\, p \,.\, da \,.\, 4\ \sqrt{a \,.\, c}\,,$$ а вѣсъ всѣхъ фермъ будетъ:

$$R_2 = \frac{8\,p\,.\,\gamma}{Z} \cdot \sqrt{c} \,.\, \int_0^c \sqrt{a} \,.\, da = \frac{16}{3} \frac{p\,.\,\gamma}{Z} \,.\, c^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{Z}\ l \,.\, \gamma \ldots \mathbf{26.}$$

Отношеніе $R_1 : R_2 = \frac{8}{3\sqrt{6}} : \frac{4}{3} = 1 : 1{,}2247.$

№ 49. Ферма AmB (фиг. 312) съ весьма большимъ числомъ вертикальныхъ стоекъ имѣетъ верхній поясъ прямолинейный, а нижній очерченъ у нея по параболѣ AmB. Верхній поясъ фермы воспринимаетъ на себя нагрузку $P = p \,.\, l$, равномѣрно-распредѣленную по всей длинѣ l пролета. Найти вѣсъ такой фермы и ея высоту h подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*, въ предположеніи. что $Z = D$.

Рѣшеніе. Ур-іе параболы $A\,m\,B$, отнесенной къ осямъ координатъ $x\,A\,y$, будетъ:

$$y = 4\,h\ \ x \,.\, \frac{l - x}{l^2} \,. \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{27}$$

При $x = o \ldots . y = o$; при $x = l \ldots . y = o$; при $x = \frac{l}{2} \ldots\ldots$ $y = h = mn$

Для нахожденія силы T, сжимающей верхній поясъ, сдѣлаемъ произвольное сѣченіе gk на разстояніи x отъ лѣвой опоры и напишемъ условіе равновѣсія части $g\,A\,k$ фермы. Примемъ точку k за центръ моментовъ, тогда:

$$\frac{p\,.\,l}{2} \,.\, x - T\ \ y = p \,.\, x \,.\, \frac{x}{2}\,;\ T = \frac{p\,.\,l^2}{8\,h} \quad \ldots \quad \mathbf{.\,28,}$$

т. е. усиліе, сжимающее верхній поясъ, не зависитъ отъ x и будетъ оставаться постояннымъ на всемъ протяженіи пролета Вѣсъ верхняго пояса r_1 будетъ

$$r_1 = \frac{P\,.\,\gamma}{Z}\ \ \frac{l^2}{8\,h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{a.}$$

Если касательная къ параболѣ въ точкѣ k дѣлаетъ съ горизонталью уголъ β, тогда натяженіе S нижняго пояса въ точкѣ k мы получимъ,

проектируя на направленіе касательной kd всѣ силы, дѣйствующія на часть фермы $g\,A\,k$:

$$S = T\,.\,Cos\,\beta + \left(\frac{p\,.\,l}{2} - p\,.\,x\right).\,Sin\,\beta \quad \ldots\ldots \text{б.}$$

Введемъ обозначеніе $\frac{l}{2} = c$. Элементъ длины дуги параболы при точкѣ κ можно представить въ видѣ $dx : Cos\,\beta$, тогда вѣсъ растянутаго параболическаго пояса фермы будетъ:

$$r_2 = \sum_0^l \frac{\gamma}{Z}.\,S.\,\frac{dx}{Cos\,\beta} = \frac{\gamma}{Z}.\int_0^l [T + p.(c - x).\,tg\beta].\,dx. \quad \ldots \text{в}$$

$$tg\,\beta = \frac{dy}{dx} = 4h\,.\,\frac{l - 2x}{l^2} = 8h\,.\,\frac{c - x}{l^2}$$

$$r_2 = \frac{\gamma}{Z}.\int_0^l \left[T + \frac{8\,p.h}{l^2}\,.\,(c - x)^2\right].\,dx = \frac{\gamma}{Z}.\left[T\,.\,x - \frac{8}{3}.\frac{p.h}{l^2}(c - x)^3\right]_0^l$$

$$r_2 = \frac{\gamma}{Z}\left(\frac{p\,.\,l^3}{8h} + \frac{2}{3}.p.l.h\right) = \frac{P\,.\,\gamma}{Z}\left(\frac{l^2}{8h} + \frac{2h}{3}\right) \quad \ldots\ldots \text{г.}$$

Усиліе, сжимающее каждую изъ безконечно большого числа стоекъ, будетъ $p.dx$, ея длина y; а вѣсъ всѣхъ стоекъ будетъ

$$r_3 = \frac{p\,.\,\gamma}{Z}.\int_0^l y\,.\,dx = \frac{4h}{l^2}.\frac{p\,.\,\gamma}{Z}\int_0^l (l.x - x^2).\,dx = \frac{4h}{l^2}.\frac{p\,.\,\gamma}{Z}.\left[\frac{l\,.\,x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$r_3 = \frac{p\,.\,\gamma}{Z}\;\frac{4}{6}\,.\,h\,.\,l = \frac{2}{3}.\,\frac{P\,.\,\gamma}{Z}.\,h \quad \ldots\ldots \text{д.}$$

Складывая выраженія **а**, **г**, **д**, получимъ вѣсъ всей фермы.

$$R = r_1 + r_2 + r_3 = \frac{P\,.\,\gamma}{Z}.\left[\frac{l^2}{4h} + \frac{4}{3}h\right] \quad \ldots\ldots \textbf{29.}$$

Min этого выраженія получится, когда

$$\frac{l^2}{h^2} = \frac{16}{3},\ \text{или}\ h = \frac{l.\sqrt{3}}{4}. \quad \ldots\ldots \text{е.}$$

Геометрическое построеніе этого рѣшенія показано на фиг. 313, гдѣ сторона квадрата $ABCD$ равна l, тогда

$$BD = BE = l\,.\,\sqrt{2};\ AE = l\,.\,\sqrt{3},$$

и четверть этой длины, т. е. AF, будетъ искомая величина h.

$$min\,R = \frac{P\,.\,\gamma}{Z}.\,\frac{2l}{\sqrt{3}} = \frac{P\,.\,\gamma}{Z}.\,\frac{8h}{3} \quad \ldots\ldots \textbf{30.}$$

№ 50. Треугольная ферма ABC (фиг. 314) воспринимаетъ нагрузку P то въ узлѣ A, то въ узлѣ D. При заданномъ положеніи узловъ A и D найти высоту фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ ея былъ *min.*

Отв. Вѣсъ фермы будетъ $R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left[3h + \frac{c^2 + 2l^2}{h}\right]$. . . . **31.**

Его *min* получится, когда $h = \sqrt{\frac{c^2 + 2l^2}{3}}$.

$$min\, R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} . 6\, h. \qquad \textbf{32.}$$

При $c = \frac{l}{2}$ . . . . . . $h = l . \frac{\sqrt{3}}{2}$. . . . . **33.**

№ 51. Ферма, состоящая изъ трехъ тягъ AE, AC, BC (фиг 315) и двухъ раскосовъ AB, CE, воспринимаетъ на себя нагрузку P. Опоры находятся въ узлахъ A и B. Раскосы AB и CE въ сѣченіи D ничѣмъ не связаны между собою. Даны главные размѣры фермы a и h, найти два другіе ея размѣра x и y подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*, предполагая $Z = D$.

Рѣшеніе. $Q = \frac{P}{x} . \overline{AE}$; $S = P . \frac{a}{x}$.

Вѣсъ тяги AE . . . . $r_1 = \frac{P \cdot \gamma}{Z} . \frac{a^2 + x^2}{x}$ . . . . **а.**

Вѣсъ подкоса CE . . . $r_2 = \frac{P \cdot \gamma}{Z} . a . \frac{a + y}{x}$ . . . . **б.**

Сопротивленія опоръ A и B въ горизонтальномъ направленіи $= X$ и могутъ быть опредѣлены изъ условія равновѣсія:

$X . (h + x) = P . a$, откуда $X = P . \frac{a}{h + x}$ . . . . . **в.**

Усиліе T тяги BC и сопротивленіе Y_1 стойки BD опредѣлятся такъ:

$T : X = \overline{BC} : y$; $T = P . \frac{a}{h + x} . \frac{\overline{BC}}{y}$ . . . . **г.**

$Y_1 : X = h : y$; $Y_1 = P . \frac{a}{h + x} . \frac{h}{y}$ . . . . **д.**

По X и S найдется величина V, проекція натяженія U на горизонталь:

$V = S - X = P . \frac{a}{x} - P . \frac{a}{h + x} = P . \frac{a}{x} . \frac{h}{h + x}$. . . . **е.**

Усиліе U тяги AC и давленіе Y_2 на стойку AB будутъ:

$$U : V = \overline{AC} : y; \quad U = P \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{h}{h+x} \cdot \frac{\overline{AC}}{y} \quad \text{ж.}$$

$$Y_2 : V = x : y; \quad Y_2 = P \cdot \frac{a}{y} \cdot \frac{h}{h+x} \quad \text{з.}$$

Сравнивая между собою ф-лы д и з, видимъ, что $Y_1 = Y_2$; слѣд., стойка AB будетъ сжиматься усиліемъ $P + Y_2$, а на опору B будетъ передаваться только вертикальное давленіе P.

Вѣсъ тяги BC по усилію T опредѣлится такъ:

$$r_3 = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{a}{h+x} \cdot \frac{h^2 + y^2}{y} \quad \text{и.}$$

Вѣсъ тяги AC по усилію U напишется слѣд. обр.:

$$r_4 = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{a}{h+x} \cdot \frac{h}{x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{y} \quad \text{і.}$$

Наконецъ вѣсъ стойки AB, сжимаемой усиліемъ $P + Y_2$, будетъ:

$$r_5 = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left[1 + \frac{a}{y} \cdot \frac{h}{h+x}\right] \cdot (x+h) \quad \text{к.}$$

Складывая вѣса всѣхъ пяти частей, получимъ полный вѣсъ фермы:

$$R = \frac{P}{Z}\gamma \cdot \left[h + 2x + 2 \cdot \frac{a^2}{x} + 2 \cdot \frac{a \cdot y}{x} + 2 \cdot \frac{a \cdot h}{y}\right] \quad \mathbf{34.}$$

Взявши частныя производныя отъ R сначала по x, а затѣмъ по y и приравнявши обѣ ихъ порознь нулю, получимъ условія наименьшаго вѣса крана:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left[2 - 2 \cdot \frac{a^2}{x^2} - 2 \cdot \frac{a \cdot y}{x^2}\right] = o, \text{ откуда}$$

$$x^2 = a^2 + a \cdot y; \quad x = \sqrt{a \cdot (a+y)} \quad \mathbf{35}$$

$$\frac{dR}{dy} = \frac{P}{Z}\gamma \cdot \left[2 \cdot \frac{a}{x} - 2 \cdot \frac{a \cdot h}{y^2}\right] = 0, \text{ откуда}$$

$$y^2 = x \cdot h; \quad y = \sqrt{h \cdot x} \quad \mathbf{36.}$$

Ф-ла **36** показываетъ, что узлы A, C, B въ кранѣ, построенномъ съ наименьшимъ вѣсомъ, при данныхъ a и h, должны лежать на дугѣ окружности, описанной на длинѣ стойки, какъ на діаметрѣ.

Удовлетворяя одновременно р-ва **35** и **36**, мы придемъ къ ур-ію 4-й степени относительно y. Чтобы избѣжать необходимости его рѣшенія, употребимъ такой пріемъ.

Пусть $y = m \cdot x$, тогда по **36**...... $x = \dfrac{h}{m^2}$ . . . **37.**

По **35**....... $\frac{h^2}{m^4} = a^2 + a \cdot m \cdot x = a^2 + a \cdot \frac{h}{m}$, откуда

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 = m^4 + m^3 \cdot \frac{h}{a}; \quad \frac{h}{a} = \frac{m^3 + \sqrt{m^6 + 4 \cdot m^4}}{2} \quad \ldots \quad \mathbf{38.}$$

По **37**....... $\frac{x}{a} = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{h}{a}; \quad \frac{y}{a} = m \cdot \frac{x}{a}$ . . . . . . **39.**

Такимъ образомъ, задаваясь m, результаты вычисленія по ф-ламъ **37, 38, 39** можно свести въ слѣд. таблицу:

m	$h:a$	$x:a$	$y:a$
0,8	0,945	1,464	1,171
0,9	1,253	1,547	1,392
1	1,618	1,618	1,618
1,1	2,047	1,691	1,860
1,2	2,568	1,783	2,140

Цифры этой таблицы показываютъ, что наивыгоднѣйшія соотношенія между размѣрами этой фермы значительно отступаютъ отъ тѣхъ, которыя встрѣчаются въ осуществленныхъ фермахъ такого типа при построеніи подъемныхъ крановъ.

№ 52. Въ фермѣ предыдущей задачи (фиг. 315) ввести дополнительную тягу AF, положеніе которой опредѣляется отрѣзкомъ $b = n \cdot a$, и найти новое значеніе величинъ x и y.

Отв. Вѣсъ фермы (изъ шести частей) здѣсь будетъ:

$$R = \frac{P \gamma}{Z} \cdot \left[h + 3x + \frac{2a^2 + b^2}{x} + 2 \cdot \frac{a \cdot y}{x} + 2 \frac{a \cdot h}{y}\right] \ldots \mathbf{40.}$$

Чтобы величина R была min, необходимо въ одно время удовлетворить два слѣд. ур-ія: $y^2 = x \cdot h$ **41**

$$x^2 = \frac{2a^2 + b^2 + 2a \cdot y}{3} = a \cdot \frac{(2 + n^2) \cdot a + 2y}{3} \quad \ldots \quad \mathbf{42.}$$

Соотношеніе **41** тождественно съ **36**, слѣд., и въ этой фермѣ также всѣ 3 узла A, C, B расположатся на окружности, имѣющей длину $x + h$ своимъ діаметромъ, только длина x будетъ короче, нежели у предыдущей фермы. Вводя и здѣсь также $y = m \cdot x$, получимъ

по **41**.... $x = h : m^2$; затѣмъ по **42**

$$\frac{h^2}{m^4} = a^2 \cdot \frac{2 + n^2}{3} + \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{h}{m}, \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{2}{3} m^3 \cdot \frac{h}{a} + \frac{2+n^2}{3} m^4, \text{ или}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{m^3 + \sqrt{m^6 + 3m^4(2+n^2)}}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{43}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{h}{a}; \quad \frac{y}{a} = m \cdot \frac{x}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{44}.$$

Задавая n равнымъ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, получимъ слѣд. таблицу:

	$h : a$		$x : a$		$y : a$	
	$m = 1$	$m = 1{,}1$	$m = 1$	$m = 1{,}1$	$m = 1$	$m = 1{,}1$
$n = \frac{1}{2}$	1,261	1,582	1,261	1,307	1,261	1,438
$n = \frac{1}{3}$	1,236	1,552	1,236	1,283	1,236	1,411

№ 53. Сравнить между собою вѣса двухъ фермъ типа фиг. 315 (безъ тяги AF), одной — съ наивыгоднѣйшими размѣрами, опредѣляющими *min* вѣса, и другой — съ размѣрами, встрѣчающимися въ практикѣ, при слѣдующихъ данныхъ:

Ферма I	$\frac{h}{a} = 1{,}253$	$\frac{x}{a} = 1{,}547$	$\frac{y}{a} = 1{,}392$	$\frac{y}{x} = 0{,}9$
„ II	1,253	0,25	0,25	1,0

Отв. По ф-лѣ **34** получимъ въ обоихъ случаяхъ

$$\left.\begin{array}{l} \text{для фермы I. . . . . } R_1 = \frac{P \cdot \Upsilon}{Z} . a . 9{,}24 \\ \text{„ „ II. . . . . } R_2 = \frac{P \cdot \Upsilon}{Z} . a . 21{,}777 \end{array}\right\} \frac{R_2}{R_1} = \mathbf{2{,}35}.$$

№ 54. Ферма $ABCD$ (фиг. 316) состоитъ изъ двухъ тягъ и трехъ подкосовъ. Опоры ея — A и D; точка B подвѣса груза опредѣляется данными координатами h и l относительно точки A. Найти размѣры x и y фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*, когда Z не равно D.

Рѣшеніе. $S = P . \frac{\overline{BC}}{x}$; $Q = P . \frac{\overline{AB}}{x}$; $U = P . \frac{l}{y}$

$$T = U . \frac{\overline{CD}}{x}; \quad V = U . \frac{y}{x}; \quad W = S . \frac{h - x}{BC} = P . \frac{h - x}{x}.$$

Усиліе, сжимающее стойку AC . . . $U - W = P.\left(\frac{l}{y} + 1 - \frac{h}{x}\right)$.

Вѣсъ подкоса AB . . . . $r_1 = \frac{P.\gamma}{D} . \frac{l^2 + h^2}{x}$.

„ „ AC . . . . . $r_2 = \frac{P.\gamma}{D} . \left(\frac{l}{y} + 1 - \frac{h}{x}\right) . x$

„ „ AD . . . . $r_3 = \frac{P.\gamma}{D} . \frac{l.y}{x}$.

Вѣсъ тяги BC . . . . $r_4 = \frac{P.\gamma}{Z} . \frac{l^2 + (h - x)^2}{x}$

„ „ CD . , . . . $r_5 = \frac{P.\gamma}{Z} . \frac{l}{x} . \frac{x^2 + y^2}{y}$.

Полный вѣсъ всѣхъ пяти частей фермы будетъ:

$$R = \frac{P.\gamma}{D.Z} . \left[(Z + D) . \left(\frac{h^2 + l^2}{x} + x + \frac{l}{x} . \frac{x^2 + y^2}{y}\right) - (Z + 2D) . h\right] \quad \mathbf{45.}$$

Для нахожденія *min* этого выраженія беремъ частныя 1-я производныя отъ R по перемѣннымъ x и y и приравниваемъ ихъ нулю:

$$\frac{dR}{dy} = \frac{P.\gamma}{Z} . \frac{Z + D}{D} . \frac{l}{x} . \frac{y^2 - x^2}{y^2} = 0 \;\ldots\ldots\; y = x \quad \mathbf{46}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{P.\gamma}{Z} . \frac{Z + D}{D} . \left[1 - \frac{h^2 + l^2}{x^2} + \frac{l}{y} \; \frac{x^2 - y^2}{x^2}\right], \text{ откуда}$$

$$x^2 = l^2 + h^2; \qquad x = \sqrt{l^2 + h^2} = \overline{AB} = \overline{AC} \quad \mathbf{47.}$$

Оба соотношенія, выражаемыя ф-лами **46** и **47**, какъ видно, совершенно не зависятъ отъ величины допускаемыхъ напряженій и показываютъ, что *длину всѣхъ трехъ подкосовъ, независимо также и отъ заданныхъ l и h нужно дѣлать одинаковою* для полученія *min* вѣса фермы.

$$min\, R = \frac{P.\gamma}{Z.D} . \left[(Z + D) . 2(x + l) - (Z + 2D) . h\right] \quad \mathbf{48.}$$

Если $h = 0$, тогда ферма на фиг. 316 будетъ одинакова съ фермой на фиг. 306, если сдѣлать у послѣдней равныя плечи; при этомъ будемъ имѣть на фиг. 316 $x = l$, и выраженіе вѣса **48** будетъ совершенно тождественно съ **11** (см. зад. № 41).

№ 55. Въ предыдущей задачѣ (фиг. 316), кромѣ перемѣнныхъ x и y, можетъ быть принята за независимое перемѣнное также и высота точки подвѣса h. Опредѣлить величину ея подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min* при данной величинѣ l.

Рѣш. Частная производная отъ R по h (см. ф-лу **45**) будетъ:

$$\frac{dR}{dh}=\frac{P.\gamma}{Z.D}\cdot\left[\frac{Z+D}{x}.2h-Z-2D\right]=0, \text{ откуда}$$

$$h=\frac{x}{2}\cdot\frac{Z+2D}{Z+D}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{49}$$

$$min\,R=\frac{P.\gamma}{Z.D}\;\frac{(Z+D)^2.4.(x+l)-(Z+2D)^2.x}{2.(Z+D)}\;.\;.\;. \quad \mathbf{50.}$$

При $Z=D.\;.\;.\;h=\frac{3}{4}x;\; x^2=\frac{16}{9}.h^2=l^2+h^2;\; h=l.\sqrt{\frac{9}{7}}$

$$min\,R=\frac{P.\gamma}{Z}.l.(4+\sqrt{7})\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathbf{51.}$$

№ 56. Схему фермы подъемнаго крана съ неподвижной колонной даетъ фиг. 317: AB — укосина. AC и BC — тяги. D — колонна. Опредѣлить соотношеніе между главными размѣрами крана h, l, x подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*. При этомъ дано Z — напряженіе растяженія для тягъ AC и BC, D — напряженія сжатія для подкоса AB, и B — напряженіе сгибанія для колонны D, разсчетъ которой будетъ вестись съ этимъ напряженіемъ только на одно сгибаніе. Оси обѣихъ тягъ BC лежатъ въ одной плоскости съ осью колонны D, такъ что усиліе $U-W=P$ будетъ направлено по оси колонны центрально.

Рѣш. $S=P.\frac{\overline{AC}}{x};\; Q=P.\frac{\overline{AB}}{x};\; U=\frac{Q.h}{AB}=P.\frac{h}{x}$

Вѣсъ тяги $AC\ldots.\; r_1=\frac{P\,\gamma}{Z}.\frac{l^2+(h-x)^2}{x}$

„ „ $BC.\ldots\; r_2=\frac{P\,\gamma}{Z}.\frac{h^2}{x}$

„ подкоса $AB\ldots.\; r_3=\frac{P.\gamma}{D}.\frac{l^2+h^2}{x}$

Сгибающій моментъ для нижняго сѣченія колонны...$T.x=P.l$.

Если діам. колонны въ нижнемъ сѣченіи будетъ d, тогда разсчетное ур-іе этого сѣченія будетъ:

$$P.l=\frac{B.\pi}{32}.d^3;\quad d=\sqrt[3]{\frac{32}{\pi.B}.P.l}$$

Если бы колонна была выполнена въ видѣ тѣла равнаго сопротивленія сгибанію (см. часть II, § 40 B), вѣсъ ея былъ бы $=0,6$ отъ вѣса цилиндра съ діам. d Допуская нѣкоторыя отступленія отъ идеальной формы колонны, внесемъ въ формулу ея вѣса $0,6\,.\,\beta$ вмѣсто $0,6$; тогда вѣсъ колонны будетъ:

$$r_4 = 0{,}6\ .\ \beta . \frac{\pi}{4}\ .\ d^2 . \gamma_1 . x = b\ .\ x\ .\ \frac{P . \gamma}{Z}, \text{ гдѣ при } \gamma = \gamma_1$$

$$b = 1{,}2\ .\ \beta\ .\ Z\ .\ \sqrt[3]{\frac{2\pi . l^2}{P . B^2}} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{52.}$$

Полный вѣсъ крана получится въ такомъ видѣ:

$$R = \frac{P . \gamma}{Z} . \left[\frac{(h^2 + l^2)(Z + D) + D . h^2}{D . x} + x(1 + b) - 2h\right] \dots \mathbf{53.}$$

При данныхъ h и l выраженіе *min* R получится тогда, когда

$$x = \sqrt{\frac{(h^2 + l^2)(Z + D) + D . h^2}{D . (1 + b)}} \quad \dots\dots \quad \mathbf{54.}$$

$$min\ R = \frac{2P\gamma}{Z} . [x . (1 + b) - h] \quad \dots\dots \quad \mathbf{55.}$$

Какъ видно по формуламъ **52** и **54**, наивыгоднѣйшая высота колонны крана зависитъ, кромѣ величины напряженій Z и B, еще отъ величины груза P и вылета крана l.

Пусть, напр., $P = 4000$ *кг.*, $h = l = 4$ *мт.*; $0{,}6 . \beta = 0{,}8$, т. е. теоретическій вѣсъ колонны увеличенъ на 33%; затѣмъ примемъ за допускаемыя величины напряженій въ *кг.* на кв. *мм.*

на растяженіе желѣзныхъ тягъ . . . . . $Z = 6$

на сжатіе желѣзной укосины . . . . . . $D = 4$

на сгибаніе чугунной колонны . . . . $B = 4$

По **52**... $b = 111{,}5$; по **54**... $x = l . \sqrt{\frac{2Z + 3D}{112{,}5 . D}} = \frac{l}{4{,}33} = 925\ ^m/_m$.

№ 57. Первая общая задача о треугольной фермѣ изъ двухъ элементовъ (подкоса и тяги). Дана треугольная ферма ABC (фиг. 318) съ произвольнымъ положеніемъ опоръ A и C на линіи AC, дѣлающей съ горизонталью уголъ β. Координаты точки подвѣса груза относительно одной изъ опоръ — l и h. На данномъ направленіи AC найти положеніе другой опорной точки (C) подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*, если допускаемыя напряженія на растяженіе и сжатіе — Z и D.

Рѣшеніе. Длина линіи $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{EF} = x . Sin\ \beta + \overline{EF}$

$$\overline{EF} : \overline{CF} = \overline{BK} : \overline{CK};\ \overline{EF} : x . Cos\ \beta = (h - x . Sin\ \beta) : (l + x . Cos\ \beta)$$

$$\overline{AE} = x . Sin\ \beta + x . Cos\ \beta . \frac{h - x . Sin\ \beta}{l + x . Cos\ \beta} = x . \frac{l . Sin\ \beta + h . Cos\ \beta}{l + x . Cos\ \beta}$$

Введемъ обозначеніе.... $l . Sin\ \beta + h . Cos\ \beta = a$.

$$Q : P = \overline{AB} : \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{a} . \left(\frac{l}{x} + Cos\ \beta\right).$$

$$\overline{BE} : \overline{BC} = l : (l + x \,.\, Cos\ \beta).$$

$$S : P = \overline{BE} : \overline{AE} = \overline{BC} \,.\, l : a \,.\, x$$

$$d^2 = \overline{AB}^2 = l^2 + h^2;\ \overline{BC}^2 = (h - x \,.\, Sin\ \beta)^2 + (l + x \,.\, Cos\ \beta)^2.$$

Вѣсъ подкоса AB . . . . $r_1 = \frac{P \,.\, \gamma}{D \,.\, a} \,.\, (l^2 + h^2) \,.\, \left(\frac{l}{x} + Cos \beta\right).$

Вѣсъ тяги BC. . . . $r_2 = \frac{P \,.\, \gamma}{Z \,.\, a} \,.\, \frac{l}{x} \,.\, \left[(h - x.Sin\,\beta)^2 + (l + x.Cos\,\beta)^2\right].$

Если $\frac{Z + D}{Z \,.\, D} = A$, то вѣсъ всей фермы ABC будетъ:

$$R = \frac{P\ \gamma}{a} \cdot \left[A \,.\, \frac{l.d^2}{x} + \frac{l.x}{Z} + \frac{d^2}{D} \,.\, Cos \beta + 2l \,.\, \frac{l \,.\, Cos \beta - h \,.\, Sin \beta}{Z}\right] \ldots \quad \mathbf{56.}$$

Принимая величины h, l, β за данныя, а x — за перемѣнное, значеніе x, опредѣляющее $min\, R$, найдемъ изъ р-ва:

$$\frac{\partial R}{dx} = \frac{P \,.\, \gamma.l}{a.Z} \cdot \left[- \frac{Z + D}{D} \cdot \frac{h^2 + l^2}{x^2} + 1\right] = 0, \text{ откуда}$$

$$x = \sqrt{\frac{Z + D}{D} \cdot (h^2 + l^2)} = \overline{AB} \,.\, \sqrt{\frac{Z + D}{D}} \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{57.}$$

На основаніи этой ф-лы дѣлаемъ слѣдующія заключенія:

1. *Въ треугольной фермѣ съ* **min** *вѣса разстояніе между опорами вовсе не зависитъ отъ угла, который дѣлаетъ съ горизонталью линія, соединяющая опорныя точки фермы.*

2. *Разстояніе между опорными точками въ фермѣ, обладающей* **min** *вѣса, порознь не зависитъ ни отъ вылета* **l** *фермы, ни отъ высоты ея* **h**, *а зависитъ только отъ длины укосины.*

3. *Если изъ точки* **A** (*фиг. 319*), *какъ изъ центра описать двѣ окружности радіусами, равными длинѣ укосины и разстоянію между точками опоры фермы, тогда всѣ треугольныя фермы, у которыхъ точки опоры лежатъ на этихъ окружностяхъ и сжатый подкосъ приходитъ въ центръ* **A**, *будутъ удовлетворять условію* **min** *вѣса, но величина послѣдняго будетъ зависѣть каждый разъ отъ h, l, β, Z, D.*

При $\beta = 90^0$...... $a = l \,.\, Sin\, \beta + h \,.\, Cos\, \beta = l$; $Cos\, \beta = 0$; $Sin\, \beta = 1$; тогда формула **56** обращается въ слѣдующую:

$$R = \frac{P \,.\, \gamma}{Z} \cdot \left[\frac{Z + D}{D} \cdot \frac{h^2 + l^2}{x} + x - 2h\right] \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{58,}$$

что вполнѣ согласуется съ результатами зад. №№ 27 и 29 (фиг. 295 и 296). Если измѣнять въ этой ф-лѣ x, то $min\, R$ получится, когда

$$x = \sqrt{\frac{Z + D}{D} \cdot (h^2 + l^2)},$$

что согласно съ ф-лой **57**. Если же при данномъ x будетъ измѣняться h, тогда *min* R, найдется изъ условія

$$\frac{dR}{dh}=\frac{P.\gamma}{Z}.\left[\frac{Z+D}{D}.\frac{2h}{x}-2\right]=0,\ \text{или}\ h=\frac{x.D}{Z+D},$$

что согласно съ результатами зад. № 27 (фиг. 295) и при $Z=D$ даетъ $h=0,5.x$.

При $\beta=0$ . . . . $a=h$, при этомъ по ф-лѣ **56**

$$R=\frac{P.\gamma}{h}.\left[\frac{h^2+l^2}{D}\left(1+\frac{l}{x}.\frac{Z+D}{Z}\right)+\frac{l}{Z}.(x+2l)\right]\ \ldots\ \mathbf{58,a,}$$

что будетъ представлять собою выраженіе вѣса фермы фиг. 297 (зад. № 30). *Min* этого выраженія получится при значеніи x, опредѣляемомъ изъ ф-лы **57**. Если же x считать за постоянное и находить *min* R при перемѣнномъ h, тогда мы получимъ

$$\frac{dR}{dh}=\frac{P.\gamma}{h^2}\left[\left(1+\frac{l}{x}.\frac{Z+D}{Z}\right).\frac{h^2-l^2}{D}-l.\frac{x+2l}{Z}\right]=0.$$

При $Z=D$ это условіе даетъ . . . . . . $h^2=l.(l+x)$.

№ 58. Вторая общая задача о треугольной фермѣ изъ двухъ элементовъ (подкоса и тяги). Въ предыдущей задачѣ измѣнить направленіе дѣйствующей силы и, считая за данную величину длину тяги, найти 2-ю опорную точку для подкоса (C на фиг. 320) подъ условіемъ *min* вѣса.

Отв. Въ ф-лѣ **56** величины Z и D перемѣнятъ свои мѣста:

$$R=\frac{P.\gamma}{a}.\left[\mathbf{A}.\frac{l.d^2}{x}+\frac{l.x}{D}+\frac{d^2}{Z}.Cos\beta+2l.\frac{l.Cos\beta-h.Sin\beta}{D}\right]\ldots\mathbf{59}$$

$$a=l.Sin\beta+h.Cos\beta;\quad \frac{Z+D}{Z.D}=\mathbf{A};\quad h^2+l^2=d^2.$$

Min R получится, когда $x=\overline{AB}.\sqrt{\dfrac{Z+D}{Z}}$ **60**,

т. е. величина x здѣсь будетъ другая, чѣмъ въ предыдущей задачѣ; она зависитъ здѣсь только отъ длины тяги и заданныхъ напряженій.

Въ частномъ случаѣ, когда $\beta=90^0$, переходимъ къ фермѣ, изображенной на фиг. 321; у нея $a=l$, и вѣсъ ея будетъ:

$$R=\frac{P.\gamma}{D}.\left[\frac{Z+D}{Z}.\frac{h^2+l^2}{x}+x-2h\right]\ .\ .\ .\ .\ .\ \mathbf{61.}$$

При x, удовлетворяющемъ ф-лу **60**, получится

$$min\,R=\frac{2P.\gamma}{D}.(x-h)\ .\ .\ .\ \ .\ .\ .\ .\ \mathbf{62.}$$

При $x = h$, т. е. когда подкосъ BC (фиг. 320) будетъ горизонталенъ, ф-ла **61** принимаетъ видъ:

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{Z \cdot D} \cdot \left[D \cdot x + \frac{Z + D}{x} \cdot l^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{63.}$$

$$\text{При } x = l \cdot \sqrt{\frac{D + Z}{D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \min R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \mathbf{2x} \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{64.}$$

Тотъ же результатъ имѣли въ зад. № 21 (фиг. 289).

Въ другомъ частномъ случаѣ, когда $\beta = 0$ (фиг. 322)

$$a = l \cdot Sin\beta + h \cdot Cos\beta = h.$$

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{h} \cdot \left[\frac{Z + D}{Z \cdot D} \cdot l \cdot \frac{h^2 + l^2}{x} + \frac{l \cdot x}{D} + \frac{h^2 + l^2}{Z} + \frac{2l^2}{D}\right] \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{65.}$$

Min этой величины по прежнему будетъ опредѣляться при значеніи x изъ ф-лы **60**.

№ 59. Первая общая задача о треугольной фермѣ изъ трехъ элементовъ (двухъ подкосовъ и одной тяги). Дана треугольная ферма ABC (фиг. 323), составленная изъ трехъ элементовъ, двухъ подкосовъ и одной тяги. Ферма передаетъ давленіе на опору A и удерживается въ равновѣсіи вертикальною тягою CH. Даны координаты точки подвѣса груза l и h. Требуется найти длину 2-го подкоса AC подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всей фермы былъ *min* въ предположеніи, что Z и D неодинаковы.

Рѣшеніе. Данная ферма (фиг. 323) отличается отъ фермы, изображенной на фиг. 318, только существованіемъ подкоса AC и тяги CH. Поэтому и здѣсь будемъ имѣть:

$$S = P \cdot \frac{\overline{BC} \cdot l}{a \cdot x} ; \; Q = P \cdot \frac{\overline{AB}}{a} \cdot \frac{l + x \cdot Cos\,\beta}{x},$$

$$\text{гдѣ } a = l \cdot Sin\,\beta + h \cdot Cos\,\beta.$$

$$\text{Натяженіе струны } CH \text{ будетъ.... } U = \frac{P \cdot l}{x \cdot Cos\,\beta}$$

Проложеніе натяженія S на вертикаль обозначено чрезъ N; его величина опредѣлится изъ р-ва:

$$N : S = (x \cdot Sin\,\beta - h) : \overline{BC} ; \; N = \frac{P \cdot l}{x} \cdot \frac{x \cdot Sin\,\beta - h}{a}$$

Проектируя силы S, T, U на вертикаль, получимъ:

$$T \cdot Sin\,\beta = U + N = \frac{P \cdot l}{x} \cdot \left(\frac{1}{Cos\,\beta} + \frac{x \cdot Sin\,\beta - h}{a}\right)$$

$$T : Sin\,\beta = \frac{P\,.\,l}{x}\,.\,\frac{l.Sin\,\beta + h.Cos\,\beta + x.Sin\,\beta.Cos\,\beta - h.Cos\,\beta}{a\,.\,Cos\,\beta},$$ откуда

$$T = \frac{P\,.\,l}{x\,.\,a}\,.\left(\frac{l}{Cos\,\beta} + x\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;\;.\; \mathbf{66.}$$

Вѣсъ подкоса AC будетъ

$$r_3 = \frac{P\,.\,l}{a\,.\,D}\frac{\gamma}{}\,.\left(\frac{l}{Cos\,\beta} + x\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{67.}$$

Вѣсъ всей фермы ABC (фиг. 323) получится, если къ 2-й части ф-лы **56** будетъ прибавлена величина r_3; тогда

$$R = \frac{P\,.\,\gamma}{a}\,.\left[\mathsf{A}\,.\,l\,.\left(\frac{\mathsf{d}^2}{x} + x\right) + \frac{\mathsf{d}^2\,.\,Cos^2\,\beta + l^2}{D\,.\,Cos\,\beta} + 2l\,.\,\frac{l.Cos\,\beta - h.Sin\,\beta}{Z}\right]. \; \mathbf{68}$$

$$\text{гдѣ } \mathsf{A} = (Z + D) : Z\,.\,D; \quad \mathsf{d}^2 = h^2 + l^2.$$

Min R при измѣненіи x получится тогда, когда

$$x^2 = h^2 + l^2 = \mathsf{d}^2, \text{ или } x = \overline{AB} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{69,}$$

т. е. **min** *вѣса треугольной фермы, состоящей изъ двухъ подкосовъ и одной тяги* (фиг 323), *когда такая ферма удерживается въ равновѣсіи вертикальною струною CH, всегда будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ одинаковой длины обоихъ подкосовъ*, независимо ни отъ угла β, ни отъ заданныхъ величинъ напряженій Z и D, ни отъ координатъ точки подвѣса груза h и l порознь.

№ 60. Найти вѣсъ треугольной фермы предыдущей задачи и ея *min* въ частномъ случаѣ, когда $\beta = 0$ (фиг 324).

Отв. $$R = \frac{P\,.\,\gamma}{D}\,.\left[\frac{Z + D}{Z}\,.\,\frac{l}{h}\,.\left(\frac{l^2 + h^2}{x} + x + 2l\right) + h\right] \ldots \mathbf{70.}$$

Если даны l и h, то независимо отъ Z и D надо дѣлать

$$x^2 = l^2 + h^2, \text{ т. е. } \overline{AC} = \overline{AB}, \text{ тогда}$$

$$min\,R = \frac{P\,.\,\gamma}{D}\,.\left[\frac{Z + D}{Z}\,.\,\frac{2l}{h}\,(x + l) + h\right]$$

Если даны l и x, тогда *min* R получается при отношеніи

$$\frac{h}{l + x} = \sqrt{\frac{(Z + D)\,.\,l}{(Z + D)\,.\,l + Z.\,x}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{71.}$$

Въ частномъ случаѣ, когда $Z = D$, послѣдняя ф-ла обращается въ слѣдующую:

$$h : (l + x) = \sqrt{2l : (2l + x)}$$

№ 61. Вторая общая задача о треугольной фермѣ изъ трехъ элементовъ (двухъ подкосовъ и одной тяги). Условія заданія тѣ же, что и въ задачѣ № 59, но только струна Cl (фиг. 325), удерживающая ферму въ равновѣсіи, проведена горизонтально. Нужно найти длину 2-го подкоса подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min.*

Рѣшеніе. $S = P \cdot \frac{\overline{BC} \cdot l}{a \cdot x}$, гдѣ $a = l \cdot Sin\,\beta + h \cdot Cos\,\beta$;

$$N = \frac{P \cdot l}{x} \cdot \frac{x' \cdot Sin\,\beta - h}{a} \text{ (см. зад. № 59); } N = K \cdot Sin\,\beta;$$

$$K = \frac{N}{Sin\,\beta} = \frac{P \cdot l}{a} \cdot \left(1 - \frac{h}{x \cdot Sin\,\beta}\right)$$

Вѣсъ подкоса AC въ этомъ случаѣ будетъ

$$r_4 = \frac{P \cdot l \cdot \gamma}{a \cdot D} \cdot \left(x - \frac{h}{Sin\,\beta}\right) \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{72.}$$

Присоединяя это выраженіе ко 2-й части ф-лы **56** (см. зад. 57), получимъ вѣсъ всей данной фермы:

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{a} \cdot \left[\mathsf{A} \cdot l \cdot \left(\frac{\mathsf{d}^2}{x} + x\right) + \frac{\mathsf{d}^2}{D} \cdot Cos\,\beta + 2l \cdot \frac{l \cdot Cos\beta - h \cdot Sin\beta}{Z} - \frac{h \cdot l}{D \cdot Sin\,\beta}\right]$$

$$\text{гдѣ } \mathsf{A} = (Z + D) : Z \cdot D; \quad h^2 + l^2 = \mathsf{d}^2$$

Min этого выраженія R приводитъ къ прежнему рѣшенію, выраженному ф-лой **69**, и дѣлаетъ такимъ образомъ высказанную тамъ теорему общею и независимою отъ положенія струны, удерживающей узелъ C отъ перемѣщеній. Не трудно доказать, что ф-ла **69** будетъ справедлива и при всякомъ другомъ, произвольномъ положеніи струны, удерживающей узелъ C.

Въ частномъ случаѣ, когда $\beta = 90^0$ (фиг. 326) ... $a = l$

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{Z \cdot D} \cdot \left[(Z + D) \cdot \left(\frac{h^2 + l^2}{x} + x\right) - h \cdot (2D + Z)\right] \ldots \mathbf{73.}$$

№ 62. Третья общая задача о треугольной фермѣ изъ двухъ элементовъ (двухъ тягъ, или двухъ подкосовъ). Дана треугольная ферма ACB (фиг. 327), опорныя точки которой A и B не лежатъ на одной горизонтали; взаимное расположеніе ихъ опредѣляется координатами l и h. Положеніе тягъ AC и BC опредѣляется координатами точки C, въ которой подвѣшенъ грузъ; плечи нагрузки относительно опоръ A и B равны a и b, а разстояніе точки C отъ горизонтали AD равно x. Требуется найти эту длину x подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы ABC, состоящей изъ двухъ тягъ, былъ *min.*

Рѣшеніе. Разложеніе силъ при точкахъ A, B, C ясно видно изъ чертежа (фиг. 327). Предполагая, что сила N перемѣщенія опоръ

A и B не производитъ, принимаетъ поочередно точки A и B за центръ моментовъ и составляемъ условія равновѣсія между заданною нагрузкою и сопротивленіями опоръ:

$$T = P.\frac{b}{l} = P.\frac{l-a}{l};\ U = \frac{P.a}{l} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{74}.$$

$$\overline{CE} = \overline{CF} + \overline{EF} = x + \frac{a.h}{l} = \frac{x.l + a.h}{l} = \frac{y}{l};\ \overline{AE} = \frac{a.d}{l};$$

$$\frac{Q}{T} = \frac{AC}{CE} = \frac{e.l}{y};\ Q = \frac{P.b}{l}.\frac{e.l}{y} = P.e.\frac{l-a}{y} \quad \ldots \quad \mathbf{75}.$$

Вѣсъ тяги $AC \ldots\ r_1 = \dfrac{P.\gamma}{Z}\ e^2.\dfrac{l-a}{y}$

$$\frac{S}{U} = \frac{BC}{CE} = \frac{f.l}{y};\ S = \frac{P.a}{l}.\frac{f.l}{y} = P.f.\frac{a}{y} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{76}.$$

Вѣсъ тяги $BC \ldots\ r_2 = \dfrac{P.\gamma}{Z}.f^2.\dfrac{a}{y}$

$$e^2 = a^2 + x^2;\ f^2 = b^2 + (h+x)^2 = (l-a)^2 + (h+x)^2$$

Вѣсъ всей фермы ACB (фиг. 327) будетъ:

$$R = \frac{P.\gamma}{Z}\,\frac{(a^2+x^2)(l-a) + a.(l^2 - 2a.l + a^2 + h^2 + 2h.x + x^2)}{y}$$

$$R = \frac{P\gamma}{Z}\ \frac{l.x^2 + 2h.a.x + a.(d^2 - a.l)}{y} \quad \ldots \quad \mathbf{77},$$

где $d^2 = h^2 + l^2;\ y = x.l + a.h.$

Принимая x за независимое перемѣнное и разсматривая y какъ функцію x, получаемъ

$$\frac{dR}{dx} = \frac{P.\gamma}{Z}.\frac{y.2(l.x + a.h) - l^2.x^2 - 2h.a.l.x - a.l.(d^2 - a.l)}{y^2} = 0,$$

Числитель второй части р-ва обращается въ слѣдующее выраженіе

$$ж_1 = l^2.x^2 + 2h.a.l.x + 2a^2.h^2 - a.l.(h^2 + l^2 - a.l) = 0 \quad \ldots \quad \mathbf{78}$$

$$x^2 + \frac{2h.a}{l}.x + 2.\frac{a^2.h^2}{l^2} + a^2 - a.l.\frac{h^2+l^2}{l^2} = 0. \quad \ldots \quad \mathbf{79}$$

$$x = -\frac{h.a}{l} + \sqrt{a.l.\frac{h^2+l^2}{l^2} - a^2 - \frac{a^2.h^2}{l^2}} = -\frac{h.a}{l} + \frac{d}{l}.\sqrt{a.b}. \quad \mathbf{80}.$$

Если $h = 0$, т. е. обѣ опоры будутъ расположены на одной горизонтали, тогда $d = l$, и ф-ла **80** даетъ намъ

$$x = \sqrt{a\ b},$$

результатъ, который мы имѣли при разсмотрѣніи задачи № 37 (фиг. 304). Тамъ величина x опредѣлялась графически при помощи круга, описан-

наго на длинѣ l, какъ на діаметрѣ. Не трудно видѣть, что здѣсь подобную же роль играетъ кругъ, описанный на длинѣ $AB = d$, какъ на діаметрѣ. По ф-лѣ **80**:

$$\frac{x.l + h.a}{l} = \frac{d}{l}.\sqrt{a.b} = \overline{CE} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{81}.$$

Если назовемъ (фиг. 328) . . . . . $AE = a_1$; $BE = b_1$; тогда

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{l}{d}, \text{ поэтому } a.b = a_1.b_1.\left(\frac{l}{d}\right)^2,$$

слѣдовательно $$\overline{CE} = \sqrt{a_1.b_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{82},$$

т. е. *для полученія наивыгоднѣйшей точки подвѣса груза, имѣющаго данныя плечи* **a** *и* **b** *относительно опоръ* **A** *и* **B** (фиг. 328), *направленіе дѣйствія нагрузки надо продолжить до пересѣченія въ точкѣ* **E** *съ линіей, соединяющей данныя опорныя точки; затѣмъ разстояніе между ними надо принять за діаметръ и описать на немъ окружность, тогда линія* **EF** $\perp$ **AB** *будетъ средняя пропорціональная между отрѣзками* $\mathbf{a}_1$ *и* $\mathbf{b}_1$ *діаметра* **AB**, *т. е. длина* **EF** *будетъ искомымъ разстояніемъ точки подвѣса груза отъ точки* **E**. На фиг. 328 так. обр. построены 3 фермы:

ACB — для произвольнаго разстоянія a,

AC_1B — для случая, когда $a = b$, и

AC_2B — для случая, когда одна изъ тягъ горизонтальна, т. е. $x = 0$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ по **80** будемъ имѣть:

$$h^2.a^2 = d^2.a.b, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{d^2}{h^2} = \frac{a_2}{b_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{83},$$

гдѣ a_2 и b_2 — плечи нагрузки въ случаѣ $x = 0$. Ф-ла **83** графически м. б. построена слѣд. образ.:

$$\frac{d^2}{h^2} = \frac{a_2^2}{a_2.b_2}; \quad \frac{\sqrt{a_2.b_2}}{a_2} = \frac{h}{d} = \frac{BG}{AB},$$

т. е. для полученія наивыгоднѣйшей фермы въ случаѣ, когда одна изъ тягъ горизонтальна, надо провести $BG \perp AB$, отложить $BG = BD = h$, соединить точки G и A прямою, она пересѣчетъ окружность AFB въ точкѣ F_2, которая и будетъ искомою; проводя $E_2F_2 \perp AB$ и E_2C_2 вертикально, получимъ точку подвѣса груза въ C_2, и $\overline{AC_2}$ будетъ горизонталью.

Если направленіе дѣйствія силы будетъ измѣнено на обратное, т. е. ферма будетъ состоять изъ двухъ сжатыхъ подкосовъ, тогда, удерживая прежнія обозначенія, вѣсъ фермы фиг. 329 получимъ изъ ф-лы **77**, измѣняя въ ней Z на D:

$$R = \frac{P.\gamma}{D}.\frac{l.x^2 + 2h.a.x + a.(d^2 - a.l)}{l.x + a.h} \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{84}.$$

Min этой величины получится при значеніи x, удовлетворяющемъ ф-лу **80**. Способъ опредѣленія наивыгоднѣйшихъ размѣровъ фермы остается прежній (фиг. 328).

№ 63. Третья общая задача о треугольной фермѣ изъ трехъ элементовъ (двухъ тягъ и одного подкоса, или двухъ подкосовъ и одной тяги). Условія предыдущей задачи (№ 62) измѣнены только въ томъ, что между опорными узлами фермы введенъ подкосъ AB (фиг. 330), а сами узлы подвѣшены на вертикальныхъ тягахъ, которымъ передаются давленія T и U. При данныхъ плечахъ a и b груза относительно опоръ, найти координату x точки подвѣса нагрузки подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всей фермы былъ *min*.

Рѣшеніе. Къ вѣсу фермы, выражаемому ф-лой **77**, надо добавить вѣсъ подкоса AB, сжимаемаго усиліемъ N (фиг. 330).

$$\overline{AE}=a\cdot\frac{d}{l};\quad N=T\cdot\frac{AE}{CE}$$

Величины силы T и отрѣзка $\overline{CE}$ были опредѣлены въ предыдущей задачѣ:

$$N=\frac{P\cdot b}{l}\cdot\frac{a\cdot d}{l}:\frac{y}{l}=P\cdot\frac{d}{l}\cdot\frac{a(l-a)}{y}\quad\ldots\ldots\ldots\mathbf{85.}$$

Вѣсъ подкоса AB длиною d будетъ

$$r_3=\frac{P\cdot\gamma}{D}\cdot\frac{l^2+h^2}{l}\cdot\frac{a\cdot l-a^2}{l.x+a.h}\quad\ldots\ldots\ldots\mathbf{86.}$$

Складывая 2-ю часть р-ва **77** съ **86**, получимъ полный вѣсъ фермы ACB (фиг. 330), состоящей изъ двухъ тягъ и одного подкоса:

$$R=\frac{P\cdot\gamma}{Z\cdot D}\cdot\frac{(l^2.x^2+2h.a.l.x).D+(a.l.d^2-l^2.a^2)(Z+D)-h^2.a^2.Z}{(x.l+h.a).l}\ldots\mathbf{87.}$$

Взявши отъ этого выраженія 1-ю производную по x и приравнявъ ее нулю, послѣ небольшихъ преобразованій получимъ слѣд. уравненіе:

$$D(l^2.x^2+2h.a.l.x)+(2D+Z)h^2.a^2+(Z+D).l.a(l.a-d^2)=0\ldots\mathbf{88.}$$

$$x^2+2\cdot\frac{h.a}{l}\cdot x+\frac{2h^2.a^2}{l^2}+\frac{Z+D}{D}\cdot\left(a^2-l.a\cdot\frac{d^2}{l^2}\right)+\frac{Z}{D}\cdot\frac{h^2.a^2}{l^2}=0\ldots\mathbf{89}$$

$$x=-\frac{h.a}{l}+\sqrt{\frac{Z+D}{D}\cdot(l.a-a^2)\cdot\frac{h^2+l^2}{l^2}},\ \text{или}$$

$$\frac{l.x+h.a}{l}=\overline{CE}=\frac{d}{l}\cdot\sqrt{a.b\cdot\frac{Z+D}{D}}\quad\ldots\ldots\mathbf{90.}$$

При $h=0\ldots l=d$, и тогда ф-ла **90** даетъ результатъ, который мы имѣли въ зад. № 38 или 40 (фиг. 305). Положивши $Z=D$, получимъ

$$\overline{CE}=\frac{d}{l}\sqrt{2}\cdot\sqrt{a.b}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{91.}$$

Эта ф-ла показываетъ, что длину EF, которую мы имѣли въ рѣшеніи предыдущей задачи, какъ искомое, здѣсь нужно принять за сторону квадрата HE (фиг. 330); откладывая діагональ его отъ точки E по вертикали внизъ, получимъ такую точку подвѣса C для груза, которая опредѣляетъ собою контуръ фермы съ *min* вѣса ея.

Если направленіе дѣйствія нагрузки на ферму будетъ обратное тому, которое было сейчасъ разсмотрѣно, т. е. будемъ имѣть ферму съ двумя подкосами и одной тягой, тогда вѣсъ такой фермы получится изъ ф-лы **87**, измѣняя въ ней Z на D, и наоборотъ. Вѣсъ фермы фиг. 331 будетъ

$$R=\frac{P\cdot\gamma}{Z\cdot D}\cdot\frac{l.Z(l.x^2+2h.a.x)+a.l.(Z+D)(d^2-a.l)-h^2.a^2.D}{x.l+h.a}\ldots\mathbf{92.}$$

Min этого выраженія получится, когда на фиг. 331 будемъ имѣть:

$$\overline{CE}=\frac{d}{l}\cdot\sqrt{a.b.\frac{Z+D}{Z}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathbf{93.}$$

№ 64. Первая общая задача на комбинацію двухъ треугольныхъ фермъ, состоящую изъ пяти элементовъ (трехъ подкосовъ и двухъ тягъ, или двухъ подкосовъ и трехъ тягъ). Въ фермѣ, разсмотрѣнной въ предыдущей задачѣ (фиг. 330), въ точкѣ E введенъ шарниръ и добавленъ подкосъ CE. Полученная такимъ образомъ ферма (фиг. 332) воспринимаетъ нагрузку въ узлѣ E и передаетъ ее на узелъ C посредствомъ подкоса CE. При данныхъ a, b, h найти положеніе точки C подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*.

Рѣшеніе. Къ выраженію вѣса предыдущей фермы (ф-ла **87**) надо добавить вѣсъ подкоса CE, длина котораго (см. зад. № 62).

$$\overline{CE}=\frac{l.x+a.h}{l}.$$

Вѣсъ подкоса CE $\quad . \; . \; . \; r_4=\frac{P\cdot\gamma}{D}\cdot\frac{l.x+a.h}{l}\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathbf{94.}$

Это выраженіе надо добавить ко 2-й части р-ва **87**, чтобы получить ф-лу вѣса всей фермы фиг. 332. Когда будемъ брать 1-ю производную новаго выраженія R то x, величина r_4 добавитъ слагаемое $1:D$. Дѣлая обычныя преобразованія 1-ой производной, увидимъ, что во всемъ выраженіи ея будетъ общимъ множителемъ $Z+D$, а другимъ множителемъ будетъ выраженіе **78**, которое мы имѣли въ зад. № 62; поэтому и рѣшеніе здѣсь будетъ одинаково съ ф-лой **80**, т. е. построеніе главныхъ размѣровъ фермы фиг. 332 (съ 5-ю элементами) ничѣмъ не будетъ отличаться отъ того построенія, которое дано на фиг. 328 для фермы съ двумя элементами.

Общее выраженіе вѣса фермы съ 5-ю элементами (фиг. 332), будетъ отличаться отъ выраженія вѣса фермы съ двумя элементами (фиг. 327) только множителемъ $(Z+D):D$, который войдетъ во 2-ю

часть р-ва **77**. Если $Z = D$, тогда этотъ коэффиціентъ будетъ $= 2$, т. е *въ фермѣ изъ пяти элементовъ* (фиг. 332), *построенной подъ условіемъ* min *ея вѣса, растянутыя и сжатыя части фермы будутъ имѣть одинаковый вѣсъ, если* $Z = D$.

Въ случаѣ обратнаго дѣйствія нагрузки на ферму изъ пяти элементовъ получаемъ ферму изъ трехъ тягъ и двухъ подкосовъ: нагрузка передается на шарниръ E (фиг. 333). Вѣсъ этой фермы получится, если 2-ю часть р-ва **84** (для фермы фиг. 329) умножимъ на коэф. $(Z + D) : Z$. При $Z = D$ этотъ коэф. будетъ равенъ также **2**, т. е. и въ этой фермѣ также вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей будетъ одинаковъ, если $Z = D$.

№ 65. Симметричная ферма (фиг. 334) изъ 8 элементовъ (3 сжатыхъ и 5 растянутыхъ) несетъ на себѣ нагрузку $2P$ и передаетъ ее на узлы A и B. Даны плечи нагрузки относительно опоръ a и общая длина фермы $AB = l = 2i$. Найти высоту фермы $2b$ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*.

Отв. $Q = S = \frac{P}{2b} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$. Вѣсъ фермы будетъ

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left[\frac{b^2 + a \cdot i}{b} \cdot \frac{Z + D}{D} + 2b\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{95.}$$

Min этой величины получимъ тогда, когда

$$b = \sqrt{\frac{Z + D}{Z + 3D} \cdot \frac{a \cdot l}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{96.}$$

При $c = 0 \ldots . a = i$, тогда всѣ ф-лы этой зад. будутъ тождественны съ тѣми, которыя мы имѣли въ зад. № 34 (фиг. 301).

№ 66. Внѣшній видъ фермы тотъ же, что и въ зад. № 65, но опоры находятся въ E, F (фиг. 335), а нагрузка повѣшена въ A, B. При данныхъ a и l найти наивыгоднѣйшую высоту такой фермы (изъ 3 тягъ и 5 раскосовъ) подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*.

Отв. $R = \frac{P \cdot \gamma}{D} \cdot \left[\frac{b^2 + a \cdot i}{b} \cdot \frac{Z + D}{Z} + 2b\right]$; $i = \frac{l}{2}$

$$b = \sqrt{\frac{D + Z}{D + 3Z} \cdot \frac{a \cdot l}{2}}.$$

№ 67. Ферма изъ 8 элементовъ (3 подкосовъ и 5 тягъ) съ одною осью симметріи (фиг. 336) воспринимаетъ нагрузку P, P въ узлахъ E и F и передаетъ ее на узлы A и B. Дана длина фермы $l = 2i$, плечи a нагрузокъ относительно опоръ и высота фермы $h = m + n$. Нужно найти наивыгоднѣйшее положеніе линіи опоръ AB, т. е. опредѣлить, въ какомъ отношеніи эта линія должна дѣлить высоту балки, если вѣсъ фермы долженъ быть *min*.

Отв. $S=\frac{P}{h}\cdot\sqrt{a^2+m^2};\quad Q=\frac{P}{h}\cdot\sqrt{a^2+n^2}$

$$V=P.\frac{m}{h};\quad W=P.\frac{n}{h};\quad U=T=P.\frac{a}{h}.$$

Вѣсъ фермы фиг. 336 будетъ:

$$R=\frac{2P.\gamma}{Z.D}\cdot\frac{(m^2+a.l)(Z+D)+h.(h-m).D}{h}\quad\ldots\quad\mathbf{97.}$$

Min этой величины получимъ, если сдѣлаемъ

$$m=\frac{h}{2}\cdot\frac{D}{Z+D};\quad n=\frac{h}{2}\cdot\left(1+\frac{Z}{Z+D}\right)$$

$$n:m=1+2.\frac{Z}{D}\quad\ldots\ldots\ldots\quad\mathbf{98.}$$

При $Z=D$ . . . . . . $n:m=3$, т. е. $m=\frac{h}{4}$.

№ 68. Ферма изъ 8 элементовъ (5 подкосовъ и трехъ тягъ) съ одною осью симметріи (фиг. 337) воспринимаетъ нагрузку въ узлахъ A и B и передаетъ ее на узлы E и F. Даны размѣры l, h, a, нужно найти отрѣзки m и n высоты фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*.

Отв. $R=\frac{2P.\gamma}{Z.D}\cdot\frac{(m^2+a.l)(Z+D)+h.(h-m).Z}{h}$.

Наивыгоднѣйшее $n:m=1+2.\frac{D}{Z}$ . . . . **99.**

№ 69. Ферма $ABCD$ (фиг. 338) составлена изъ двухъ треугольныхъ, имѣющихъ опоры въ A и D, причемъ одинъ изъ этихъ треугольниковъ (ACD) равнобедренный, и горизонтальная тяга BC параллельна основанію AD. Даны координаты l и h точки подвѣса груза относительно опоры A, требуется найти длину основанія $2x$ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min* при заданныхъ напряженіяхъ Z и D.

Рѣш. $Q=P.\frac{d}{h};\quad S=P.\frac{l}{h};\quad T=S.\frac{f}{2x}=P.\frac{l}{h}\cdot\frac{f}{2x};$

$$U=T.\frac{h}{f}=\frac{P.l}{2x};\quad V=U.\frac{x}{h}=P.\frac{l}{2h}=\frac{S}{2};$$

Вѣсъ всей фермы представится формулою:

$$R=P.\gamma.\left[\frac{d^2}{D.h}+\frac{l}{2h}\cdot\frac{f^2}{x.D}+\frac{l}{h}\cdot\frac{x}{D}+\frac{l}{h}\cdot\frac{l+x}{Z}+\frac{l}{2h}\cdot\frac{f^2}{x.Z}\right];$$

$$R=\frac{P.\gamma.}{D}\left[h+\frac{Z+D}{Z}\cdot\frac{l}{2h}\cdot\left(2l+3x+\frac{h^2}{x}\right)\right]\quad\ldots\quad\mathbf{100.}$$

Min R при данномъ h получится тогда $h^2=3.x^2$, т. е. когда h будетъ діагональю прямоугольника, построеннаго на сторонахъ x и $x.\sqrt{2}$. Найденное соотношеніе между h и x не зависитъ ни отъ величины напряженій Z и D, ни отъ величины вылета l.

№ 70. Предположить въ предыдущей задачѣ измѣнившимся направленіе дѣйствія нагрузки и найти вѣсъ фермы (фиг. 339) и наивыгоднѣйшее соотношеніе между ея размѣрами.

Отв. $$R=\frac{P.\gamma}{Z}\cdot\left[h+\frac{Z+D}{2D}\cdot\frac{l}{h}\cdot\left(2l+3x+\frac{h^2}{x}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{101.}$$

При $h^2=3x^2$ получимъ *min* этой величины, независимо отъ данныхъ величинъ l, Z, D.

№ 71. Ферма $ABCD$ (фиг. 340), состоящая изъ двухъ треугольныхъ, подвѣшена за опорные узлы A и B и воспринимаетъ нагрузку въ узлѣ D по направленію тяги CD, $\perp$-й къ оси AB фермы. Даны плечи a и b, нужно найти наивыгоднѣйшую высоту фермы $2m=h$ подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*.

Рѣш. $$X=P.\frac{b}{l};\; Y=P.\frac{a}{l};\; X+Y=P.$$

$$Q=\frac{d}{h}\; X=P.\frac{b.d}{l.h};\; S=\frac{e}{h}.Y=P.\frac{a.e}{l.h}$$

$$AF \parallel BC;\; \frac{x}{a}=\frac{m}{b};\; \overline{CF}=m+x=\frac{m.l}{b}.$$

$$T:Q=\overline{CF}:\overline{AC};\; T=Q.\frac{m.l}{b.d}=\frac{m}{h}.P=\frac{P}{2}.$$

Вѣсъ всей фермы .... $R=\dfrac{P.\gamma}{Z}.\left[\dfrac{b.d^2+a.e^2}{l.h}.\dfrac{Z+D}{D}+\dfrac{h}{2}\right]$ или

$$R=\frac{P.\gamma}{Z}\left[\frac{Z+D}{D}.\frac{m^2+a.b}{2m}+m\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{102.}$$

Min R получится, когда .... $m^2=a.b.\dfrac{Z+D}{Z+3D}$ **103**

$$min\, R=\frac{P.\gamma.m}{Z}.\frac{Z+3D}{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{104.}$$

При $a=b$ совершается переходъ къ зад. № 34 (фиг. 301).

№ 72. Въ предыдущей фермѣ нагрузка передается на узелъ C вмѣсто D (фиг. 341). Найти ея наивыгоднѣйшіе размѣры.

Отв. $$R=\frac{P.\gamma}{D}\cdot\left[\frac{Z+D}{Z}\cdot\frac{m^2+a.b}{2m}+m\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{105.}$$

$$m^2=a.b.\frac{Z+D}{D+3Z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \; . \; . \; \mathbf{06.}$$

Ф-лы **102** и **105** показываютъ, что, если при данномъ $h = 2m$ возможно измѣнять плечи a и b, самый невыгодный случай будетъ соотвѣтствовать $a \mp b$.

№ 73. Первая общая задача на комбинаціи двухъ треугольныхъ фермъ. Опоры A и B фермы (фиг. 342) — на одной горизонтали, всѣ 4 отрѣзка діагоналей a, b, m, n — различны. Нагрузка P дѣйствуетъ по направленію діагонали CD въ узлѣ D. Даны плечи балки a и b и вся высота фермы $CD = h = m + n$. Найти оба отрѣзка высоты m и n подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*.

Рѣш. $X = P . \frac{b}{l}$; $Y = P . \frac{a}{l}$; $Q = P . \frac{b . c}{h . l}$; $S = P . \frac{b . d}{h . l}$;

$$U = P . \frac{a . f}{h . l}; \; T = P . \frac{a . e}{h . l};$$

$$AF \| BC; \; x : a = m : b; \; m + x = \frac{m . l}{b} = \overline{CF};$$

$$AE \| BD; \; y : a = n : b; \; n + y = \frac{n . l}{b} = \overline{DE};$$

$$V = Q . \frac{m + x}{c} = P \cdot \frac{m}{h}; \; W = S . \frac{n + y}{d} = P \; \frac{n}{h} .$$

$$V : W = m : n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{107},$$

т. е. *нагрузка* **P** *разлагается при узлѣ* **D** *на двѣ части, и отношеніе между ними всегда = отношенію отрѣзковъ высоты* **m** *и* **n**, независимо отъ величины плечъ a и b. Вѣсъ всей фермы будетъ:

$$R = P . \gamma . \left[\frac{b . c^2 + a . f^2}{h . l . D} + \frac{b . d^2 + a . e^2}{h . l . Z} + \frac{m}{Z} \right];$$

$$c^2 = a^2 + m^2; \; f^2 = b^2 + m^2; \; d^2 = a^2 + n^2; \; e^2 = b^2 + n^2.$$

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \left[\frac{(Z + D)(a . b + m^2) + D . h . (h - 2m)}{D . h} + m \right] \ldots \; \mathbf{108}, \text{ или}$$

$$R = \frac{P . \gamma}{Z} \cdot \left[\frac{(Z + D)(a . b + n^2) + Z . h . (h - 2n)}{D . h} + h - n \right] \; . \; . \; \mathbf{109}.$$

Ф-ла **108** даетъ R въ функціи m, а **109** — въ функціи n. Принимая h за данную величину, составляемъ 1-ю производную сначала отъ R по m, а потомъ отъ R по n, и находимъ

$$m = \frac{h}{2} \cdot \frac{D}{Z + D}; \; n = \frac{h}{2} \cdot \frac{D + 2Z}{D + Z}; \; \frac{n}{m} = 1 + 2 \frac{Z}{D} \; . \; . \; . \; \mathbf{110}.$$

Эта величина отношенія встрѣчалась уже нѣсколько разъ (см. зад. №№ 67, 35).

Если бы въ числѣ данныхъ, кромѣ a и b, была еще величина отрѣзка m и требовалось бы найти наивыгоднѣйшую высоту h фермы,

тогда по ф-лѣ **108** нужно будетъ составить выраженіе 1-й производной отъ R по h; приравнявъ ее нулю, получимъ:

$$h^2 = (a.b + m^2).\frac{Z+D}{D}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{111}.$$

Наоборотъ, если бы данъ былъ отрѣзокъ n и требовалось найти наивыгоднѣйшую величину h, тогда надо было бы работать съ ф-лой **109**, и получили бы:

$$h^2 = a.b + n^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{112},$$

т. е. *когда даны величины отрѣзковъ* **a**, **b**, **n**, *наивыгоднѣйшая высота фермы вовсе не зависитъ отъ величины заданныхъ напряженій* Z и D.

Ф-лы **108** и **109** показываютъ, что, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, наиболѣе тяжелую ферму получимъ, если назначимъ $a = b$.

Въ частномъ случаѣ когда $n = 0 \ldots m = h$, мы дѣлаемъ переходъ къ фермѣ фиг. 343. Ея вѣсъ по **108** (или **109** безразлично):

$$R = \frac{P.\gamma}{Z}\cdot\frac{Z+D}{D}\left(\frac{a.b}{h} + h\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{113}.$$

Его *min* будетъ при $h^2 = a.b$, — извѣстный результатъ (см. зад. № 41). При $m = 0$ тяга DC нагрузки не воспринимаетъ, и мы дѣлаемъ переходъ къ фермѣ фиг. 305.

№ 74. Вторая общая задача на комбинаціи двухъ треугольныхъ фермъ. Опоры A и B (фиг. 344) — на одной горизонтали; всѣ 4 отрѣзка діагоналей a, b, m, n — различны. Нагрузка передается на узелъ C. Выяснить наивыгоднѣйшіе размѣры фермы, дающіе *min* ея вѣса.

Отв. Здѣсь подкосъ CD будетъ сжатъ усиліемъ W (см. зад. № 73):

$$W = P.\frac{n}{h}. \quad \text{Вѣсъ фермы будетъ:}$$

$$R = \frac{P.\gamma}{D}\cdot\left[\frac{(Z+D)(a.b+m^2) + D.h.(h-2m)}{Z.h} + h - m\right] \ldots \mathbf{114}$$

или
$$R = \frac{P.\gamma}{D}\cdot\left[\frac{(Z+D)(a.b+n^2) + Z.h.(h-2n)}{Z.h} + n\right]. \quad . \quad . \quad \mathbf{115}.$$

Если дано h, наивыгоднѣйшія величины m и n будутъ

$$m = \frac{h}{2}\cdot\frac{2D+Z}{Z+D}; \quad n = \frac{h}{2}\cdot\frac{Z}{Z+D}; \quad \frac{m}{n} = 1 + 2\frac{D}{Z}. \quad . \quad . \quad \mathbf{116}.$$

Если дано m, то наивыгоднѣйшее h при всѣхъ значеніяхъ Z и D будетъ опредѣляться такъ:

$$h^2 = a.b + m^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{117}.$$

Если дано n, тогда

$$h^2=(a.b+n^2).\frac{Z+D}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{118.}$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m=0 \ldots . n=h$, дѣлаемъ переходъ къ фермѣ фиг. 306. Ея вѣсъ по **114** (или **115** безразлично):

$$R=\frac{P.\gamma}{D}.\frac{Z+D}{Z}.\left(\frac{a.b}{h}+h\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{119.}$$

Его *min* получится при $a.b=h^2$. Тождество ф-лъ **113** и **119** еще разъ подтверждаетъ, что въ фермахъ фиг. 306 и 343 *вѣсъ растянутыхъ частей фермы одинаковъ съ вѣсомъ сжатыхъ частей фермы*, если размѣры ея выбраны наивыгоднѣйшими.

№ 75. Третья общая задача на комбинацiи двухъ треугольныхъ фермъ. Устройство фермы и передача нагрузки тѣ же, что и въ задачѣ № 73 (фиг. 342), но данными считаются только плечи нагрузки a и b относительно опоръ; отрѣзки же m и n высоты фермы надо разсматривать, какъ независимыя, и найти ихъ величину подъ условiемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ *min*.

Рѣш. Ф-лу **108**, опредѣляющую вѣсъ фермы, можно представить иначе, вводя въ нее $m+n$ вмѣсто h:

$$R=\frac{P.\gamma}{Z}.\left[\frac{Z+D}{D}.\frac{a.b}{m+n}+\frac{Z.m^2+D.n^2}{D.(m+n)}+m\right] \quad \ldots \quad \mathbf{120.}$$

Составляя частную производную отъ R по m, найдемъ

$$m^2+2m.n=a.b, \text{ или } m=-n+\sqrt{a.b+n^2} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{a.}$$

Составляя частную производную отъ R по n, получимъ:

$$n=-m+\sqrt{\frac{Z+D}{D}.(a.b+m^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{б.}$$

Сравнивая ф-лы **а** и **б**, получаемъ:

$$\frac{Z+D}{D}.(a.b+m^2)=a.b+n^2=a.b+\left[-m+\sqrt{\frac{Z+D}{D}.(a.b+m^2)}\right]^2,$$

$$\text{откуда } m^2=a.b.\frac{D}{4Z+3D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{121.}$$

$$n^2=a.b.\frac{(2Z+D)^2}{D(4Z+3D)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{122.}$$

$$min\,R=\frac{P.\gamma}{Z.D}.\frac{(Z+D)(a.b+m^2)+D(n^2+m.n)}{m+n}=$$

$$=\frac{P.\gamma}{Z}.(m+2n)=\frac{P.\gamma}{Z}.\sqrt{a.b.\frac{4Z+3D}{D}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{123.}$$

Если $Z = D \ldots\ldots min\ R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \sqrt{7a \cdot b}$ . . . . **124.**

Ф-ла **110** получается соединеніемъ ф-лъ **121** и **122.**

№ 76. Четвертая общая задача на комбинаціи двухъ треугольныхъ фермъ. Устройство фермы и передача нагрузки тѣ же, что и въ задачѣ № 74 (фиг. 344), но данными считаются только плечи a и b нагрузки относительно опоръ; отрѣзки же m и n высоты фермы надо разсматривать, какъ независимыя перемѣнныя, и найти ихъ величину подъ условіемъ, чтобы вѣсъ фермы былъ min.

Рѣш. Ф-ла **115** м. б. представлена въ такомъ видѣ:

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{D} \left[\frac{Z + D}{Z} \cdot \frac{a \cdot b + n^2}{m + n} + m\right] \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{125.}$$

Изъ выраженія $\frac{dR}{dm} = 0$ имѣемъ .... $(m + n)^2 = \frac{Z + D}{Z} \cdot (a.b + n^2)$....**126.**

„ „ $\frac{dR}{dn} = 0$ „ .... $(m + n)^2 = a \cdot b + m^2$. . . . **127.**

Рѣшая эти 2 ур-ія относительно m и n, находимъ:

$$\frac{a \cdot b + m^2}{Z + D} \cdot Z = a \cdot b + (\sqrt{a \cdot b + m^2} - m)^2, \text{ откуда}$$

$$m = (Z + 2D) \cdot \sqrt{\frac{a \cdot b}{3Z^2 + 4Z \cdot D}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{128}$$

$$n = Z \cdot \sqrt{\frac{a \cdot b}{3Z^2 + 4Z \cdot D}} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{129.}$$

Отношеніе между ними будетъ то же самое, что даетъ и ф-ла **116**-я Наименьшій вѣсъ фермы по **125** будетъ:

$$min\ R = \frac{P \cdot \gamma}{D} \cdot (2m + n) = \frac{P \cdot \gamma}{D} \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot \frac{4D + 3Z}{Z}} \quad \ldots \quad \mathbf{130.}$$

При $Z = D \ldots\ldots min\ R$ будетъ выражаться тою же ф-лою **124**, что и въ предыдущемъ случаѣ. Это указываетъ на то, что *при равенствѣ допускаемыхъ напряженій растяженія и сжатія вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей одинаковъ также и въ фермахъ фиг.* **342, 344,** если размѣры ихъ сдѣлать наивыгоднѣйшими.

№ 77. Пятая общая задача на комбинаціи двухъ треугольныхъ фермъ. Устройство фермы то же самое, что и въ задачѣ № 73 (фиг. 342), но нагрузка воспринимается фермою въ точкѣ H, лежащей въ одномъ уровнѣ съ опорами A и B. Даны плечи a и b нагрузки относительно опоръ. Нужно найти отрѣзки m и n высоты фермы подъ условіемъ min ея вѣса.

$$\left.\begin{array}{l}\text{\textit{Рѣш.} Часть } CH \text{ будетъ растянута усиліемъ } V = P.\frac{m}{h} \\ \text{„ } DH \text{ „ сжата „ } W = P.\frac{n}{h}\end{array}\right\} \dots 107.$$

Въ формулѣ **108** (см. зад. № 73) измѣнится только послѣднее слагаемое въ скобкѣ, и мы получимъ:

$$R = P.\gamma.\frac{Z+D}{Z.D}.\frac{a.b+m^2+n^2}{m+n} \dots\dots \mathbf{131}.$$

Изъ $\frac{dR}{dm} = 0 \dots\dots a.b = m^2 + 2m.n - n^2$

„ $\frac{dR}{dn} = 0 \dots\dots a.b = n^2 + 2n.m - m^2.$

Рѣшивъ эти ур-iя, найдемъ, что

$$m = n = \sqrt{\frac{a.b}{2}} \dots\dots \mathbf{132}.$$

т. е. *въ фермѣ фиг. 345 съ передачей нагрузки въ узлѣ H, наивыгоднѣйшая высота фермы не зависитъ отъ заданныхъ напряженій растяженія и сжатія, и вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей фермы будетъ также одинаковъ.* Построеніе отрѣзковъ m и n фермы въ этомъ случаѣ показано на фиг. 342:

$$HE = \sqrt{a.b};\ EF = FH = \frac{1}{2}.\sqrt{a.b};\ HI = CH = m.$$

Вѣсъ фермы фиг. 342

$$\min R = \frac{P.\gamma}{Z}.\frac{Z+D}{D}.\sqrt{2}.\sqrt{a.b} \dots\dots \mathbf{133}.$$

Сравненіе ф-лъ **133** и **11** (см. зад. № 41) показываетъ, что комбинація треугольныхъ фермъ фиг. 345 по своему вѣсу легче комбинаціи фиг. 306 въ отношеніи $1 : \sqrt{2}$.

№ 78. Шестая общая задача на комбинаціи треугольныхъ фермъ. Опоры A и B (фиг. 346) на разной высотѣ; всѣ четыре отрѣзка діагоналей фермы различны. Нагрузка P дѣйствуетъ по направленію діагонали CD въ узлѣ D. Выяснить наивыгоднѣйшіе размѣры фермы, при которыхъ вѣсъ ея будетъ *min*.

Рѣш. Силы X, Y, Q, S, T, U, V, W выражаются тѣми же ф-лами, какъ и въ задачѣ № 73 (фиг. 342), поэтому и общее выраженіе вѣса фермы будетъ прежнее:

$$R = P.\gamma.\left[\frac{b.c^2+a.f^2}{h.l.D} + \frac{b.d^2+a.e^2}{h.l.Z} + \frac{m}{Z}\right],$$

но только въ немъ c, d, e, f имѣютъ другое выраженіе:

$$HK = t \cdot \frac{b}{l}; \quad HL = t \cdot \frac{a}{l}, \text{ поэтому}$$

$$c^2 = a^2 + \left(m - t \cdot \frac{a}{l}\right)^2; \; d^2 = a^2 + \left(n + t \cdot \frac{a}{l}\right)^2;$$

$$f^2 = b^2 + \left(m + t \cdot \frac{b}{l}\right)^2; \quad e^2 = b^2 + \left(n - t \cdot \frac{b}{l}\right)^2.$$

Внося эти величины въ выраженіе вѣса фермы, послѣ небольшихъ преобразованій получаемъ:

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \left[\frac{(Z + D)(a_1 \cdot b_1 + m^2) + D \cdot h(h - 2m)}{D \cdot h} + m\right] \ldots \quad \mathbf{134},$$

гдѣ

$$a_1 \cdot b_1 = a \cdot b \cdot \left(1 + \frac{t^2}{l^2}\right) \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{135},$$

т. е. формула вѣса фермы съ опорами на разной высотѣ отличается отъ ф-лы вѣса съ опорами на одной горизонтали только тѣмъ, что вмѣсто плечъ a и b въ ф-лу **134** входятъ отрѣзки a_1 и b_1 діагонали, соединяющей опорныя точки; другими словами, подъемъ одной изъ опоръ отражается на увеличеніи вѣса совершенно такъ-же, какъ и пропорціональное увеличеніе обоихъ плечъ a и b у фермы съ опорами на одной горизонтали Поэтому всѣ соотношенія и заключенія, которыя были сдѣланы по отношенію къ фермамъ фиг. 342 и 344, будутъ имѣть мѣсто и для фермы фиг. 346, если $a \cdot b$ всюду будетъ замѣнено чрезъ $a_1 \cdot b_1$.

Такимъ образомъ ферма, изображенная на фиг. 346, является самой общей комбинаціей, изъ которой всѣ остальныя, разсмотрѣнныя ранѣе, могутъ быть получены, какъ частные случаи. По той же причинѣ нѣтъ надобности разсматривать и ферму фиг. 344 съ опорами на разной высотѣ.

№ 79. Для передачи нагрузки $2P$ на опору A (фиг. 347) взята симметричная комбинація изъ трехъ треугольныхъ фермъ CAD, DAE, EAB съ общею высотою h, шириною вверху $2a$, внизу $2a + 2b$. Найти зависимость между размѣрами фермы подъ условіемъ, чтобы вѣсъ всей фермы былъ *min*

Рѣш. $Q = P \cdot \frac{b}{h}; \; S = P \cdot \frac{d}{h}; \; T = P \cdot \frac{e}{h}; \; U = P \cdot \frac{a + b}{h}.$

$$R = \frac{2P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{Z + D}{D} \cdot \frac{h^2 + a^2 + ab + b^2}{h} \ldots \ldots \quad \mathbf{136}.$$

Если $a + b = c$, то $m^2 = a^2 + a \cdot b + b^2 = a^2 - c \cdot a + c^2$

$$\frac{dm}{da} = 2a - c = 0, \; a = \frac{c}{2} = b \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{137},$$

т. е. наивыгоднѣйшее примѣненіе такой комбинаціи получимъ въ случаѣ равенства размѣровъ a и b, когда

$$R = \frac{2P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{Z + D}{D} \cdot \frac{h^2 + 3a^2}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{138.}$$

Min этой величины получимъ, сдѣлавши $h^2 = 3a^2$; тогда

$$min\ R = \frac{2P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{Z + D}{D} \cdot 2h \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{139.}$$

Наивыгоднѣйшая высота фермы и здѣсь также не зависитъ отъ величины заданныхъ напряженій Z и D. Поэтому и высота фермы и вѣсъ ея останутся одинаковыми, если она будетъ имѣть видъ фиг. 348, т. е. если мы ее сдѣлаемъ съ 3 подкосами и 4 тягами.

№ 80. На опоры A и B (фиг. 349) нагрузка передается посредствомъ несимметричной комбинаціи изъ трехъ треугольныхъ фермъ; крайнія изъ нихъ, прилегающія къ опорамъ, выполнены въ видѣ равнобедренныхъ треугольниковъ; высота h у нихъ общая, а основанія различны — одно $a = 2c$, другое же $b = 2d$. Найти вѣсъ фермы и наивыгоднѣйшее соотношеніе между ея размѣрами.

Рѣш. $X = P \cdot \frac{b}{l}$; $Y = P \cdot \frac{a}{l}$; $Q = P \cdot \frac{b \cdot f}{l \cdot h}$; $S = P \cdot \frac{a \cdot k}{l \cdot h}$,

$$T = P \cdot \frac{a \cdot b}{l \cdot h}; \quad W = \frac{P}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{l \cdot h} = \frac{T}{2}.$$

Вѣсъ всей фермы будетъ:

$$R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{Z + D}{D} \cdot \frac{h^2 + 3 \cdot c \cdot d}{h} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{140.}$$

При $c = d$ или $a = b$ всегда будетъ получаться *max* R. При заданной же длинѣ фермы *min* ея вѣса, независимо отъ Z и D, будетъ тогда, когда

$$h^2 = 3c \cdot d = \frac{3a \cdot b}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{141.}$$

$$min\ R = \frac{P \cdot \gamma}{Z} \cdot \frac{Z + D}{D} \cdot 2h \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{142.}$$

Сравненіе этихъ формулъ съ формулой 11 (см. зад. 41) показываетъ, что ферма фиг. 349 можетъ быть выстроена нѣсколько легче фермы фиг. 306.

Формулы 141 и 142 безъ измѣненія относятся также и къ обратной комбинаціи — фиг. 350. Если $Z = D$, то въ фермахъ фиг. 349 и 350 вѣсъ растянутыхъ и сжатыхъ частей будетъ одинаковъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ I-я.

Сопротивленіе тѣлъ растяженію.

А. Растяженіе тѣла съ горизонтальной осью.

Б. Растяженіе тѣла съ вертикальной осью.

Сопротивленіе тѣлъ сжатію.

А. Общія данныя.

Б. Равномѣрное распредѣленіе напряженій сжатія на поверхности соприкосновенія двухъ тѣлъ.

В. Неравномѣрное распредѣленіе напряженій сжатія на поверхности соприкосновенія тѣлъ.

Г. Напряженія сжатія на стыкѣ тѣлъ, перемѣщающихся одно относительно другого.

Стран

Сопротивленіе тѣлъ сдвигу или срѣзыванію.

Сопротивленіе тѣлъ крученію.

ЧАСТЬ II-я.

Сопротивленіе тѣлъ сгибанію.

А. Зависимость между нагрузкою и силами сопротивленія при сгибаніи.

Б. Модули сопротивленія поперечнаго сѣченія при сгибаніи балки и моменты инерціи сѣченій.

В. Разсчетные сгибающіе моменты и стрѣлы прогиба призматическихъ балокъ.

Г. Многоопорныя балки.

Д. Силы сдвига въ продольныхъ и поперечныхъ плоскостяхъ согнутаго бруса.

Замѣченныя опечатки.

На стр. 12 вмѣсто § 12 надо поставить § 14.

На стр. 127 вторую строку ф-лы **92** надо **читать такъ:**

$$M = H \cdot 0{,}2 \cdot d^3$$

На стр. 205 строка 2 снизу послѣднее слагаемое надо **читать** c_3 вмѣсто c^3.

На стр. 262 и 263 при заглавіи статей должны быть **значки** *б*) и *в*) вмѣсто *a*) и *b*)

На стр. 335 срока 16 снизу нужно читать

$$I_{АБ} = I_{уА} + I_{уБ}.$$

На табл. 10 при фиг. 134 надо читать $K = Q \cdot \frac{2l + d}{2l}$.

На табл. 18 фиг. 229 разстояніе между линіями y и b равно z_0.

На стр. 343 строка 17 сверху — слѣдуетъ читать *которые.*

На табл. 22 фиг. 293 относится къ зад. № 25,*a*.

Табл. 22 на фиг. 294 — $AD = r$; $BD = s$; $CD = t$.

На табл. 27 фиг. 340 отрѣзокъ $DE = m = CE$, а линія BD, **какъ** изображающая сжатую часть фермы, должна быть толстою.

На табл. 28 фиг. 345 вмѣсто T должна стоять буква F.